

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

В. И. Феодосьев

(Москва)

В вопросах, связанных с решением нелинейных задач устойчивости, имеют большое значение вариационные методы.

По нелинейной устойчивости и по хлопку к настоящему времени получено много приближенных решений. С качественной стороны они, как правило, не вызывают сомнений. При помощи вариационных методов удается обычно установить существование критических состояний и неоднозначность форм равновесия. Что же касается количественных оценок, то в нелинейной области в зависимости от метода решения и способа аппроксимации полученные результаты заметно разнятся. Объясняется это тем, что форма упругой поверхности оболочки при больших перемещениях меняется настолько существенно, что не может быть описана функциями, содержащими только один или даже два варьируемых параметра.

Введение большего числа параметров наталкивается на серьезные вычислительные трудности. Дело сводится, как правило, к решению системы кубических уравнений, число которых равно числу варьируемых параметров. Анализ возможных форм равновесия требует определения вещественных корней этих уравнений в зависимости от внешних сил. Практически эта задача оказывается настолько громоздкой, что приходится ограничиваться одним, максимум двумя варьируемыми параметрами. Иногда удается вводить и большее число параметров. Но это достигается обычно в тех случаях, когда некоторые из уравнений оказываются линейными или же искусственно линеаризуются. Особенно большие трудности представляют исследования систем, нагруженных несколькими независимо меняющимися силами.

Техническая сторона исследования несколько упрощается, если используется быстродействующая электронноцифровая машина. Однако существенного шага вперед для увеличения числа варьируемых параметров пока не сделано.

Ниже рассматривается возможность увеличения числа варьируемых параметров, а также развитие наиболее эффективных методов решения, причем не в смысле формальной сходимости, а практической результативности метода.

Оценка эффективности приближенного метода может быть произведена путем сопоставления с точным решением. Однако точных аналитических решений для нелинейных задач теории оболочек пока не имеется. Поэтому в первой части работы рассматривается задача об осесимметричных прогибах пологого сферического купола. Она решается численным методом; полученное решение принимается за эталонное. В дальнейшем предполагается, что использование быстродействующей электронноцифровой машины является органической частью работы. Приводится алгоритм решения.

1. Уравнения для пологой сферической оболочки [1] при нагружении ее равномерно распределенным по выпуклой стороне давлением p имеют вид

$$\begin{aligned} r\psi'' + \psi' - \frac{\psi}{r} = \vartheta \left(\theta_k r + \frac{\vartheta}{2} \right), \quad r\vartheta'' + \vartheta' - \frac{\vartheta}{r} = -\lambda\psi \left(\theta_k r + \vartheta \right) + \nu r^2 \\ \left(r = \frac{r}{a}, \psi = -\frac{T_1 r^2}{Eh}, \lambda = 12(1 - \mu^2) \frac{a^2}{h^2}, \nu = \lambda \frac{pa}{2Eh} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — безразмерный радиус, принятый в качестве независимой переменной; r — текущий радиус; a — радиус внешнего контура (фиг.1); T_1 — радиальное растягивающее усилие; h — толщина оболочки; ϑ — угол поворота нормали; θ_k — угол наклона дуги меридиана недеформированной оболочки при $r = a$.

Вводя в качестве параметра высоту купола H , преобразуем уравнения к виду

$$\rho\Psi'' + \Psi' - \frac{\Psi}{\rho} = \Theta \left(\frac{2H}{h}\rho + \frac{1}{2}\Theta \right) \quad (1.2)$$

$$\rho\Theta'' + \Theta' - \frac{\Theta}{\rho} = -12(1-\mu^2)\Psi \left(\frac{2H}{h}\rho + \Theta \right) + 6(1-\mu^2)\rho_0\rho^2 \quad (1.3)$$

где

$$\Theta = \frac{a}{h}\vartheta, \quad \Psi = \frac{a^2}{h^2}\psi, \quad \rho_0 = \frac{\rho a^4}{Eh^4}$$

Для осевых перемещений w получим

$$\frac{w}{h} = \int_0^1 \Theta d\rho \quad (1.4)$$

Обозначим

$$\Theta' = u, \quad \Psi' = v \quad (1.5)$$

и перепишем уравнение (1.2) в конечных разностях

$$\Delta\Theta = u\Delta\rho, \quad \Delta\Psi = v\Delta\rho \quad (1.6)$$

$$\Delta v = \left(-\frac{v}{\rho} + \frac{\Psi}{\rho^2} + \frac{2H}{h}\Theta + \frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{\rho} \right) \Delta\rho \quad (1.7)$$

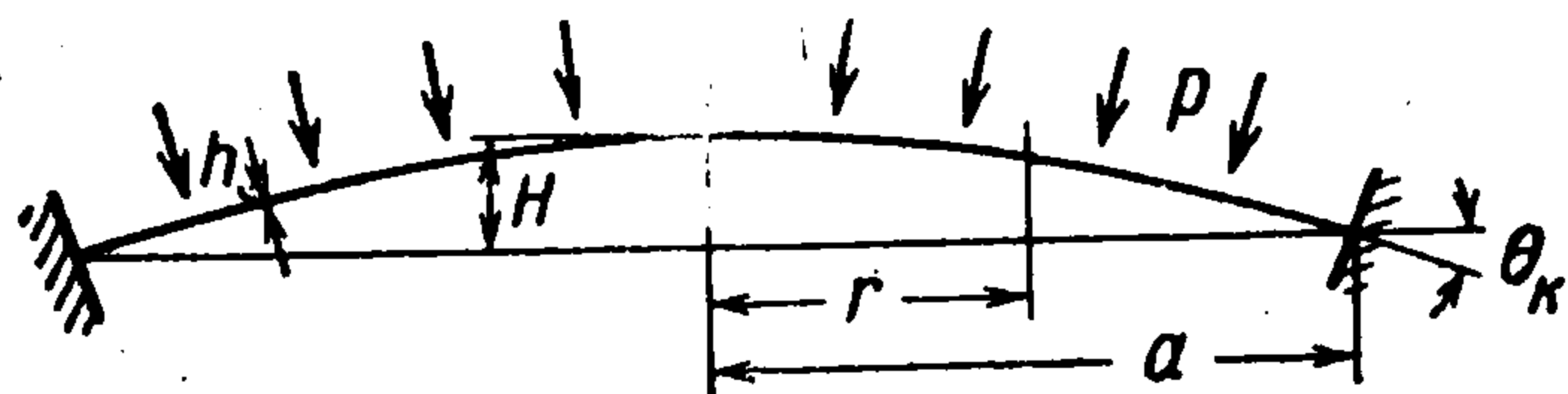
$$\Delta u = \left(-\frac{u}{\rho} + \frac{\Theta}{\rho^2} - 10.92\frac{2H}{h}\Psi - 10.92\frac{\Psi\Theta}{\rho} + 5.46\rho_0\rho \right) \Delta\rho$$

Здесь и в дальнейшем принято $\mu = 0.3$.

При $\rho = 0$ функции Θ и Ψ обращаются в нуль.

Задаваясь значениями $u = u_0$ и $v = v_0$, из выражений (1.6) находим $\Delta\Theta$ и $\Delta\Psi$, а из уравнений (1.7) определяем Δu и Δv . Суммируя найденные приращения функции с их предыдущими значениями, продолжаем процесс интегрирования до значения $\rho = 1$. На контуре должны соблюдаться условия полного защемления, т. е. $\Theta_{\rho=1} = 0$ и

$Z_k = Z_{\rho=1} = \left| \Psi' - \mu \frac{\Psi}{\rho} \right|_{\rho=1} = 0$

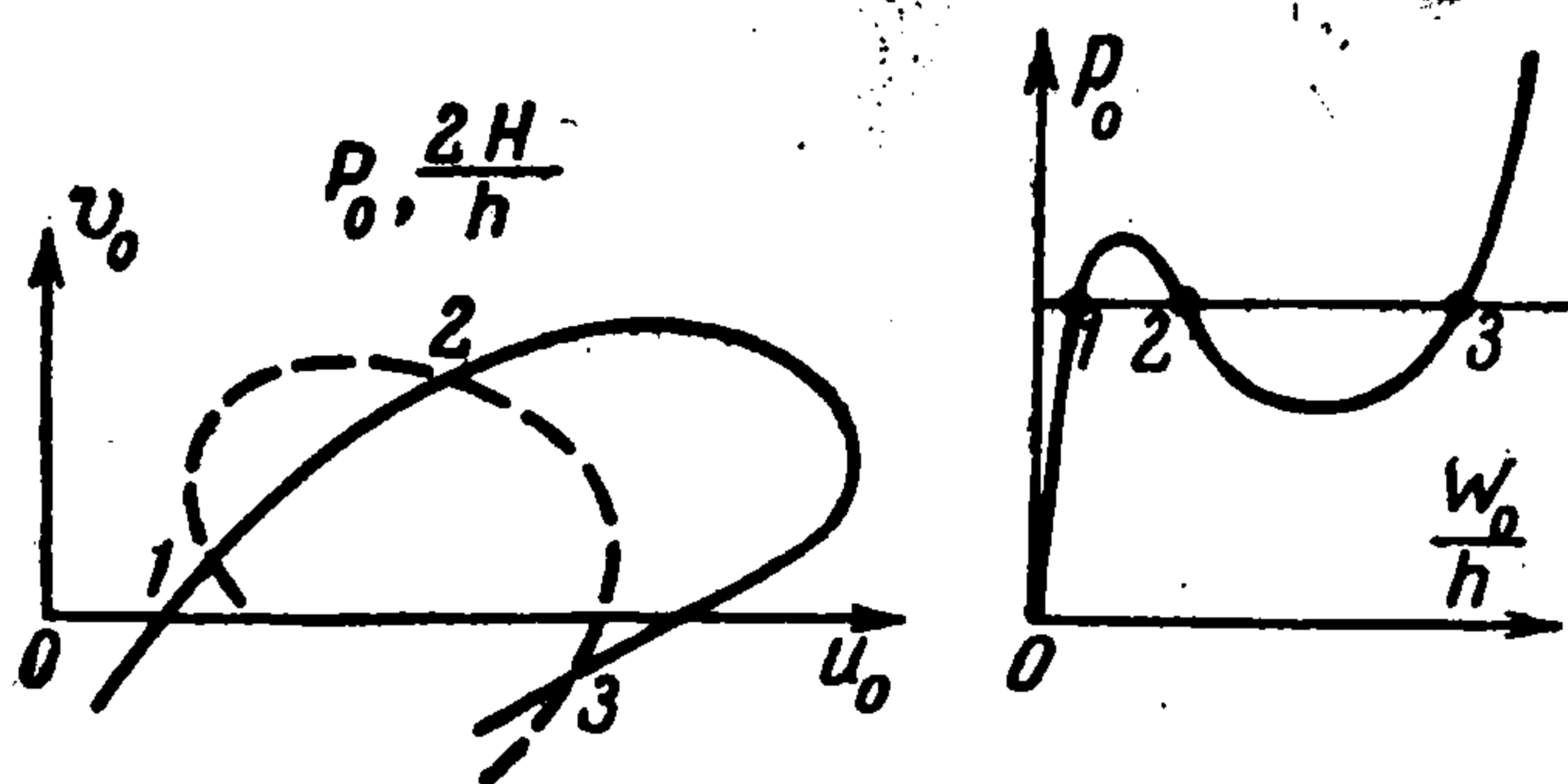


Фиг. 1

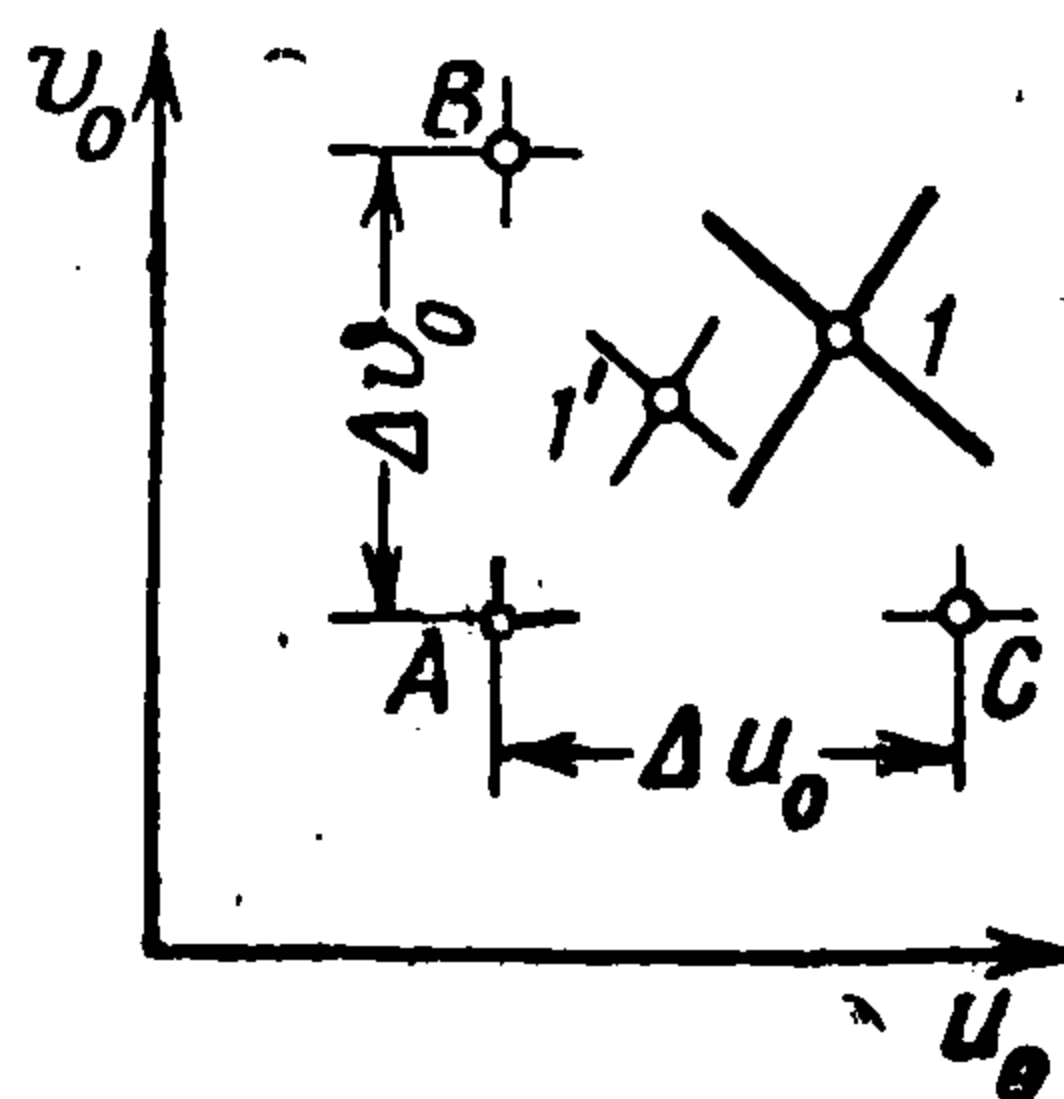
Последнее условие соответствует запрещению радиального перемещения.

Для того чтобы эти условия выполнялись, необходимо соответствующим образом подобрать величины u_0 и v_0 , что достигается путем последовательного интегрирования уравнений (1.7) и анализа выходных величин $\Theta_{\rho=1} = \Theta_k$ и $Z_{\rho=1} = Z_k$.

Сначала для общей ориентировки, задаваясь параметрами $2H/h$ и p_0 , проводим многократное интегрирование при различных значениях u_0 и v_0 и на плоскости u_0v_0 получаем две кривые (фиг. 2). Одна кривая соответствует тем значениям u_0 и v_0 , для которых соблюдается первое граничное условие ($\Theta_k = 0$); вторая кривая соответствует условию $Z_k = 0$. Точки пересечения кривых дают искомые значения u_0 и v_0 . Число точек пересечения равно числу форм равновесия при заданном давлении p_0 . На фиг. 2 цифрами 1, 2 и 3 отмечены соответствующие точки на плоскостях переменных u_0 , v_0 и $p_0, w_0/h$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Уточнение значений u_0 и v_0 для каждой формы равновесия легко осуществляется путем последовательной линейной интерполяции.

Располагаем вблизи, например, точки 1 три произвольно взятые точки A, B и C (фиг. 3) и, проводя интегрирование уравнений (1.7), находим для каждой из этих точек Θ_k и Z_k . По трем значениям Θ_k и трем значениям Z_k строятся две плоскости $\Theta_k = \Theta_k(u_0, v_0)$ и $Z_k = Z_k(u_0, v_0)$. Точка пересечения плоскостей Θ_k и Z_k с координатной плоскостью дает первое приближение I' для искомой точки 1. Далее, совмещая точку A с точкой I' и уменьшая Δu_0 и Δv_0 в несколько раз, продолжаем процесс приближений до тех пор, пока разность координат в двух последующих приближениях не станет меньше заданной величины.

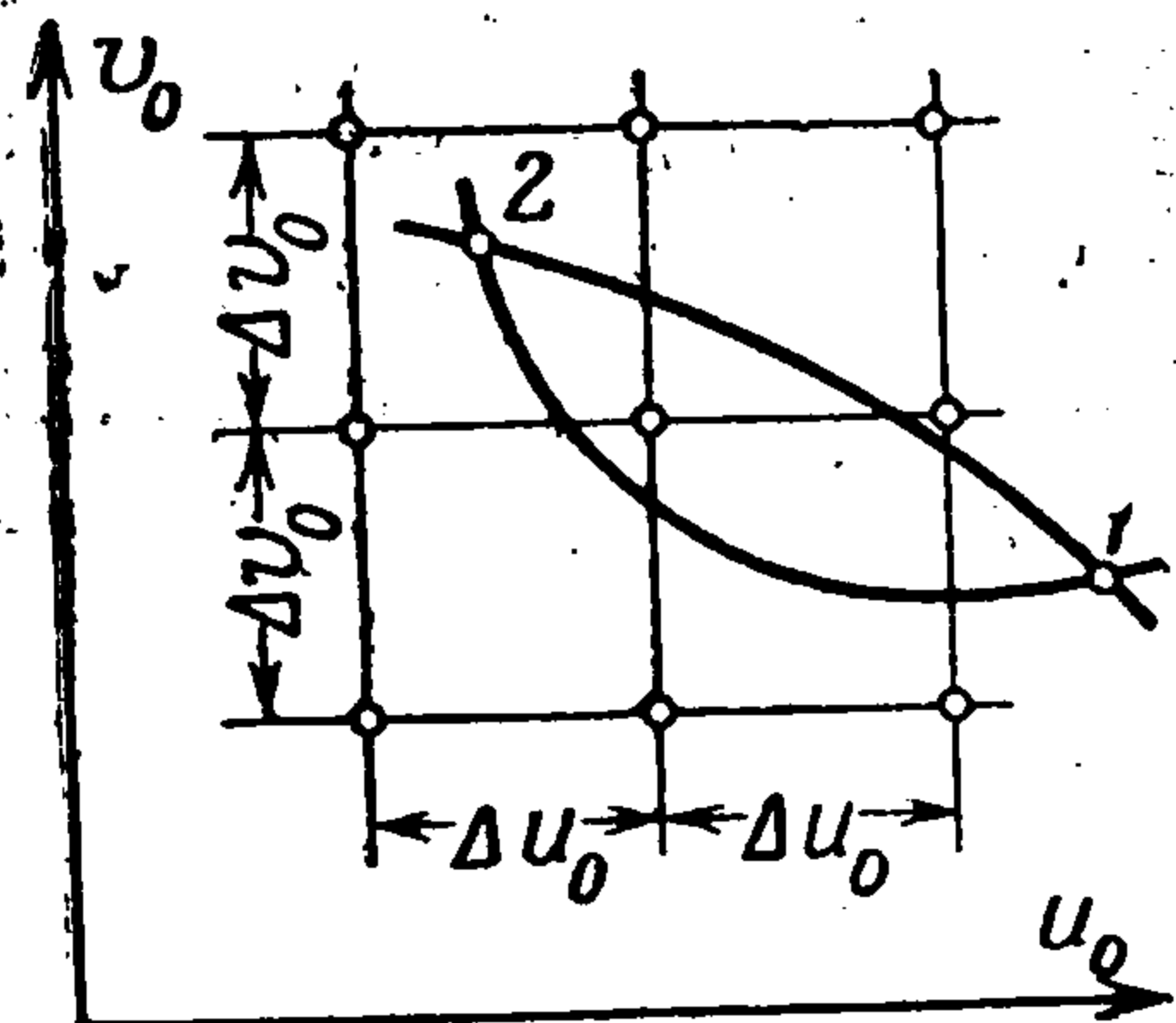
В произведенных вычислениях эта разность была взята равной 0.0001, что составляет в среднем 0.01% от соответствующих значений u_0 и v_0 . Шаг интегрирования при предварительных поисках принимался равным 0.01, а при уточненных он был равен 0.001. На краю пластинки, где имеет место резкое изменение кривизны, шаг уменьшался до 0.0001. Дальнейшее уменьшение шага практического значения не имеет.

С тем чтобы избежать громоздкого обзора плоскости u_0v_0 , точка 1 определялась последовательно для различных значений p_0 , начиная с $p_0 = 0$.

При изменении p_0 точка 1 смещается. Если параметру p_0 сообщить сравнительно небольшое приращение, то точка 1 сместится не сильно и сохраняется возможность путем описанной выше линейной интерполяции держать ее постоянно в поле зрения. Таким образом определяется траектория движений точек 1, 2 и 3 на плоскости u_0v_0 в зависимости от p_0 .

Вблизи критических состояний точки 1 и 2 (или 2 и 3) сближаются, а затем становятся кратными. Линейная интерполяция здесь не приносит успеха. Поэтому применялась квадратичная интерполяция. В зоне близко расположенных точек 1 и 2 (или 2 и 3) устанавливалась «ловушка»

из девяти точек (фиг. 4). Кривые $\Theta_k = 0$ и $Z_k = 0$ представляются как квадратные параболы. Варьируя не только величинами u_0 и v_0 , но и параметром p_0 , можно из условия кратности корней определить верхнее и нижнее критические давления.



Фиг. 4

Найденные траектории движения точек по плоскости u_0v_0 показаны на фиг. 5, а зависимость между давлением p_0 и прогибом w_0/h представлена на фиг. 6.

Варьируя параметром $2H/h$ и соответственно перемещая по плоскости u_0v_0 «девятиточечную ловушку», определяем зависимость критического давления от высоты купола (фиг. 7).

Когда работа находилась в стадии завершения, появилась статья [2], в которой дано решение той же задачи, но при помощи другого алгоритма. Результаты полностью совпали.

2. Отметим следующую наиболее существенную особенность, характерную для большинства задач подобного класса. Обнаруживается, что при больших прогибах форма упругой поверхности оболочки подвержена глубоким изменениям, которые при решении задачи вариационными методами не могут быть учтены только одним или двумя параметрами, вводимыми в аппроксимирующие функции.

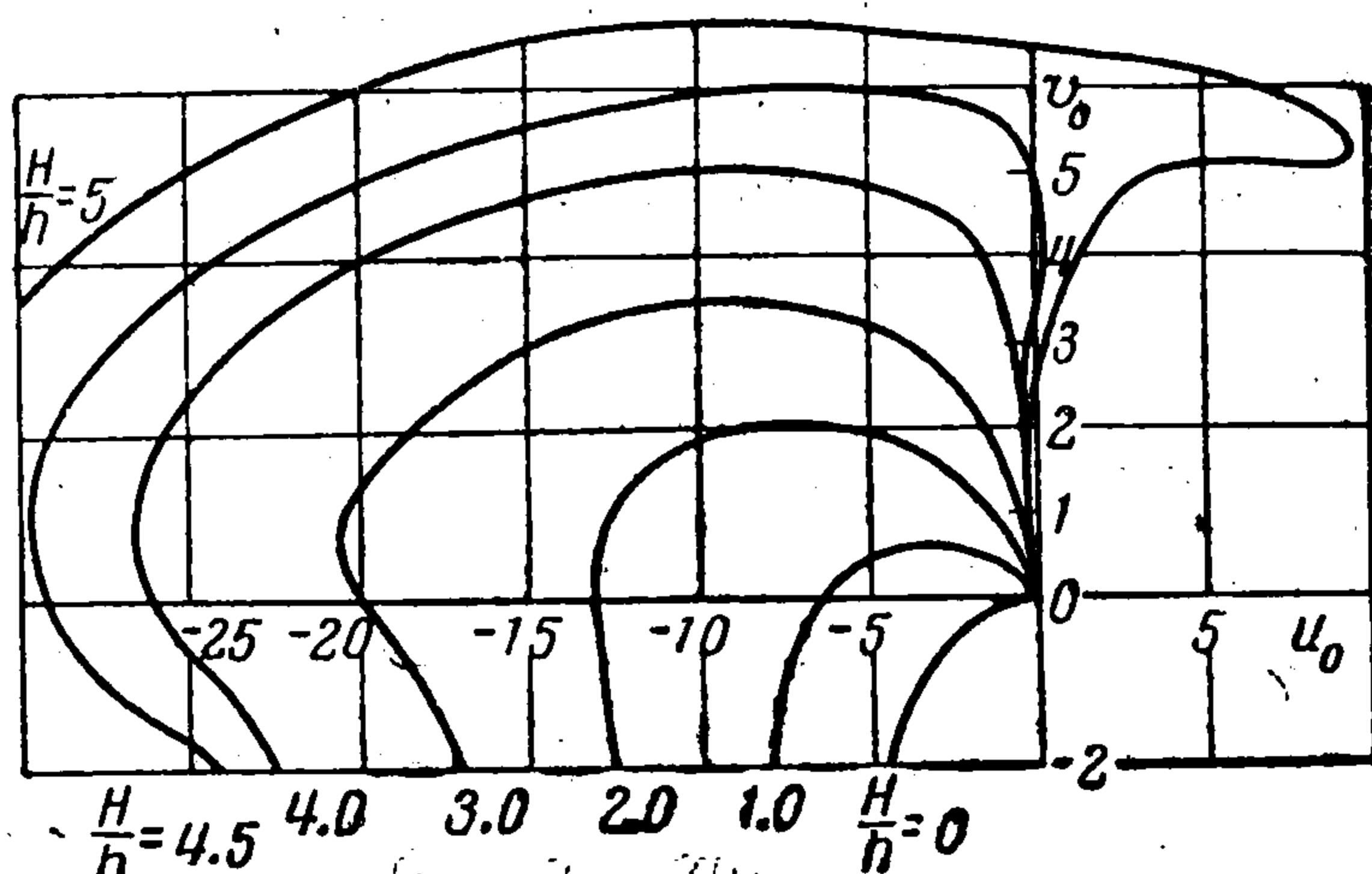
Действительно, для сферического пологого купола естественной является попытка задать в первом приближении закон изменения прогибов таким же, как и для круглой пластинки

$$\frac{w}{h} = C(1 - \rho^2)^2 \quad (2.1)$$

где C является единственным варьируемым параметром.

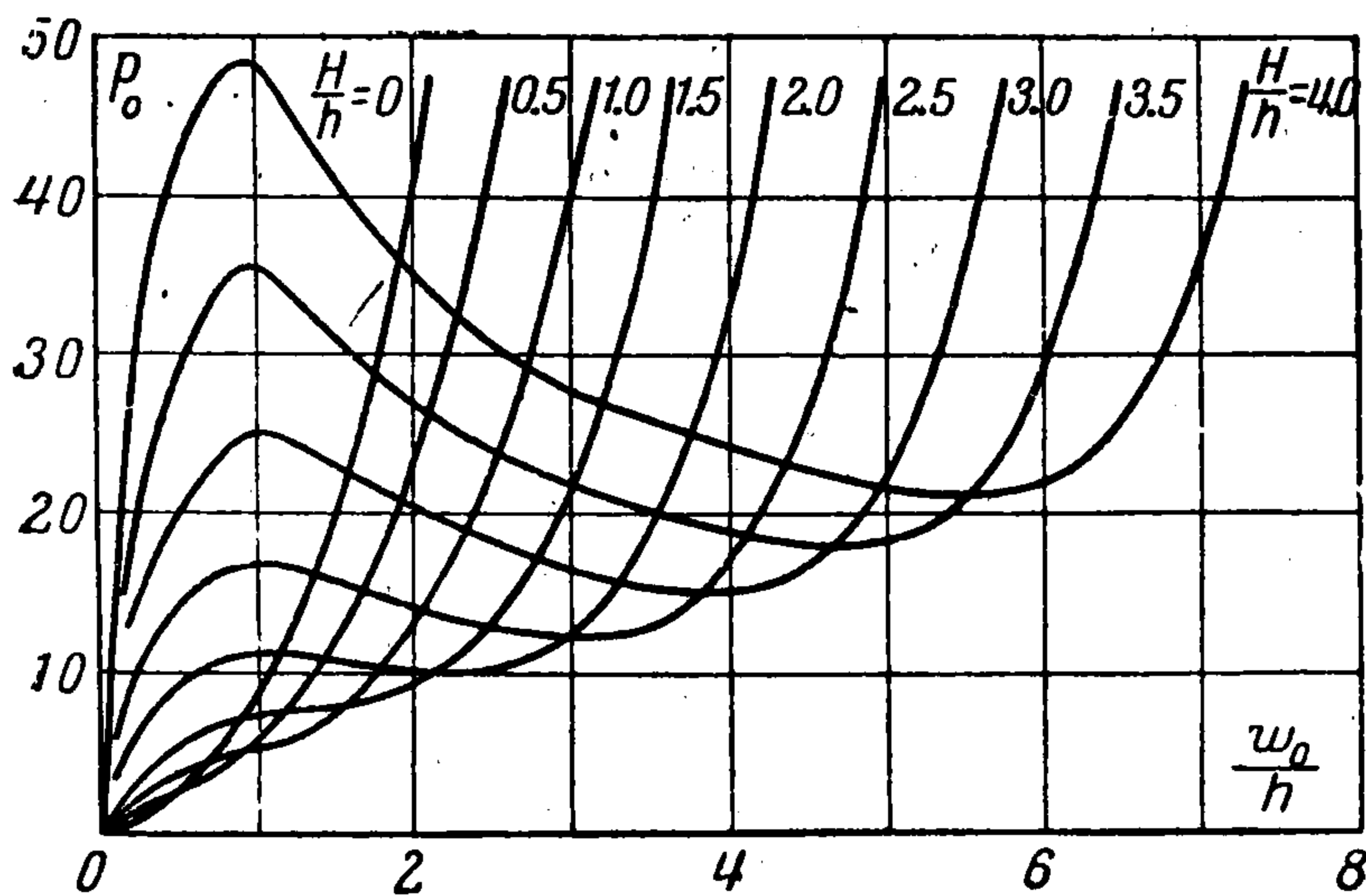
Воспользовавшись энергетическим методом или методом Галеркина, легко получить обычную критическую зависимость между давлением и прогибом. Сопоставление кривых (фиг. 8), полученных ранее в работе [3], с результатами численного решения (сплошные кривые на фиг. 8) показывает, что в данном случае варьирование одним параметром дает достаточно высокую точность лишь для купола, имеющего сравнительно небольшую высоту H . Уже при высоте $H = 4h$ расхождение в величинах критических давлений оказывается настолько существенным, что приближенное решение теряет свою силу.

Указанное расхождение находит свое объяснение в том, что функция (2.1) не отражает действительной формы упругой поверхности оболочки. Как видно из кривых, приведенных на фиг. 5, при высоте купола



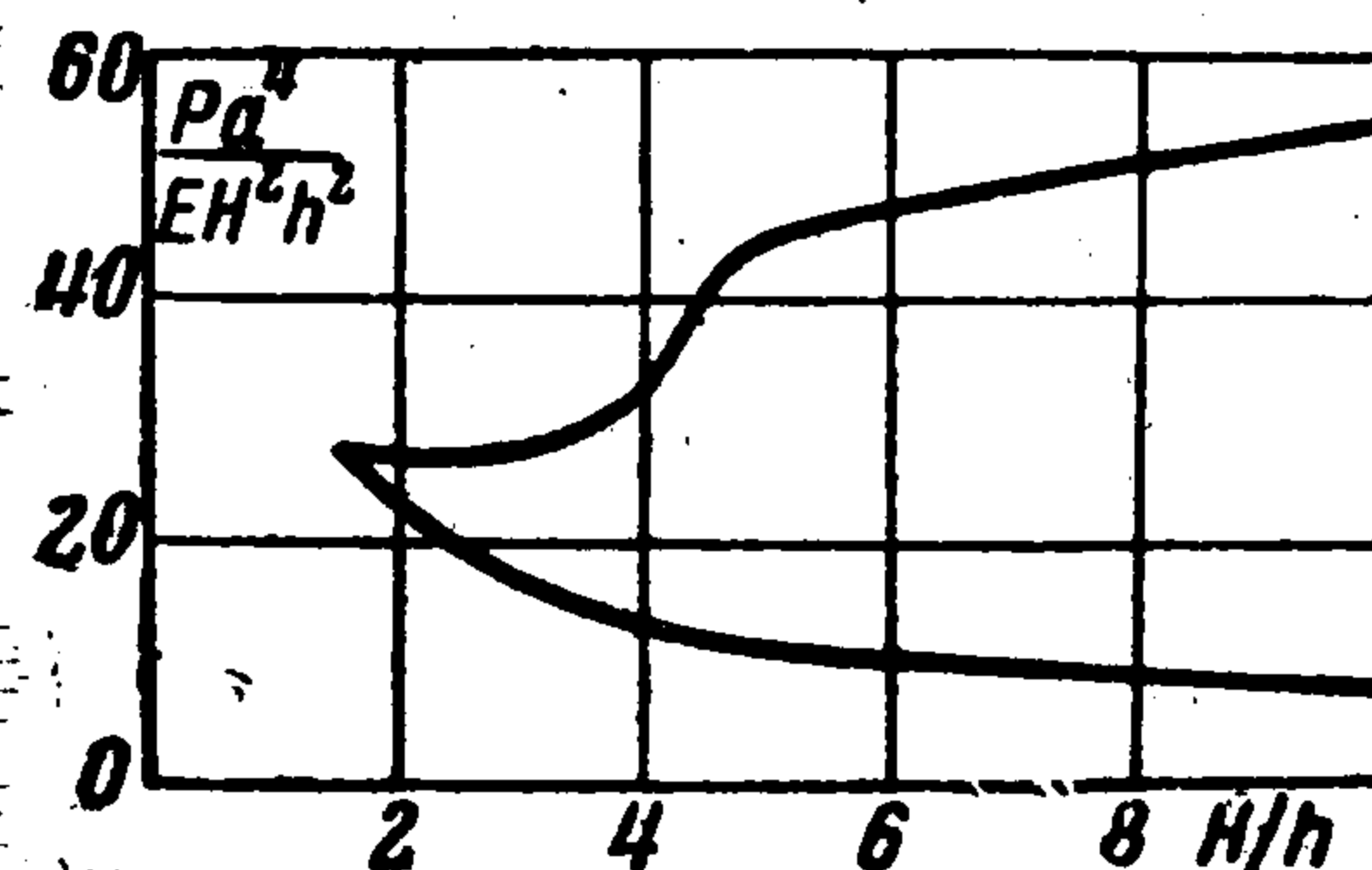
Фиг. 5

$H > 4.5h$ величина w_0 принимает положительные значения. Это значит, что на первой стадии нагружения кривизна купола в центре увеличивается и упругая линия дуги меридиана (фиг. 9) принимает форму кривой *a*, сильно отличающейся от кривой *б*, задаваемой выражением (2.1). Образование центральной выпуклости находит свое отражение и в ходе кривых (фиг. 10), где дана зависимость между p_0 и w_0/h при сравнительно больших значениях H/h .



Фиг. 6

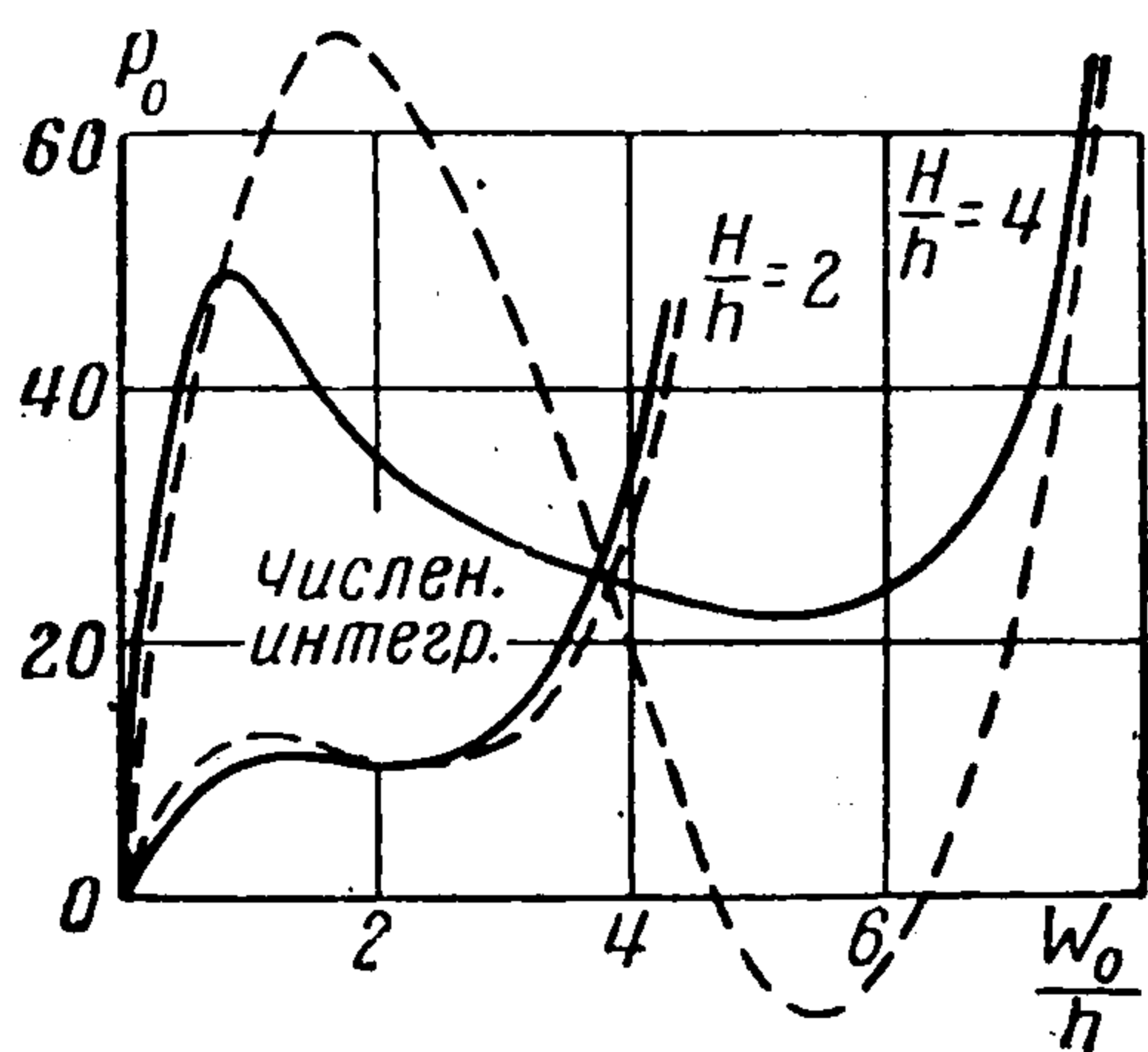
Центр оболочки перемещается вначале по направлению действующего давления, а



Фиг. 7

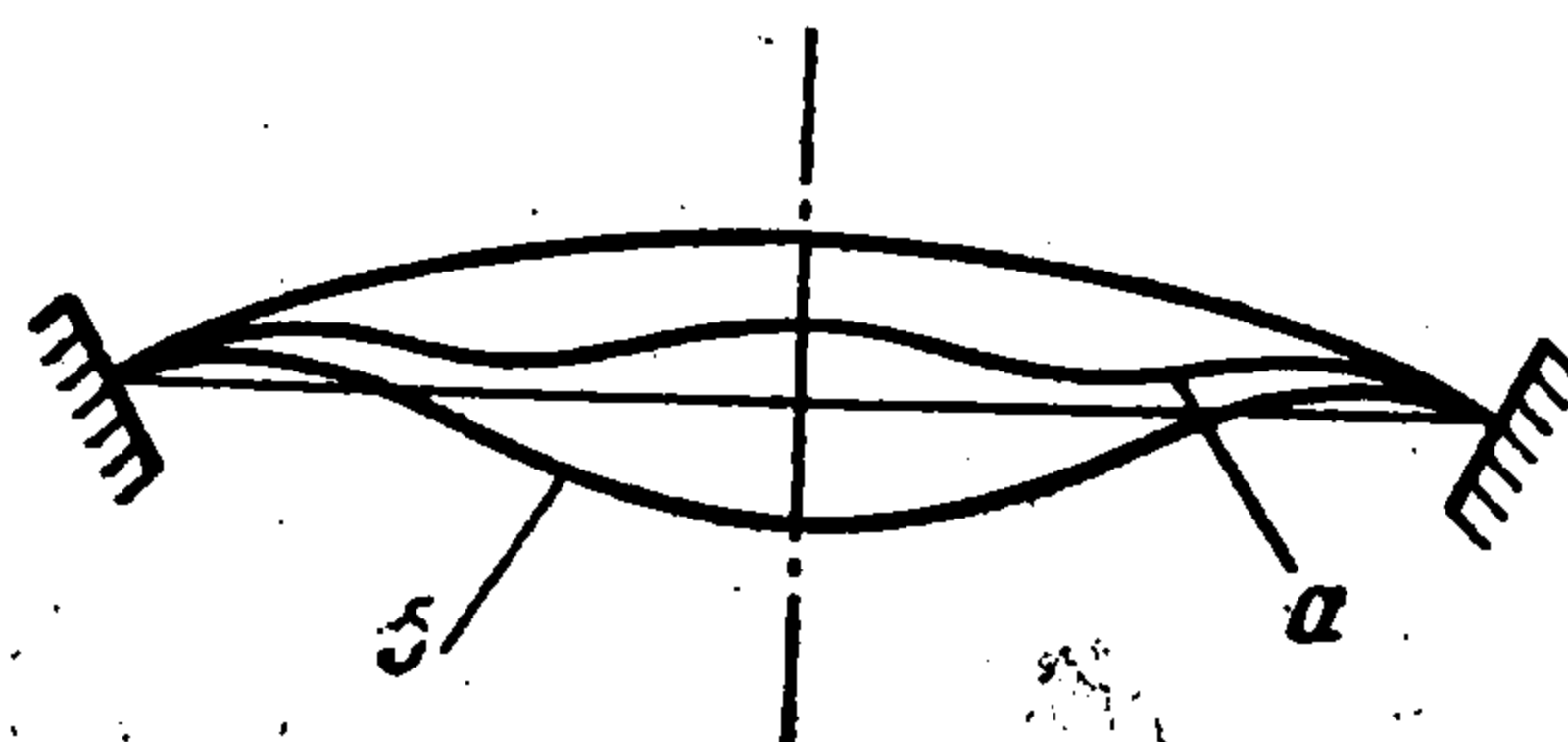
затем имеет место небольшое обратное перемещение. На некотором интервале изменения p_0 существует уже не три, а пять форм равновесия (правая крайняя ветвь на фиг. 10 не показана). При еще больших значениях возможно возникновение новых форм равновесия. Понятно, что все эти особенности не вписываются в схему приближения с одним параметром. Переход же к большему числу параметров наталкивается на непреодолимые вычислительные трудности.

В рассмотренном примере нет надобности прибегать к последующим приближениям, и, вообще, к приближенному решению, так как имеется точное. Но на числовое решение подобного типа задач можно рассчитывать только в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время как анализ большинства наиболее важных



Фиг. 8

и интересных задач устойчивости оболочек сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных, где применение цифровых машин является неэффективным.



Фиг. 9

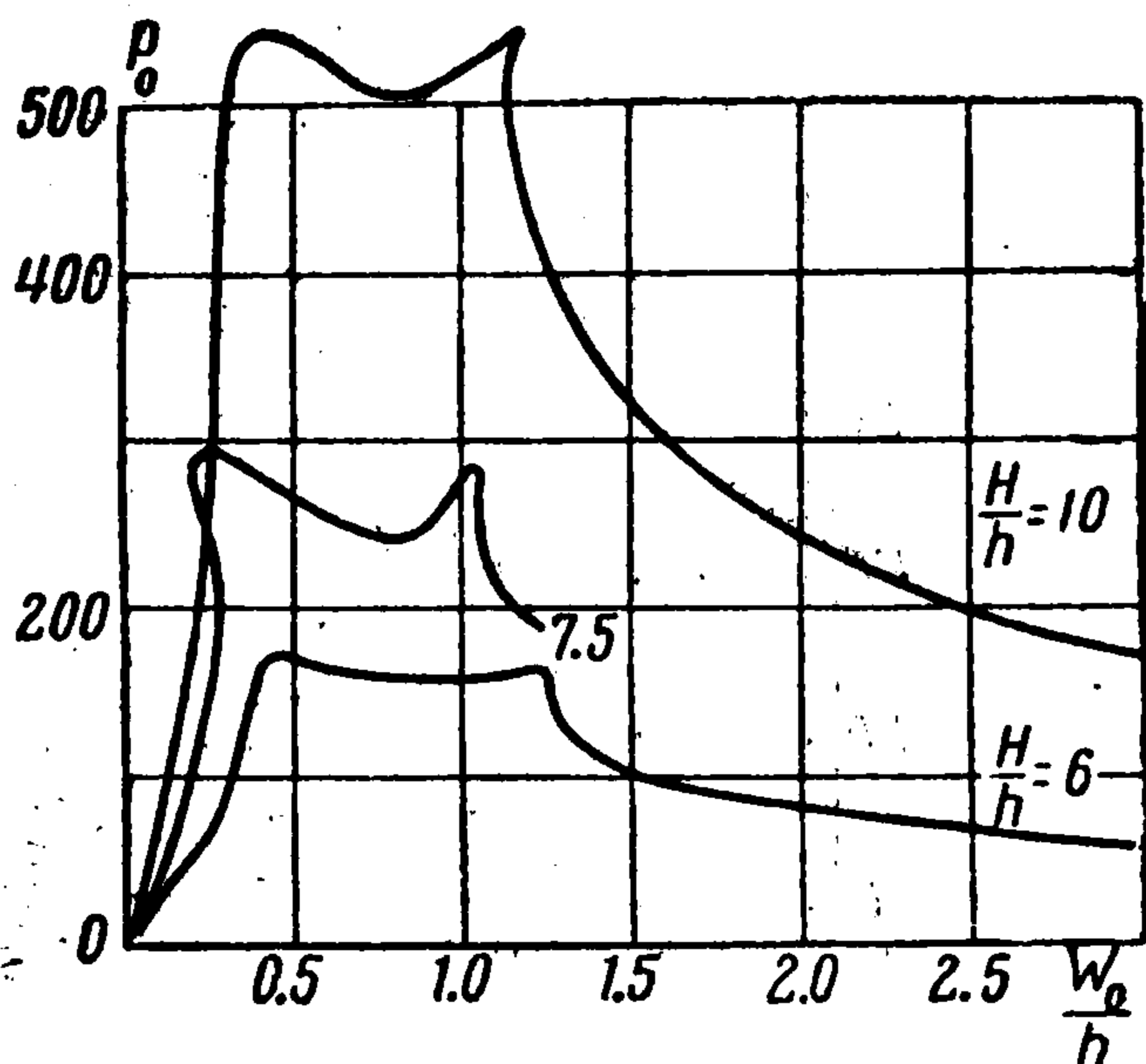
Возникает вопрос, что делать в более сложных случаях. В частности, как подойти к решению той же задачи о сферическом куполе, но при условии несимметричных форм потери устойчивости.

К настоящему времени во многих работах сделана попытка при решении задач вариационным методом использовать цифровую машину и при ее помощи увеличить число варьируемых параметров. Таким образом сохраняется обычный подход, но вычислительные возможности исследователя расширяются.

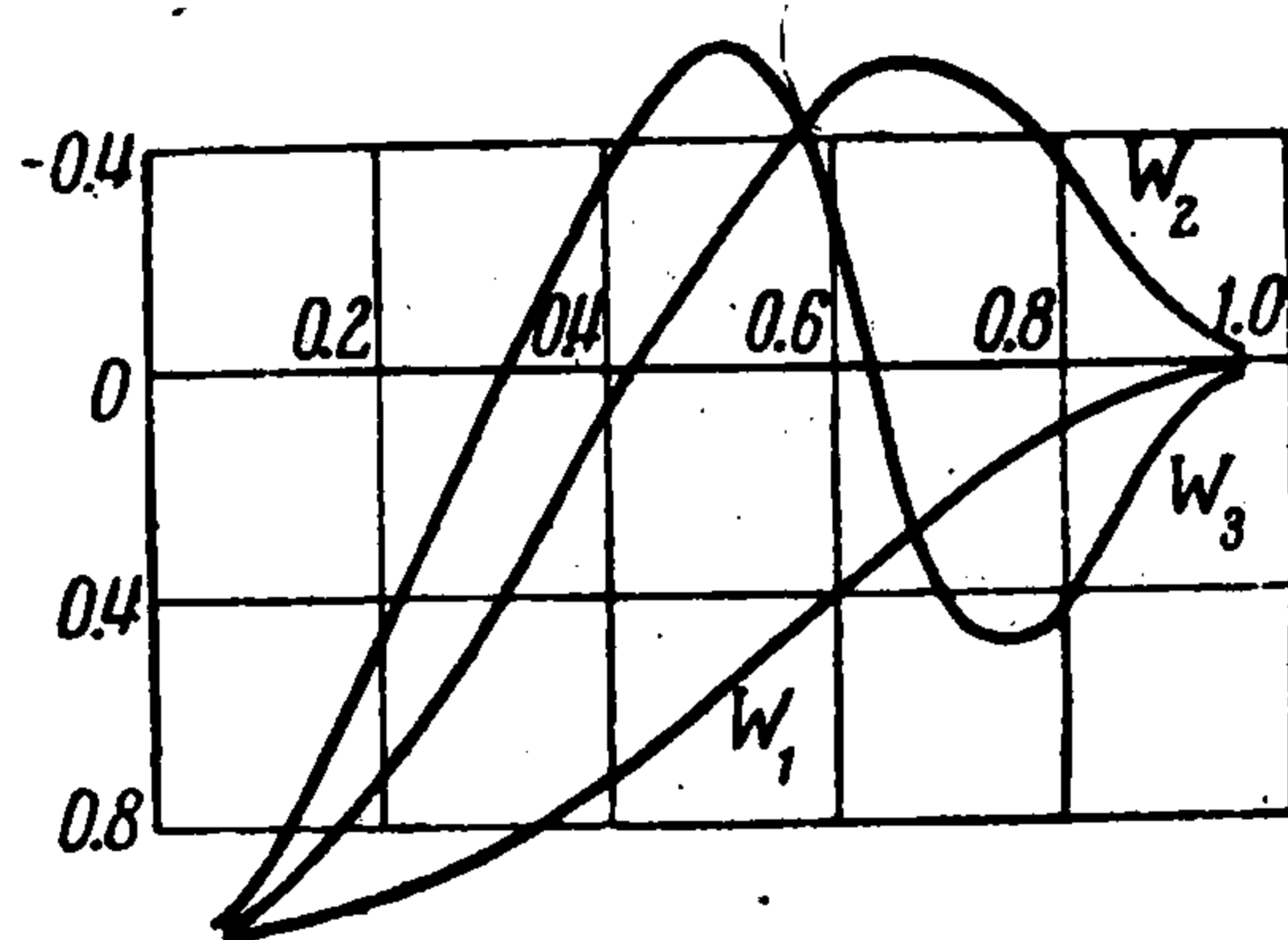
Такой метод, однако, не дает ощутимых результатов. Решение сводится опять же к системе сложных нелинейных алгебраических уравнений. Составление алгоритма для их решения (с учетом неоднозначности) представляет зачастую совершенно неразрешимую задачу.

Более целесообразным при решении подобных задач будет анализ процесса во времени. Введение еще одного независимого переменного (времени) для исследования статически нагруженных систем, как это ни парадоксально, приводит при правильном использовании вычислительной техники не к усложнению, а к упрощению задачи.

Вернемся снова к пологому сферическому куполу и на его примере поясним сказанное.



Фиг. 10



Фиг. 11

3. Ограничимся по-прежнему (для простоты) симметричными формами деформированной оболочки и перепишем уравнения (1.2), вводя в них силы инерции и члены с линейным затуханием

$$\rho \Psi'' + \Psi' - \frac{\Psi}{\rho} = \Theta \left(\frac{2H}{h} \rho + \frac{1}{2} \Theta \right) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \Theta'' + \Theta' - \frac{\Theta}{\rho} = & -12(1 - \mu^2) \Psi \left(\frac{2H}{h} \rho + \Theta \right) + 6(1 - \mu^2) \rho_0 \rho^2 + 1 \\ & + \kappa \int_0^{\rho} \dot{W} \rho d\rho + 12(1 - \mu^2) \int_0^{\rho} \ddot{W} \rho d\rho \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\tau = t \sqrt{\frac{gE}{\gamma a^2}} \quad (3.3)$$

Здесь $W = w / \rho$ представляет собой безразмерное осевое перемещение, κ — некоторый неопределенный пока коэффициент затухания, γ — удельный вес материала оболочки. Точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ . Примем, что

$$W = A_1 W_1 + A_2 W_2 + A_3 W_3 \quad (3.4)$$

где A_1, A_2, A_3 — параметры, зависящие от времени

$$\begin{aligned} W_1 &= (1 - \rho^2)^2, & W_2 &= (1 - \rho^2)^2(1 - 6\rho^2) \\ W_3 &= (1 - \rho^2)^2(1 - 14\rho^2 + 28\rho^4) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Соответствующие этим функциям кривые показаны на фиг. 11. Функция Θ определяется как производная от W , т. е.

$$\begin{aligned} \Theta &= A_1 \Theta_1 + A_2 \Theta_2 + A_3 \Theta_3 \\ \Theta_1 &= 4(-\rho + \rho^3), & \Theta_2 &= 4(-4\rho + 13\rho^3 - 9\rho^5) \\ \Theta_3 &= 4(-8\rho + 57\rho^3 - 105\rho^5 + 56\rho^7) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.1) находим (3.7)

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{2H}{h} (A_1 \Psi_1 + A_2 \Psi_2 + A_3 \Psi_3) + A_1^2 \Psi_{11} + A_2^2 \Psi_{22} + \\ &\quad + A_3^2 \Psi_{33} + A_1 A_2 \Psi_{12} + A_1 A_3 \Psi_{13} + A_2 A_3 \Psi_{23} \\ \Psi_1 &= 4 \left(a_1 \rho - \frac{1}{8} \rho^3 + \frac{1}{24} \rho^5 \right) \\ \Psi_2 &= 4 \left(a_2 \rho - \frac{1}{2} \rho^3 + \frac{13}{24} \rho^5 - \frac{3}{16} \rho^7 \right) \\ \Psi_3 &= 4 \left(a_3 \rho - \rho^3 + \frac{19}{8} \rho^5 - \frac{35}{16} \rho^7 + \frac{7}{10} \rho^9 \right) \\ \Psi_{11} &= 8 \left(a_{11} \rho + \frac{1}{8} \rho^3 - \frac{1}{12} \rho^5 + \frac{1}{48} \rho^7 \right) \\ \Psi_{22} &= 8 \left(a_{22} \rho + 2\rho^3 - \frac{13}{3} \rho^5 + \frac{241}{48} \rho^7 - \frac{117}{40} \rho^9 + \frac{27}{40} \rho^{11} \right) \\ \Psi_{33} &= 8 \left(a_{33} \rho + 8\rho^3 - 38\rho^5 + \frac{1643}{16} \rho^7 - \frac{6433}{40} \rho^9 + \frac{5803}{40} \rho^{11} - 70\rho^{13} + 14\rho^{15} \right) \\ \Psi_{12} &= 16 \left(a_{12} \rho + \frac{1}{2} \rho^3 - \frac{17}{24} \rho^5 + \frac{11}{24} \rho^7 - \frac{9}{80} \rho^9 \right) \\ \Psi_{13} &= 16 \left(a_{13} \rho + \rho^3 - \frac{65}{24} \rho^5 + \frac{27}{8} \rho^7 - \frac{161}{80} \rho^9 + \frac{7}{15} \rho^{11} \right) \\ \Psi_{23} &= 16 \left(a_{23} \rho + 4\rho^3 - \frac{83}{6} \rho^5 + \frac{411}{16} \rho^7 - \frac{1051}{40} \rho^9 + \frac{1673}{120} \rho^{11} - 3\rho^{13} \right) \end{aligned}$$

Постоянные $a_1, a_2, a_3, a_{11}, \dots$, подбираются из условия

$$\left| \Psi' - \mu \frac{\Psi}{\rho} \right|_{\rho=1} = 0$$

Подставляем выражения (3.6) и (3.7) для Θ и Ψ в уравнение (3.2) и, умножая все члены последовательно на Θ_1, Θ_2 и Θ_3 , производим интегрирование по ρ от 0 до 1. В итоге получаем три уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 + \kappa \dot{A}_1 + L_1(A_1, A_2, A_3) &= 0 \\ \ddot{A}_2 + \kappa \dot{A}_2 + L_2(A_1, A_2, A_3) &= 0 \\ \ddot{A}_3 + \kappa \dot{A}_3 + L_3(A_1, A_2, A_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

где L_1, L_2 и L_3 представляют собой многочлены третьей степени относительно A_1, A_2 и A_3 .

Например

$$\begin{aligned} L_1(A_1, A_2, A_3) &= -1.6667\rho_0 + 9.76801A_1 - \\ &- 4.88400A_2 + 2.9304A_3 + \left(\frac{2H}{h}\right)^2 (2.03175A_1 - 0.51587A_2 + 0.30952A_3) + \\ &+ \frac{2H}{h} (-6.4286A_1^2 - 8.71428A_2^2 - 14.9619A_3^2 - 4.4286A_1A_2 + 2.3651A_1A_3 - \\ &- 4.88254A_2A_3) + 4.60317A_1^3 + 13.54603A_2^3 - 4.12394A_3^3 + 9.38095A_1^2A_2 - 4.07937A_1^2A_3 + \\ &+ 24.1524A_2^2A_1 + 13.5535A_2^2A_3 + 35.5832A_3^2A_1 + 31.6707A_3^2A_2 + 10.3365A_1A_2A_3 = 0 \end{aligned}$$

Точно так же выглядят выражения для L_2 и L_3 , но числовые коэффициенты имеют другие значения.

Функции W_1, W_2 и W_3 формулы (3.5) построены таким образом, что

$$\int_0^1 \left[\int_0^\rho W_i \rho d\rho \right] \theta_j d\rho = 0 \quad \text{при } i \neq j \quad (3.9)$$

Поэтому в уравнениях (3.8) производные \ddot{A}_1 и \dot{A}_1 входят только в первое уравнение, \ddot{A}_2 и \dot{A}_2 — во второе, а \ddot{A}_3 и \dot{A}_3 — только в третье.

Если бы возникла надобность в четвертом приближении, функцию W_4 следовало бы принять в виде

$$W_4 = (1 - \rho^2)^2 (1 + a\rho^2 + b\rho^4 + c\rho^6)$$

и постоянные a , b и c подобрать в соответствии с условием ортогональности (3.9).

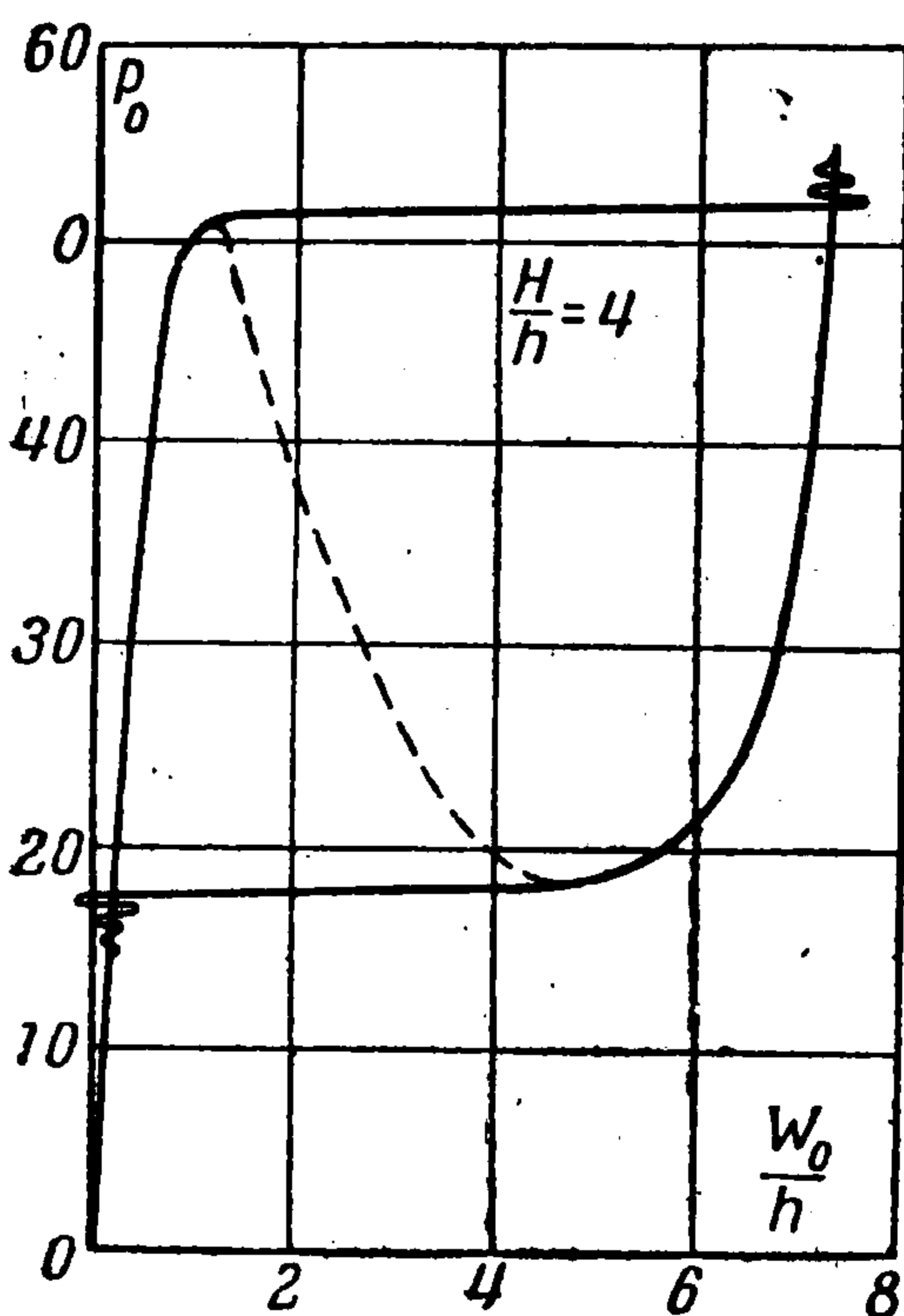
Наиболее трудоемкой операцией является вычисление коэффициентов для многочленов L_1 , L_2 и L_3 . Эта часть работы, однако, легко перекладывается на машину. Поэтому в рассматриваемой задаче число параметров A_i могло быть увеличено.

Переходим к интегрированию уравнений (3.8). Обозначим

$$\dot{A}_1 = u_1, \quad \dot{A}_2 = u_2, \quad \dot{A}_3 = u_3$$

$$\text{Тогда} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= u_1 \Delta \tau, & \Delta A_2 &= u_2 \Delta \tau, \\ \Delta A_3 &= u_3 \Delta \tau, & \Delta u_1 &= (-\kappa u_1 - L_1) \Delta \tau \\ & & \Delta u_2 &= (-\kappa u_2 - L_2) \Delta \tau \\ & & \Delta u_3 &= (-\kappa u_3 - L_3) \Delta \tau \end{aligned}$$



Фиг. 12

Далее полагаем, что p_0 есть заданная функция времени. Примем $p_0 = K\tau$, где K — постоянная величина, выбранная для данной задачи достаточно малой для того, чтобы нагружение можно было бы рассматривать как статическое.

Вопрос о выборе K и $\Delta \tau$ решается на основе порядковой оценки периода собственных колебаний оболочки. Такую оценку легко дать, если отбросить в выражениях L_1 , L_2 и L_3 нелинейные слагаемые.

В расчетах было принято $K = 1$, $\Delta \tau = 0.001$.

В начальный момент времени (при $\tau = 0$)

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

Далее, из уравнений (3.10) вычисляем последовательно

$$\Delta A_1, \quad \Delta A_2, \quad \Delta A_3, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \quad \Delta u_3 \text{ и т. д.}$$

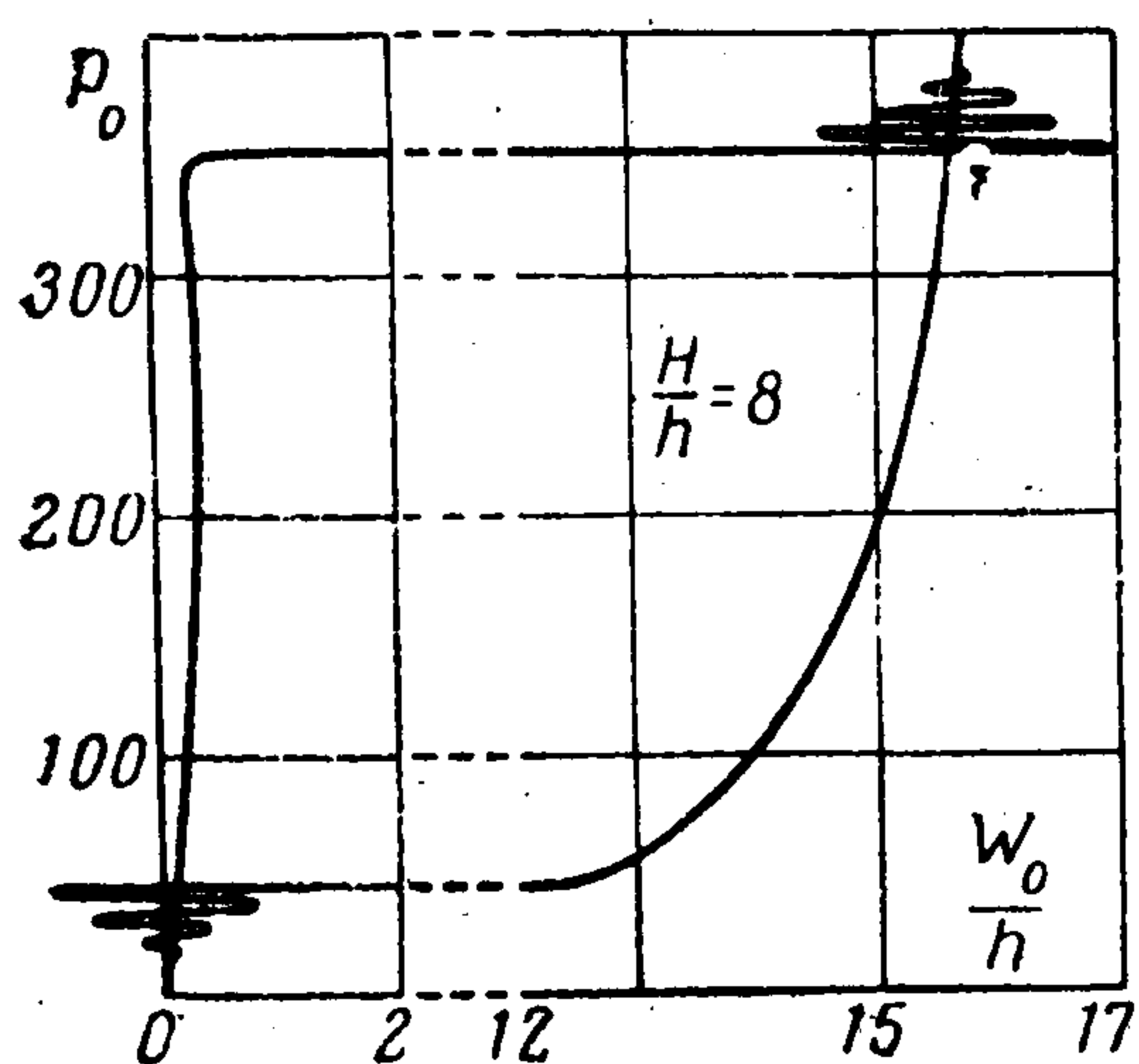
и строим зависимость между давлением и прогибом. Эта зависимость для $H/h = 4$ и $H/h = 8$ показана на фиг. 12 и 13.

При первом критическом давлении происходит быстрое нарастание прогиба (хлопок), сопровождающееся колебаниями около нового положения равновесия. Для более полного изображения физической стороны явления в уравнения введено линейное затухание. Коэффициент затухания κ был выбран из соображений наглядности не слишком большим,

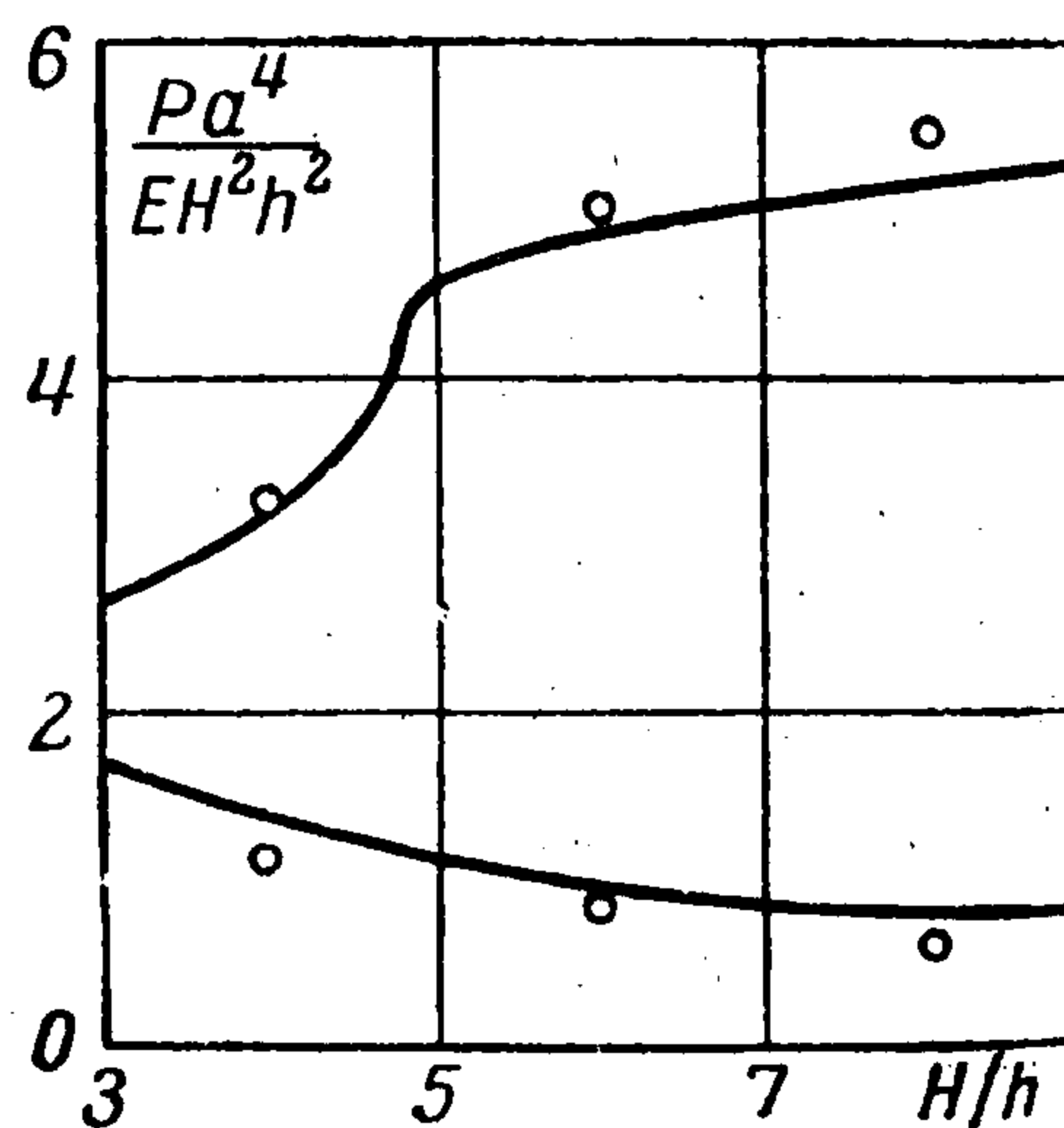
чтобы процесс сохранял колебательный характер, и не слишком малым, чтобы затухание происходило достаточно быстро. В расчетах было принято $\kappa = 3$.

При разрузке происходит обратный хлопок, также сопровождающийся колебаниями.

Уравнения (3.8) были проинтегрированы при значениях $H/h = 4, 6$ и 8 . Найденные критические давления отмечены точками на графике фиг. 14. Там же для сравнения показаны участки кривых, снятых с графика фиг. 7. Как видим, введение трех параметров обеспечивает достаточную точность определения критических давлений.



Фиг. 13



Фиг. 14

4. Вернемся к вопросу общей оценки предложенного метода.

Вводя фактор времени, приходим к однозначности, определяемой историей процесса, и нелинейность задачи практически не создает трудностей. Это видно, в частности, на примере численного решения уравнений (3.8).

Если не вводить фактора времени и оставаться на обычных позициях отыскания возможных форм равновесия, то те же самые уравнения (3.8) следует рассматривать иначе. Полагая

$$\ddot{A}_1 = \ddot{A}_2 = \ddot{A}_3 = 0$$

получаем систему кубических уравнений

$$L_1(A_1, A_2, A_3) = 0, \quad L_2(A_1, A_2, A_3) = 0, \quad L_3(A_1, A_2, A_3) = 0$$

которая должна решаться относительно A_1, A_2, A_3 при различных значениях p_0 . Уже при трех параметрах эта задача представляется более чем сложной. При увеличении числа параметров A_1, A_2, A_3 трудности progressively возрастают.

Предложенный метод от этого недостатка свободен. Введение последующих членов разложения здесь приводит лишь к увеличению подготовительной работы, но не касается численного решения уравнений движения, так как машина с операцией интегрирования легко справляется, независимо от того, сколько введено варьируемых параметров.

В рассмотренном методе на машину возлагается выполнение задач, не требующих большого машинного времени: вычисление коэффициентов при подготовке уравнений и интегрирование уравнений с начальными условиями. Наиболее же трудная для машины краевая задача решается вариационным методом.

Область возможного применения метода, видимо, достаточно широка. Сюда могут быть включены задачи, решение которых определяется историей нагружения системы, например, задачи об устойчивости пластически деформируемых тел. Сюда относятся расчеты конструкций, находящихся в условиях непростого нагружения и температурного воздействия, меняющегося во времени. Сюда же, естественно, относятся динамические задачи, решение которых изложенным методом не представляет большего труда, чем решение задач статики. Многозначность решения при этом также заменяется непрерывностью истории развития процесса.

Наконец, большое значение имеет то, что при решении практических задач исследователь заранее не связывает себя каким-либо определенным критерием устойчивости. Поведение конструкции во времени может контролироваться и оцениваться по-разному. При расчете можно в случае необходимости принять за предельное состояние то, при котором появляются пластические деформации, либо при котором быстро начнут нарастать перемещения, либо когда станет снижаться несущая способность и станет падать нагрузка при растущих деформациях и т. д.

Сильные и слабые стороны метода более полно проявятся, естественно, в дальнейшем по мере решения конкретных задач.

Поступила 17 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ, 1945, т. 9, вып. 5, стр. 389.
2. Thurston G. A. A Numerical Solution of the Nonlinear Equations for Axisymmetric Bending of Shallow Spherical Shells, Journal of Applied Mechanics, Dec. 1961, p. 557.
3. Феодосьев В. И. К расчету хлопающей мембраны. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2, стр. 295.