

О ВЫПУЧИВАНИИ МЕМБРАН С ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Г. П. Черепанов

(Москва)

При растяжении тонких упругих пластинок с отверстиями, находящихся в плоском напряженном состоянии, вблизи отверстий, вообще говоря, возникают области сжимающих напряжений. Сжимающие напряжения могут достигнуть такой величины, что в области их действия пластинка теряет устойчивость и выпучивается. При этом напряженное состояние в оставшейся невыпученной области пластинки кардинально изменяется. Выпученные области вблизи отверстия на тонкой пластинке при ее растяжении хорошо заметны при эксперименте. Учет выпучивания тонких пластин с отверстиями при растяжении необходим для правильного расчета концентрации напряжений вблизи отверстий. Поэтому постановка и решение задач о выпучивании тонких пластин с отверстиями при растяжении представляет значительный интерес.

В полной мере проблема выпучивания для пластин с конечной изгибной жесткостью представляет на сегодня, по-видимому, непреодолимые трудности математического и принципиального характера.

Однако в случае пластин с нулевой изгибной жесткостью проблема выпучивания допускает точную математическую постановку и может быть эффективно решена для большого числа практически важных задач.

Ниже рассмотрена постановка и дано эффективное решение некоторых задач о выпучивании плоской мембраны с отверстиями при растяжении. Под мембраной понимается, как обычно, пластина, изгибная жесткость которой равна нулю. Математически задача сводится к решению некоторой квазилинейной системы уравнений в частных производных первого порядка параболического типа в выпученной области и классических уравнений плоской задачи теории упругости в невыпученной области, причем граница выпученной зоны заранее неизвестна и должна быть определена в процессе решения задачи. Для пластинок с изгибной жесткостью, отличной от нуля, найденные решения являются асимптотическими. Другой асимптотический предел, когда изгибная жесткость пластинки становится бесконечно большой, дается решением плоской задачи теории упругости для внешности отверстия. Изучение выпучивания мембран с отверстиями при растяжении имеет и самостоятельный интерес, так как существует большое число гибких пластин и пленок, весьма близких к мембранам.

Задача о выпучивании мембраны оказывается тесно связанной с задачей разрушения при сжатии упругого тела, прочность которого на растяжение гораздо меньше прочности на сжатие. Показано, что математическая постановка этих классов задач является эквивалентной, так что решение задач о разрушении некоторых материалов может быть моделировано на мембранах.

В работе указан также прием, позволяющий приближенно учитывать изгибную жесткость пластины (в задачах разрушения, соответственно, прочность упругого тела на растяжение).

§ 1. Постановка задачи. 1°. Представим себе плоскую напряженную мембрану, которая имеет выпученную область S . Смещения почти всюду на контуре L выпученной области S считаем малыми по сравнению с характерным линейным размером области S . При этом невыпученная об-

ласть плоской напряженной мембраны будет находиться в условиях плоской задачи линейной теории упругости, а смещения в области S , нормальные к поверхности плоской невыпученной области, будут малыми по сравнению с характерным размером области S . Поэтому можно принять, что напряженное состояние в области S описывается средними по сечению мембраны напряжениями σ_x , σ_y , τ_{xy} (плоскость декартовых координат xy совпадает с плоскостью невыпученной части мембраны), удовлетворяющими уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Главные напряжения σ_1 и σ_2 , из которых σ_1 — минимальное, а σ_2 — максимальное, определяются, как известно, формулами

$$\sigma_{2,1} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (1.2)$$

В мембране не может быть отрицательных (сжимающих) главных напряжений [1]. Поэтому необходимым и достаточным признаком выпученной области является обращение в нуль минимального главного напряжения σ_1 . Отсюда по формуле (1.2) получаем соотношение между напряжениями, которое должно тождественно выполняться в выпученной области S

$$\sigma_x \sigma_y = \tau_{xy}^2 \quad (\sigma_x \geq 0, \quad \sigma_y \geq 0) \quad (1.3)$$

Если на части контура L , совпадающей с границей мембраны, заданы напряжения, то соотношения (1.1) и (1.3) дают полную систему уравнений для определения напряженного состояния выпученной области S и притом независимо от деформаций (статически определимая задача).

Будем предполагать, что на границе выпученной области S отсутствуют разрывы смещений. Тогда, очевидно, все компоненты напряжения будут непрерывными при переходе из области S в невыпученную область.

Напряжения в невыпученной области мембраны описываются [2] потенциалами Колосова-Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \quad (z = x + iy) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [z\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

2°. Рассмотрим несколько иную задачу. Пусть упругое тело с отверстиями, находящееся в условиях плоской задачи теории упругости (плоская деформация или плоское напряженное состояние), подвергается сжатию. Считаем, что прочность материала на растяжение гораздо меньше прочности его на сжатие, а приложенные нагрузки велики по сравнению с прочностью материала на растяжение. Такими свойствами обладает большое количество реальных материалов, например стекло, чугун, мягкие грунты и т. д. При сжатии тела вблизи отверстий возникают области растягивающих напряжений. Так как материал не выдерживает растягивающих напряжений, то вблизи отверстий образуются зоны разрушения. Для указанных только что материалов можно принять, что в зоне разрушения максимальное главное напряжение σ_2 обращается в нуль. Отсюда по формуле (1.2) получаем соотношение (1.3) между напряжениями в зоне разрушения (однако при этом должно быть $\sigma_x \leq 0$, $\sigma_y \leq 0$).

В области разрушения справедливы также уравнения равновесия (1.1). Таким образом, математическая постановка указанных задач разрушения совпадает с задачей о выпучивании мембраны при растяжении. Это позволяет решать задачи о разрушении при помощи моделирования на мембранах соответствующей математической задачи.

В дальнейшем для определенности везде говорится о выпучивании мембраны. Решение задачи разрушения получается, очевидно, переменной знака напряжений в соответствующей задаче о выпучивании.

§ 2. Напряжения в выпученной области. 1°. Рассмотрим уравнения (1.1) и (1.3). Условие (1.3) будет удовлетворено, если положить

$$\sigma_x = \alpha^2(x, y), \quad \sigma_y = \beta^2(x, y), \quad \tau_{xy} = \alpha(x, y)\beta(x, y) \quad (2.1)$$

Внося эти значения в уравнения равновесия, получаем систему двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$

$$2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0, \quad \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Найдем характеристики системы (2.2). Для этого, как обычно [3], добавим к уравнениям (2.2) два условия «полоски»

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy = d\alpha, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy = d\beta$$

и найдем линии, для которых задача Коши неразрешима. Для таких линий определитель системы линейных алгебраических уравнений относительно частных производных функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ обращается в нуль.

Получаем

$$\alpha dy - \beta dx = 0 \quad (2.3)$$

Потребуем, чтобы эта линия была линией слабого разрыва. Для этого необходимо, чтобы числители в формулах Крамера обращались в нуль. Отсюда находим условие, которое должно удовлетворяться на характеристических линиях

$$\beta d\alpha - \alpha d\beta = 0 \quad (2.4)$$

Таким образом, система (2.2) имеет одно семейство характеристик, являющихся прямыми линиями $y = Cx + C_0$, вдоль которых удовлетворяется соотношение $\beta = C\alpha$ (система параболического типа).

Заметим, что уравнения равновесия и условие (1.3) не изменяются при переходе от системы координат xy к любой другой декартовой системе координат $\xi\eta$. Если ось ξ взять вдоль характеристики, а ось η соответственно по нормали к ней, то найдем, что вдоль характеристики $\eta = 0$ должно выполняться условие

$$\sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0 \quad \text{вдоль } \eta = 0 \quad (2.5)$$

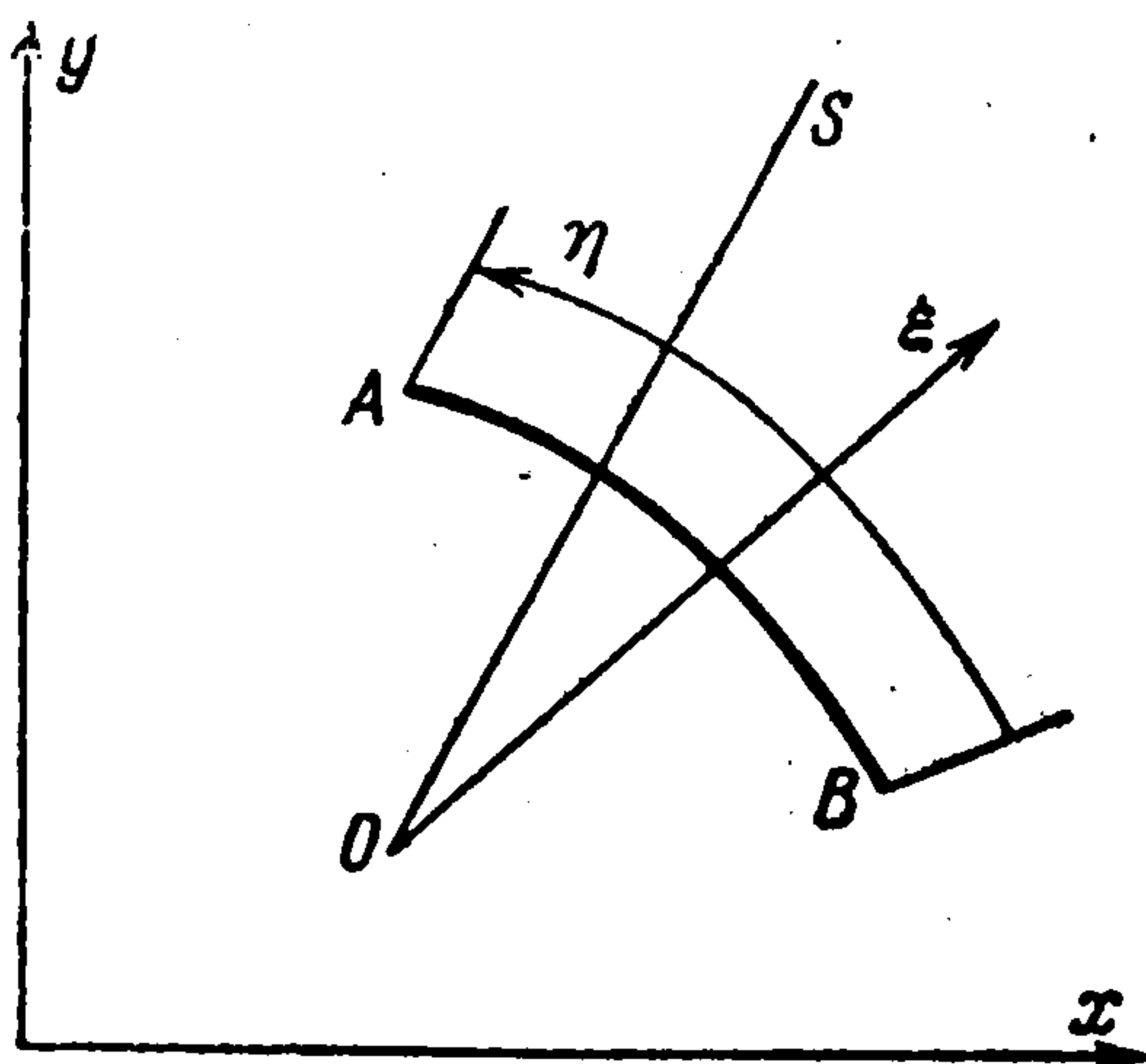
Из формулы (2.5) вытекает простой механический смысл характеристики: характеристика является линией, вдоль которой происходит выпучивание мембраны.

2°. Рассмотрим решение задачи Коши для параболической системы уравнений (1.1) и (1.3). Пусть в плоскости xy задана гладкая дуга AB (фигура) $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, на которой известны непрерывные ограниченные функции $\sigma_n = \sigma_n(s)$, $\tau_{nt} = \tau_{nt}(s)$, представляющие собой заданные нагрузки.

Оси декартовых координат tn образованы соответственно направлениями касательной и нормали к дуге AB в каждой точке. Предположим пока, что функции $\sigma_n(s)$ и $\tau_{nt}(s)$ нигде на дуге AB одновременно в нуль не обращаются. Из каждой точки дуги AB проведем прямолинейную характеристику, уравнение которой запишется в виде

$$x - x_0(s) = -f(s) [y - y_0(s)]$$

$$f(s) = \frac{\tau_{nt}(s) x_0'(s) + \sigma_n(s) y_0'(s)}{\tau_{nt}(s) y_0'(s) - \sigma_n(s) x_0'(s)} \quad (2.6)$$



Прямые (2.6) образуют семейство, зависящее от одного параметра s . Обозначим область, ограниченную дугой AB и прямолинейными характеристиками, исходящими из концов A и B , через S . Так как $f(s)$ — непрерывная функция s , то через каждую точку области S проходит, очевидно, по крайней мере, хотя бы одна прямолинейная характеристика. Докажем следующую основную теорему.

Теорема 2.1. Задача Коши для параболической системы уравнений (1.1) и (1.3) разрешима тогда и только тогда, когда функция $f(s)$ является монотонной в широком смысле. При выполнении этого условия решение задачи Коши существует и единственно во всей области S ; решение при этом находится в замкнутом виде.

Монотонность в широком смысле функции $f(s)$ геометрически означает, что пучок прямолинейных характеристик, сходящих с дуги AB , состоит из расходящихся и параллельных прямых. Предположим, что функция $f(s)$ немонотонна. Тогда имеется, по крайней мере, одна точка пересечения характеристик. Такую точку будем называть особой. Очевидно, в особой точке может быть: 1) либо нулевое напряженное состояние $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$; 2) либо бесконечно большое радиальное напряжение при равенстве нулю остальных напряжений. Второй случай соответствует наличию в особой точке выпученной области некоторой сосредоточенной силы, задаваемой заранее.

Пусть сосредоточенные силы в выпученной области S мембраны отсутствуют. Особая точка является центром, из которого расходится веер радиальных характеристик. Точки пересечения этих характеристик с дугой AB также являются особыми, что противоречит исходному предположению о том, что функции $\sigma_n(s)$ и $\tau_{nt}(s)$ нигде на дуге AB не обращаются одновременно в нуль. Таким образом, необходимость монотонности

в широком смысле функции $f(s)$ для разрешимости задачи Коши доказана. Из предыдущих рассуждений вытекает следующее важное следствие.

Следствие. Если сосредоточенные силы в области S отсутствуют и в области S имеется хотя бы одна особая точка, то каждая точка области S является особой.

Построим решение задачи Коши, предполагая, что функция $f(s)$ монотонна в широком смысле.

Рассмотрим в области S криволинейную ортогональную систему координат $\xi\eta$, образованную пучком непересекающихся прямых характеристик $\xi(x, y)$ и семейством к ним ортогональных кривых $\eta(x, y)$ (фигура). Уравнения ортогональных к характеристикам кривых, очевидно, найдутся как решения уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(s)} \quad (2.7)$$

где s является в свою очередь функцией независимых переменных x и y , неявно определяемой уравнением (2.6).

В частности, когда касательная нагрузка $\tau_{nt}(s)$ равна нулю на дуге AB , семейство прямых $\xi(x, y)$ — это семейство нормалей к дуге AB (которая при этом не должна быть вогнутой для разрешимости задачи Коши), а семейство $\eta(x, y)$ состоит из самой дуги AB и эквидистантных ей вдоль характеристик кривых в области S .

Запишем уравнения равновесия (1.1) в криволинейных ортогональных координатах [4] и положим в них $\sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0$. Одно из уравнений равновесия обратится в тождество, а другое примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (H_1 H_2 \sigma_\xi) - \sigma_\xi H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \xi} = 0 \quad (2.8)$$

где H_1, H_2 — коэффициенты Ламе.

В бесконечно малой окрестности каждой прямолинейной характеристики система криволинейных ортогональных координат $\xi\eta$, очевидно, совпадает с полярной системой координат $r\theta$ (r — радиус кривизны координатной кривой η , θ — угол), начало координат которой берется на продолжении характеристики в центре кривизны. Получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi} = 0, \quad H_2 = r \quad (2.9)$$

Используя (2.9), находим решение уравнения (2.8)

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_n^2(s) + \tau_{nt}^2(s)}{\sigma_n(s)} \frac{R(s)}{r} \quad (2.10)$$

Здесь $R(s)$ — радиус кривизны координатной кривой η в точке пересечения с дугой AB и соответствующей характеристикой.

В частности, когда $\tau_{nt}(s) = 0$ в некоторой точке, то $R(s)$ является радиусом кривизны дуги AB в этой точке.

Таким образом, задача Коши для уравнений (1.1) и (1.3) решается в замкнутом виде. Единственность решения задачи Коши следует непосредственно из самого построения решения.

3°. Пусть теперь в некоторой точке дуги AB функции $\sigma_n(s)$ и $\tau_{nt}(s)$ обращаются в нуль. Проходящая через эту точку характеристика является касательной к дуге AB в этой точке. По одну сторону этой касательной, где проходят характеристики, исходящие из дуги AB , справедлива, очевидно, только что доказанная теорема. Для того чтобы построить решение задачи Коши по другую сторону касательной, необходимо уметь решать задачу Коши для дуги AB , несущей на себе значения функций и являющейся или характеристикой или огибающей характеристик. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. Если дуга AB , на которой функции $\sigma_n(s)$ и $\tau_{nt}(s)$ обращаются в нуль, криволинейна, то решение задачи Коши для уравнений (1.1) и (1.3) всюду в области S равно нулю. Если дуга AB , на которой функции $\sigma_n(s)$ и $\tau_{nt}(s)$ обращаются в нуль, прямолинейна, то решение задачи Коши, вообще говоря, неединственно и определяется формулой

$$\sigma_n = \tau_{nt} = 0, \quad \sigma_t = f(n) \quad (2.11)$$

где $f(n)$ — произвольная неотрицательная функция.

Для выпуклой дуги AB доказательство непосредственно вытекает из следствия первой теоремы. Пусть дуга AB вогнутая. Найдется хотя бы одна точка в области S такая, что проведенная из нее характеристика пересечет границу области S . Тогда согласно следствию теоремы 2.1 все точки области S будут особыми. В случае прямолинейной дуги AB единственной характеристикой, проведенной через произвольную точку области S и не пересекающей границы области S , является прямая, параллельная границе области S . Общее решение задачи для пучка параллельных границе $n = 0$ характеристик дается, очевидно, формулами (2.11). Заметим, что согласно предыдущему решение, отвечающее $f(n) \neq 0$, является неустойчивым относительно малых изменений дуги AB и малых возмущений граничных функций. Поэтому единственно приемлемым решением также для прямолинейной дуги AB является решение, обращающееся в нуль во всей области S .

4°. Пусть мембрана представляет собой внешность окружности радиуса r_0 , к которой приложена постоянная растягивающая нагрузка $\sigma_r = q$. В этом случае характеристики представляют собой радиусы, выпученная область занимает всю мембрану, а напряжения в ней даются формулами

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_r = (qr_0) / r \quad (2.12)$$

Если перейти к пределу $q \rightarrow \infty$, $r_0 \rightarrow 0$, так чтобы при этом было $\lim(qr_0) = Q$, то получим особую точку типа центра растяжения. Формулы (2.12) дают также решение задачи для мембраны, контур которой состоит из дуги окружности радиуса r_0 с нагрузкой $\sigma_r = q$ и радиусов $r > r_0$, свободных от напряжений. Переход к пределу в этом случае дает в начале координат особую точку типа сосредоточенной радиальной силы. Отметим, что выпучивания не происходит, если сосредоточенная сила получена переходом к пределу в дельтаобразной последовательности, представляющей собой нормальную нагрузку на прямолинейной границе. Поэтому при решении задач о мембране с сосредоточенными силами необходимо указывать, какому предельному переходу они соответствуют.

§ 3. Отверстия с двумя точками возврата, целиком охватываемые зонами выпучивания. 1. Пусть в бесконечной упругой мембране имеется n отверстий, контуры которых имеют по две точки возврата и целиком охвачены зонами выпучивания. На бесконечности действуют напряжения, возрастающие по полиномиальному закону. К контурам отверстий приложены такие нагрузки, что в зонах выпучивания напряжения выражаются формулами

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_k, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2a \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

где постоянная σ_k в различных зонах выпучивания может быть различной, а комплексная величина a постоянна для всех зон выпучивания.

При помощи основных представлений Н. И. Мусхелишвили (1.4) граничные условия на неизвестном многосвязном контуре L , разделяющем выпученную и невыпученную области, запишутся в виде

$$4 \operatorname{Re} \Phi(z) = \sigma_k, \quad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = a \quad (3.2)$$

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ конформно преобразует какую-либо каноническую область плоскости ζ (например, внешность параллельных разрезов) на невыпученную область плоскости z , ограниченную контуром L . В плоскости ζ для трех аналитических функций $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$ получается следующая краевая задача:

$$4 \operatorname{Re} \varphi(\zeta) = \sigma_k, \quad \overline{\omega(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) \omega'(\zeta) = a \omega'(\zeta) \quad (3.3)$$

Введем аналитическую функцию $\chi(\zeta)$

$$\chi(\zeta) = \frac{\omega'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} [\psi(\zeta) - a] \quad (3.4)$$

Второе краевое условие (3.3) при помощи функции $\chi(\zeta)$ легко преобразуется к двум задачам Дирихле

$$\operatorname{Re} [\omega(\zeta) + \chi(\zeta)] = 0, \quad \operatorname{Im} [\omega(\zeta) - \chi(\zeta)] = 0 \quad (3.5)$$

Задача Дирихле хорошо изучена. Во многих случаях ее решение может быть найдено в замкнутом виде [5, 6].

2°. В качестве примера рассмотрим простейший случай бесконечной мембраны с одним отверстием, растягиваемой на бесконечности постоянными напряжениями

$$\sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.6)$$

Точки возврата контура, свободного от нагрузок, расположены на оси x в точках $x = \pm l$. Дальнейшие требования, накладываемые на контур, выяснятся после решения задачи; они вытекают из условия, что выпученная область охватывает весь контур отверстия. Согласно теореме 2.2 в рассматриваемом случае будет $\sigma_k = a = 0$. В качестве канонической области на плоскости ζ возьмем внешность единичного разреза $(-1, +1)$ с соответствием точек $\omega(\pm 1) = \pm l$, $\omega(\infty) = \infty$.

Краевые условия задачи Дирихле (3.3) и (3.5) для разреза $(-l, +l)$ запишутся в виде

$$\operatorname{Re} \varphi(\zeta) = 0, \quad \operatorname{Re} [\omega(\zeta) + \chi(\zeta)] = 0, \quad \operatorname{Im} [\omega(\zeta) - \chi(\zeta)] = 0 \quad (3.7)$$

При $\zeta \rightarrow \infty$ функции $\varphi(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ на основании формул (1.4), (3.6) и (3.4) ведут себя следующим образом:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + O(\zeta^{-2}), \quad \omega(\zeta) = O(\zeta), \quad \chi(\zeta) = O(\zeta^3) \quad (3.8)$$

Кроме того, функция $\varphi(\zeta)$ неограничена, а функции $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ ограничены в окрестности концов отрезка $\zeta = \pm 1$. Общее решение задач Дирихле (3.7), удовлетворяющее условиям (3.8), запишется в форме [5, 6].

$$\varphi(\zeta) = \frac{(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)\zeta}{4\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$\omega(\zeta) = (-A\zeta^2 - B\zeta + E)\sqrt{\zeta^2 - 1} + A\zeta^3 + B\zeta^2 + C\zeta + D \quad (3.9)$$

$$\chi(\zeta) = (-A\zeta^2 - B\zeta + E)\sqrt{\zeta^2 - 1} - A\zeta^3 - B\zeta^2 - C\zeta - D$$

$$(\sqrt{\zeta^2 - 1} = \zeta + O(\zeta^{-1}) \text{ при } \zeta \rightarrow \infty)$$

Неизвестные постоянные A, B, C, D, E действительны. Для их определения используем следующие условия:

(1) условие (3.4), связывающее некоторые коэффициенты разложения функций $\omega(\zeta)$, $\chi(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ в бесконечно удаленной точке;

(2) условие отсутствия сосредоточенных сил в точках возврата $z = \pm l$ (отсюда следует, что особенность функции $\Phi(z)$ в этих точках интегрируемая);

(3) условие соответствия точек $\omega(+1) = l$, $\omega(-1) = -l$.

В результате получаем

$$A = E = 2l \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{\sigma_y^\infty + 3\sigma_x^\infty}, \quad C = l \left(1 - 2 \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{\sigma_y^\infty + 3\sigma_x^\infty} \right), \quad B = D = 0 \quad (3.10)$$

Найдем границу выпученной зоны. Уравнение ее контура получим, положив в преобразующей функции $\omega(\zeta)$ $\zeta = t$

$$x(t) = At^3 + Ct, \quad y(t) = A(1 - t^2)^{3/2} \quad (1 \geq t \geq -1) \quad (3.11)$$

Семейство кривых (3.11) зависит от отношения растягивающих напряжений на бесконечности $\sigma_y^\infty / \sigma_x^\infty$. Все кривые имеют две оси симметрии — оси x и y — и касаются оси x в точках $x = \pm l$. Исследование показывает, что при $\sigma_y^\infty = \sigma_x^\infty$ граница выпученной зоны совпадает с разрезом $(-l, +l)$ действительной оси; при $\sigma_x^\infty \leq \sigma_y^\infty < 5\sigma_x^\infty$ контуры границ представляют собой плавные кривые, имеющие горизонтальную касательную при $x = 0$. При $\sigma_y^\infty < \sigma_x^\infty$ выпучивание происходит на втором листе двухлистной римановой поверхности (листы склеены вдоль разреза

($-l, +l$); этот случай физически соответствует выпучиванию на кусках мембраны, приклеенных к противоположным берегам разреза; контуры границ выпучивания в данном случае имеют горизонтальную касательную при $x = 0$.

При $\sigma_y^\infty = 5\sigma_x^\infty$ граница выпученной зоны будет астроидой ($x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$, при $x = 0$ вертикальная касательная), а при $\sigma_y^\infty > 5\sigma_x^\infty$ на контуре границы появляется петля, которая не имеет физического смысла (аналогичное обстоятельство имеет место в теории трещин [7]). Итак, при $\sigma_y^\infty \leq 5\sigma_x^\infty$ решение поставленной задачи существует, а при $\sigma_y^\infty > 5\sigma_x^\infty$ задача в указанной постановке неразрешима. Физически это объясняется тем, что как только на контуре зоны выпучивания появляется точка возврата, в окрестности этой точки начинают возникать напряжения сжатия, так как изгибная жесткость пластины хотя и мала, но конечна. Следовательно, чисто мембранная постановка задачи справедлива лишь до появления точек возврата на контурах зон выпучивания.

Замечание 3.1. Формулы (3.9) дают также решение задачи о выпучивании разрезанной мембраны между двумя сосредоточенными силами, приложенными в точках $z = \pm l$ и направленными противоположно одна другой, когда на бесконечности действуют постоянные растягивающие напряжения. В этом случае для определения неизвестных постоянных вместо условия (2) следует взять условие равенства особенностей функции $\Phi(z)$ в точках $z = \pm l$ особенностям, соответствующим заданным силам.

Замечание 3.2. Если коэффициент интенсивности напряжения σ_y в окрестности точек возврата $z = \pm l$ упругой мембраны превосходит некоторую постоянную для данного материала и толщины мембраны величину, начинается рост длины l с увеличением напряжения σ_y^∞ . Зависимость длины l от напряжений σ_y^∞ и σ_x^∞ и модуля сцепления K можно определить, используя условие Г. И. Баренблатта в теории равновесных трещин [7].

3°. В некоторых случаях возможен приближенный учет конечной изгибной жесткости пластины. Рассмотрим применяемый прием на простейшем примере. Пусть бесконечная упругая пластинка с разрезом ($-l, +l$) вдоль действительной оси растягивается на бесконечности напряжениями σ_x^∞ и σ_y^∞ . Считаем, что в зоне выпучивания, охватывающей весь разрез, имеют место постоянные напряжения, удовлетворяющие граничным условиям и уравнениям равновесия (1.1)

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.12)$$

Отрицательное напряжение σ по порядку величины равно некоторой средней величине сжимающего напряжения в выпученной области, за которое можно, например, принять критическое напряжение в пластинке шириной l (той же толщины и из того же материала).

Решение математической задачи совершенно аналогично предыдущему. Функция $\varphi(\zeta)$ запишется в виде

$$\varphi(\zeta) = \frac{\sigma}{4} + \frac{(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - \sigma)\zeta}{4\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (3.13)$$

Функции $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ находятся по формулам (3.9), в которых нужно положить

$$A = E = 2l \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + \sigma}{\sigma_y^\infty + 3\sigma_x^\infty - 3\sigma}, \quad C = l \frac{5\sigma_x^\infty - 5\sigma - \sigma_y^\infty}{\sigma_y^\infty + 3\sigma_x^\infty - 3\sigma}, \quad B = D = 0$$

$$\left(\chi(\zeta) = \frac{\omega'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \left[\psi(\zeta) + \frac{\sigma}{2} \right] \right) \quad (3.14)$$

Контуры зон выпучивания имеют тот же характер, что и для мембраны, однако граница несуществования решения значительно отодвигается. В частности, когда $\sigma_x^\infty = 0$, выпучивание начинается при $\sigma_y^\infty = -\sigma$, при увеличении σ_y^∞ область выпучивания растет до тех пор, пока $\sigma_y^\infty \leq -5\sigma$ (при $\sigma_y^\infty = -5\sigma$ контур выпучивания представляет собой по-прежнему астроида); при $\sigma_y^\infty > -5\sigma$ решение не имеет физического смысла по указанной ранее причине.

Представляет интерес найти зависимость длины подвижно-равновесной трещины в пластине от приложенных нагрузок σ_x^∞ и σ_y^∞ и напряжения в выпученной области σ . Используя условие Г. И. Баренблатта [7] и полученное решение, можно найти

$$\frac{l\sigma^2}{K} = \frac{8\sigma^2 (\sigma_y^\infty + 3\sigma_x^\infty - 3\sigma)}{\pi^2 (5\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + \sigma) (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty - \sigma)^2} \quad (K - \text{модуль сцепления}) \quad (3.15)$$

Трещина любой длины в пластине при $5\sigma_y^\infty \leq \sigma_x^\infty - \sigma$ всегда устойчива; при $5\sigma_y^\infty > \sigma_x^\infty - \sigma$ каждому значению длины трещины соответствует некоторое значение критической нагрузки.

§ 4. Отверстия, частично охватываемые зонами выпучивания. Укажем один общий класс задач о выпучивании мембран с отверстиями при растяжении, в котором может быть получено решение (иногда в замкнутом виде). Отметим, что контур, свободный от нагрузки и не имеющий точек возврата, очевидно, не может быть целиком охваченным выпученной областью. Пусть контур отверстия (односвязный или многосвязный) состоит из некоторого числа прямолинейных отрезков, на которых заданы нормальное смещение u_n , являющееся кусочно постоянной функцией, и равное нулю касательное напряжение τ_{tn} , и произвольных криволинейных дуг, целиком охватываемых областями выпучивания. Считаем, что в области выпучивания имеют место нулевые напряжения

$$\sigma_x + \sigma_y = 0, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 0 \quad (4.1)$$

Неизвестную границу выпученной и невыпученной зон обозначим через L , а часть границы мембраны, состоящей из прямолинейных отрезков и лежащей в невыпученной области, обозначим через M . Для произвольной системы декартовых координат tn имеют место следующие основные представления [2]:

$$\sigma_t + \sigma_n = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]$$

$$\sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{tn} = 2e^{2i\theta} [z\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (4.2)$$

$$2\mu \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} + i \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = \kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\theta} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}].$$

Здесь μ и κ — упругие постоянные, θ — угол между осями t и x . Отсюда для потенциала Колосова—Мусхелишвили $\Phi(z)$ получается следующее выражение:

$$(\kappa + 1) \Phi(z) = \sigma_n + 2\mu \frac{\partial u_t}{\partial t} + i \left(-\tau_{tn} + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \quad (4.3)$$

При помощи формул (4.2), (4.3) граничные условия задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Re} \Phi(z) &= 0, & \overline{z} \Phi'(z) + \Psi(z) &= 0 & \text{на } L \\ \operatorname{Im} \Phi(z) &= 0, & \operatorname{Im} \{ e^{2i\theta_j} [\overline{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] \} &= 0 & \text{на } M \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь θ_j — угол, образуемый j -м прямолинейным отрезком границы с осью x (в направлении обхода контура $L + M$).

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ конформно отображает внешность разрезом плоскости ζ , параллельных действительной оси, на невыпученную область плоскости z , ограниченную контуром $L + M$. Образы контуров L и M на плоскости ζ будем обозначать также через L и M .

В плоскости ζ для трех аналитических функций $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$ и $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$ по формулам (4.4) получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi(\zeta) &= 0 & \text{на } M, & & 4 \operatorname{Re} \varphi(\zeta) &= 0 & \text{на } L \\ \overline{\omega(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \psi(\zeta) &= 0 & \text{на } L \\ \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta_j} \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) \right] \right\} &= 0 & \text{на } M \\ \operatorname{Im} [e^{-i\theta_j} \omega(\zeta)] &= d_j & \text{на } M \end{aligned} \quad (4.5)$$

Последнее условие (4.5) представляет собой записанное в комплексной форме уравнение j -го прямолинейного отрезка границы

$$y = x \operatorname{tg} \theta_j + d_j / \cos \theta_j$$

Введем аналитическую функцию $\chi(\zeta)$

$$\chi(\zeta) = \frac{\omega'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \psi(\zeta) \quad (4.6)$$

При помощи функции $\chi(\zeta)$ последние три условия краевой задачи (4.5) можно записать в виде

$$\overline{\omega(\zeta)} + \chi(\zeta) = 0 \quad \text{на } L \quad (4.7)$$

$$\operatorname{Im} [e^{-i\theta_j} \omega(\zeta)] = d_j, \quad \operatorname{Im} [e^{i\theta_j} \chi(\zeta)] = d_j \quad \text{на } M$$

Краевая задача (4.7) в некоторых случаях может быть решена в замкнутом виде. Пусть, например, контур $L + M$ представляет собой совокупность отрезков действительной оси. Это может быть тогда, когда на плоскости z контур $L + M$ имеет ось симметрии [8]. Разрежем плоскость ζ вдоль действительной оси и рассмотрим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$.

На разрезанных участках N действительной оси ζ , очевидно, можно задать граничное условие в виде

$$\operatorname{Im} \omega(\zeta) = 0, \quad \operatorname{Im} \chi(\zeta) = 0 \quad \text{на } N \quad (4.8)$$

Продолжим аналитически функции $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ через участок L действительной оси плоскости ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta < 0$ при помощи соотношений

$$\omega(\zeta) + \bar{\chi}(\zeta) = 0, \quad \bar{\omega}(\zeta) + \chi(\zeta) = 0 \quad (4.9)$$

Для единых аналитических во внешности разрезом $M + N$ функций $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ на основании (4.7) — (4.9) получаем следующую линейную краевую задачу Римана для двух функций:

$$\begin{aligned} \omega^+(\zeta) &= -e^{2i\theta_j} \chi^-(\zeta) + 2d_j e^{i\theta_j} \quad \text{на } M, & \omega^+(\zeta) &= -\chi^-(\zeta) \quad \text{на } N \\ \chi^+(\zeta) &= -e^{-2i\theta_j} \omega^-(\zeta) + 2d_j e^{-i\theta_j} \quad \text{на } M, & \chi^+(\zeta) &= -\omega^-(\zeta) \quad \text{на } N \end{aligned} \quad (4.10)$$

Краевая задача Римана (4.10) является частным случаем более общей краевой задачи Римана, решение которой было получено в работе [9]. Ее решение может быть найдено в замкнутом виде.

Нетрудно заметить, что, когда невыпученная область плоскости z , ограниченная контуром $L + M$, является односвязной, отображением на верхнюю полуплоскость ζ исходную задачу всегда можно решить в замкнутом виде, сводя ее совершенно аналогично предыдущему к краевой задаче (4.7) и затем краевой задаче Римана (4.10). Аналогично может быть найдено решение в том случае, когда на контуре M заданы граничные условия

$$\sigma_n = 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial t} = e_k \quad \text{или} \quad \tau_{nt} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} = f_k$$

где e_k, f_k — произвольные кусочно-постоянные функции.

Автор благодарен Л. А. Галину и Г. И. Баренблатту за проявленный интерес к работе и за ее обсуждение на семинарах по механике сплошных сред в Институте механики АН СССР и Институте механики Московского университета.

Поступила 9 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
3. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II, Гостехтеориздат, 1951.
4. Кочин Н. Е. Начала векторного и тензорного исчисления. Изд-во АН СССР, 1961.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1958.
7. Баренблатт Г. И. Математическая теория хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 4.
8. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1952.
9. Черепанов Г. П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.