Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

О МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

К. А. Лурье

(Ленинград)

Функционалы от функций многих независимых переменных лежат в основе обширного класса задач математической физики. Детальному исследованию соответствующих вариационных задач посвящено большое число работ. Среди них особое место занимают исследования, обобщающие на этот круг вопросов метод Гамильтона—Якоби интегрирования канонической системы. Классические результаты в этом направлении принадлежат Вольтерра [1,2] и Фреше [3], получившим первые доказательства обобщенной теоремы Якоби; П. Леви в мемуаре [4] дал общее рассмотрение уравнений в функциональных производных, играющих основную роль в обобщенной теории Гамильтона—Якоби. Систематическое изложение этих результатов вместе с рядом других приведено Г. Пранге в его геттингенской диссертации [5].

Классические рассмотрения носят геометрический характер и не выводятся непосредственно из вариационной проблемы для многих неизвестных функций одной независимой переменной. Результаты Пранге несколько отличны в этом отношении, хотя получены они также геометрическим путем. Между тем подобный непосредственный вывод представляется важным с точки зрения приложений к механике непрерывных сред и содержится в предлагаемой работе.

Для простоты будем иметь дело с задачами для одной неизвестной функции двух независимых переменных. Обобщение на случай многих неизвестных функций или большего, чем два числа независимых переменных, по-видимому, не представляет принципиальных затруднений.

1. Каноническая система, соответствующая вариационной задаче. Рассмотрим проблему экстремума функционала

$$I = \iint\limits_G L\,(x,\, y,\, z,\, z_x,\, z_y)\, dxdy \tag{1.1}$$

На функции сравнения наложим условие

$$z^\circ = f\,(s) \quad \text{на границе } \Gamma \text{ области } G \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс $^\circ$ означает значение на границе. Введем условия

$$\frac{\partial z}{\partial x} - z_x = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} - z_y = 0 \tag{1.3}$$

в качестве добавочных и будем трактовать (1.1) — (1.3) как задачу с тремя неизвестными функциями z, z_x, z_y. При помощи соответствующих множителей Лагранжа составим функционал этой задачи

$$\iint\limits_G \left[L + p\left(\frac{\partial z}{\partial x} - z_x\right) + q\left(\frac{\partial z}{\partial y} - z_y\right)\right] dxdy - \int\limits_\Gamma \rho\,(s)\ \ [z^\circ - f\,(s)]\, ds \tag{1.4}$$

Уравнения Эйлера имеют вид

$$L_{z_x} - p = 0, \qquad L_{z_y} - q = 0, \qquad L_z - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - z_x = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} - z_y = 0 \tag{1.6}$$

Естественное граничное условие

$$p^\circ \frac{\partial x}{\partial n} + q^\circ \frac{\partial y}{\partial n} - \rho = 0 \tag{1.7}$$

получается из (1.4) интегрированием по частям.

Выбирая те или иные из соотношений (1.5), (1.6), (1.7) в качестве добавочных условий, будем получать различные преобразования вариационной задачи. Взяв условия (1.6) добавочными, придем обратно к задаче (1.1) — (1.3). Добавление второго из условий (1.5) и первого из (1.6) приводит к каноническим уравнениям [5]

$$\frac{\partial z}{\partial y} = H_q, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = -H_z + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial z_x} \tag{1.8}$$

или, пользуясь обозначением функциональной производной

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\delta N}{\delta q}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\delta N}{\delta z} \tag{1.9}$$

Чтобы получить эти уравнения, введем обозначение

$$qz_y - L(x, y, z_x, z_y) = H(x, y, z, z_x, q) \tag{1.10}$$

т. е. совершим преобразование Лежандра по аргументу z_y.

Двойной интеграл в выражении (1.4) теперь примет вид

$$\iint\limits_G \left[q\frac{\partial z}{\partial y} - H(x, y, z, z_x, q)\right] dx\,dy \tag{1.11}$$

Уравнения (1.9) представляют уравнения Эйлера для функционала (1.11) от двух функций z, q или, что то же, уравнения Гамильтона для функционала (1.1). В дальнейшем будем называть систему (1.9) канонической[1]. Для написания канонической системы необходима разрешимость второго из уравнений (1.5) относительно z_y.

Введем для дальнейшего обозначения

$$M[z, z_y] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, z, z_x, z)\,dx, \qquad N[z, q] = \int_{x_0}^{x_1} H(x, y, z, z_x, q)\,dx \tag{1.12}$$

Функционалы M и N связаны соотношением

$$N = -M + \int_{x_0}^{x_1} qz_y dx \tag{1.13}$$

---

1 Выбирая первые два из условий (1.5) в качестве добавочных, можно получить другую форму канонической системы, а именно

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \Phi_p = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} - \Phi_q = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \Phi_z = 0$$

$$\Phi(x, y, z, p, q) = pz_x + qz_y - L(x, y, z, z_x, z_y), \quad p = L_{z_x}, \qquad q = L_{z_y}$$

Такая форма фигурирует в работах Вольтерра [1,2].

2. Поле функционала (1.1). Пранге [5] определяет поле функционала геометрически. Введем, следуя И. М. Гельфанду и С. В. Фомину [6], другое определение, используя понятия самосопряженных и согласованных граничных условий.

Граничные условия рассматриваемой вариационной задачи могут быть заданы различным образом. Особый интерес представляют граничные условия, определяемые самим основным функционалом, притом следующим образом. Пусть $S = S\ [z;\ y]$ — функционал, z—функциональный аргумент, y играет роль параметра.

Рассмотрим вариационную задачу для функционала

$$\iint\limits_G L\,(x, y, z, z_x, z_y)\,dxdy - S^{(1)}\,[z;\ a] + S^{(2)}[z;\ b] \tag{2.1}$$

не накладывая на функции сравнения никаких дополнительных условий. Функционалы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, вообще говоря, различны. Естественными граничными условиями этой задачи будут

$$\frac{\delta M}{\delta z_y} - \frac{\delta S^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{y=a} = 0, \qquad \frac{\delta M}{\delta z_y} - \frac{\delta S^{(2)}}{\delta z}\bigg|_{y=b} = 0 \tag{2.2}$$

Вместо $\delta M / \delta z_y$ напишем $q\ (x, y,\ z,\ z_x,\ z_y)$ согласно второму условию (1.5) и, кроме того, будем писать S вместо $S^{(1)}$, рассматривая условия на одном конце

$$q\ (x,\ y,\ z,\ z_x,\ z_y) = \frac{\delta S}{\delta z}\bigg|_{y=a} \tag{2.3}$$

Это условие задает в каждой точке x прямой $y = a$ величину $z_y\ (x,\ a)$ пропорциональную соответствующему направляющему косинусу нормали к интегральной поверхности $z = z\,(x,\ y)$. Удобно записать (2.3) так

$$z_y\ (x,\ a) = \Psi\ [z] \tag{2.4}$$

где $\Psi\ [z]$ — некоторый функционал.

Следующие ниже в этом пункте определения и теоремы представляют буквальное обобщение соответствующих фактов вариационного исчисления с одной независимой переменной, изложенных в работе [6]. Для полноты мы сочли нужным привести их с подробными доказательствами, которые, конечно, получатся из соответствующих рассуждений [6] формальным переходом к пределу бесконечного числа неизвестных функций.

Определение 2.1. Граничные условия (2.4), присоединяемые к функционалу (1.1), называются самосопряженными, если существует такой функционал $S\ [z;\ y]$, что

$$\frac{\delta M\ [z,\ \Psi\ [z]]}{\delta z_y} \equiv \frac{\delta S}{\delta z}\bigg|_{y=a} \tag{2.5}$$

Справедлива теорема, аналогичная теореме 1 ([6], стр. 137).

Теорема 2.1. Чтобы граничные условия (2.3) были самосопряженными на прямой $y = a$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\delta q\ (x,\ a,\ z\,(x,\ a),\ z_x\,(x,\ a),\ \Psi\,[z\,(x,\ a)])}{\delta z\ (x_2,\ a)}\bigg|_{x=x_1} = \\ = \frac{\delta q\,(x,\ a,\ z\,(x,\ a),\ z_x\,(x,\ a),\ \Psi\ [z\,(x,\ a)])}{\delta z\,(x_1,\ a)}\bigg|_{x=x_2} \tag{2.6}$$

Доказательство. Необходимость. Самосопряженные граничные условия определяются равенством (2.3). Взяв его при $x = x_1$ и варьируя по $z(x_2, a)$, и наоборот, фиксируя $x = x_2$ и варьируя по $z(x_1, a)$, получим (2.6), так как правые части обоих результатов при этом будут иметь общей величиной выражение

$$\frac{\delta^2 S}{\delta z(x_1, a)\, \delta z(x_2, a)}$$

Достаточность. Если условия (2.4) влекут за собой (2.6), то существует функционал $S[z]$, функциональная производная которого при $y = a$ совпадает с q. Вариация функционала

$$\iint\limits_G L\,dx\,dy - S\,|_{y=a}$$

приравненная нулю, даст тогда условие (2.3), а это и доказывает самосопряженность.

Определение 2.2. Граничное условие

$$z_y(x) = \Psi^{(1)}[z] \tag{2.7}$$

заданное при $y = a$, и граничное условие

$$z_y(x) = \Psi^{(2)}[z] \tag{2.8}$$

заданное при $y = b$, называются согласованными между собой, если каждое решение системы (1.9), удовлетворяющее при $y = a$ условию (2.7), удовлетворяет при $y = b$ условию (2.8) и обратно.

Определение 2.3. Пусть при всех y $(a \leqslant y \leqslant b)$ заданы граничные условия

$$z_y(x, y) = \Psi[z; y]$$

Эти граничные условия образуют поле функционала (1.1), если:

а) при каждом значении y условия самосопряженны;

б) при любых двух y_1, y_2 из $[a, b]$ условия согласованы между собой.

Пусть самосопряженность граничных условий установлена; каким дополнительным требованиям нужно подчинить эти условия для того, чтобы сделать их согласованными? Другими словами, в каком случае самосопряженные граничные условия образуют поле функционала (1.1)?

Теорема 2.2. Граничные условия

$$\frac{\delta M}{\delta z_y} = \frac{\delta S}{\delta z} \tag{2.9}$$

согласованы, если функционал $S[z; y]$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial y} + \int\limits_{x_0}^{x_1} H\left(x, y, z, z_x, \frac{\delta S}{\delta z}\right) dx = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial S}{\partial y} + N\left[y, z; \frac{\delta S}{\delta z}\right] = 0 \tag{2.10}$$

Это — необходимое и достаточное условие.

Покажем, что в условиях, поставленных этой теоремой, любое многообразие в пространстве (x, y, z), вдоль которого выполняется (2.9), представляет собой интегральную поверхность уравнения Эйлера исходной вариационной задачи[1]. Из равенства (2.9) следует

$$q\,(x,\ y,\ z,\ z_x,\ \Psi\,[z]) = \frac{\delta S}{\delta z}$$

Поэтому уравнение (2.10) переписывается так:

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -N\,[y,\ z;\ q]$$

варьируя последнее равенство по z, найдем[2]

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta S}{\delta z} = -\frac{\delta N\,[y,\ z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z},\quad \text{или}\quad \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\delta N\,[y,\ z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z} \tag{2.11}$$

Отсюда вытекает, что уравнение Эйлера удовлетворяется. Действительно, заменим q в (2.11) на $\sigma M\,[z;\ \Psi\,[z]]\,/\,\delta z_y$, а функционал N выражением (1.13); выполняя указанные в (2.11) действия и учитывая при этом равенство $\delta M\,/\,\delta z_y = \partial L\,/\,\partial z_y$, в результате получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta M}{\delta z_y} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(x,\ y)\,\delta z_y(\xi,\ y)}\,\frac{\partial\Psi\,[z\,(\xi,\ y);\ y]}{\partial y}\,d\xi = \frac{\delta M}{\delta z} + \\ + \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(\xi,\ y)}\,\frac{\delta\Psi\,[z\,(\xi,\ y);\ y]}{\delta z\,(x,\ y)}\,d\xi - \\ - \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta\Psi\,[z\,(\xi,\ y);\ y]}{\delta z\,(x,\ y)}\,\frac{\delta M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(\xi,\ y)}\,d\xi - \int\limits_{x_0}^{x_1}\Psi\,[z\,(\xi,\ y);\ y]\,\frac{\delta^2 M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(\xi,\ y)\,\delta z\,(x,\ y)}\,d\xi\end{gathered} \tag{2.12}$$

Условие самосопряженности (2.9) дает

$$\frac{\delta^2 M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(\xi,\ y)\,\delta z\,(x,\ y)} = \frac{\delta^2 M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(x,\ y)\,\delta z\,(\xi,\ y)}$$

Поэтому равенство (2.12) переписываем так:

$$\begin{gathered}\frac{\delta M}{\delta z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta M}{\delta z_y} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\Psi\,[z\,(\xi,\ y);\ y]\,\frac{\delta^2 M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(x,\ y)\,\delta z\,(\xi,\ y)}\,d\xi + \\ + \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 M\,[z;\ \Psi\,[z]]}{\delta z_y(x,\ y)\,\delta z_y(\xi,\ y)}\,\frac{\partial\Psi\,[z\,(\xi,\ y);\ y]}{\partial y}\,d\xi\end{gathered} \tag{2.13}$$

Так как

$$\frac{\delta^2 M\,[z,\ z_y]}{\delta z\,(\xi,\ y)\,\delta z_y(x,\ y)} = \frac{\delta^2 M}{\delta z_y(x,\ y)\,\delta z\,(\xi,\ y)} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 M}{\delta z_y(x, y)\,\delta z_y(\zeta,\ y)}\,\frac{\delta\Psi\,[z\,(\zeta,\ y);\ y]}{\delta z\,(\xi,\ y)}\,d\zeta$$

---

[1] Уравнение Гамильтона — Якоби может быть традиционным образом получено переходом к «классическому пределу» из уравнения Шредингера квантовой теории поля работы [7].

В последнее время в ряде работ И. С. Аржаных [8–10] была предпринята попытка построения уравнения Гамильтона — Якоби классической теории поля; это уравнение близко к типу, рассмотренному Вольтерра [1,2].

[2] Для функционала N в следующих двух формулах сохраняем старое обозначение.

то (2.13) можно записать в следующем виде

$$\frac{\delta M}{\delta z}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta M}{\delta z_y}+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 M}{\delta z_y(x, y)\,\delta z(\xi, y)}\Psi[z(\xi, y); y]\,d\xi+ \tag{2.14}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 M}{\delta z_y(x, y)\,\delta z_y(\xi, y)}\left[\frac{\partial\Psi[z(\xi, y); y]}{\partial y}+\int_{x_0}^{x_1}\Psi[z(\zeta, y); y]\frac{\delta\Psi[z(\xi, y); y]}{\delta z(\zeta, y)}\,d\zeta\right]d\xi$$

Принимая во внимание условие $z_y = \Psi[z(x, y); y]$ и вытекающее из него равенство

$$z_{yy}=\frac{\partial\Psi[z(x, y); y]}{\partial y}+\int_{x_0}^{x_1}\Psi[z(\zeta, y); y]\frac{\delta\Psi[z(x, y); y]}{\delta z(\zeta, y)}\,d\zeta$$

придадим уравнению (2.14) следующую форму:

$$\frac{\delta M}{\delta z}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta M}{\delta z_y}+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 M}{\delta z_y(x, y)\,\delta z(\xi, y)}z_y(\xi, y)\,d\xi+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 M}{\delta z_y(x, y)\,\delta z_y(\xi, y)}z_{yy}(\xi, y)\,d\xi$$

или

$$\frac{\delta M}{\delta z}-\frac{d}{dy}\frac{\delta M}{\delta z_y}=0 \tag{2.15}$$

Таким образом, получено уравнение Эйлера исходной вариационной задачи, что и доказывает достаточность условия (2.10). Необходимость его подтверждается обратным ходом вычислений.

Глубокая аналогия, существующая между одномерной и многомерной вариационными задачами, проявляется и в том, что теорема Якоби, а вместе с ней и метод Гамильтона — Якоби интегрирования канонической системы допускают естественное распространение на вариационные проблемы для кратных интегралов [1-5].

Как известно, теорема Якоби в ее классической формулировке устанавливает способ получения общего решения канонической системы по известному полному интегралу уравнения Гамильтона — Якоби.

Трактуя систему с бесконечным числом степеней свободы, поведение которой описывается функционалом (1.1), как предельный случай голономной системы с конечным числом (n) степеней свободы (для которой справедлива классическая теорема Якоби), естественно задаться вопросом: что представляет собой в пределе $n = \infty$ полный интеграл классического уравнения Гамильтона — Якоби?

Предельная форма этого уравнения уже получена: это уравнение (2.10). Его решением будет функционал S; этот функционал совпадает с тем, который получен указанным предельным переходом из полного интеграла соответствующей конечномерной задачи; естественно назвать его полным интегралом Леви [4]. Полный интеграл Леви в двумерной вариационной задаче имеет два функциональных аргумента: неизвестную функцию $z(x, y)$ и параметрическую функцию $\alpha(x)$; кроме того, он зависит и от переменной y. В *главном* функционале Леви параметрическая функция совпадает с начальной функцией $z(x, a)$. Следует отметить, что уравнение Гамильтона — Якоби (2.10) имеет подобно классическому множество полных интегралов; здесь мы не будем останавливаться на вопросе об их взаимном выражении. В частности, полный интеграл Леви не всегда имеет функциональным аргументом явно входящую в его запись параметрическую функцию $\alpha(x)$: эта функция может быть представлена в нем, например, бесконечным множеством постоянных. Параметрическая функция появилась в полном функционале в результате предельного перехода от системы постоянных, входивших в полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби конечномерной «аппроксимирующей» задачи. Может случиться, что некоторые из этих постоянных и в пределе останутся «изолированными» постоянными; возникающие здесь возможности лучше всего рассмотреть на примерах.

3. Метод Гамильтона — Якоби. Обобщим известное неравенство для определителя матрицы смешанных производных, характеризующее полный интеграл обычного уравнения Гамильтона — Якоби.

Функционал

$$S\,[z,\alpha;\,y]=\lim_{n\to\infty}S_n\,(z_1,\,\ldots,\,z_n,\,\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n;\,y)$$

дет полным интегралом Леви уравнения (2.10), если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\|\frac{\partial^2 S_n}{\partial z_i\partial\alpha_k}\right\|\right|\neq 0$$

Континуальный аналог этого неравенства представляет собой искомое условие. По существу требуется, чтобы уравнение (3.1) было разрешимо относительно z (см. ниже).

Метод Гамильтона — Якоби интегрирования канонической системы (1.9) основан на том, что справедливо следующее обобщение теоремы Якоби.

Теорема. Пусть $S\,[z,\alpha;\,y]$ — полный интеграл Леви уравнения Гамильтона — Якоби (2.10) и $\beta\,(x)$ — произвольная функция. Тогда функционал $z=z\,[x,y;\,\alpha,\beta]$, определяемый из равенства [1]

$$\frac{\delta S}{\delta\alpha}=\beta \tag{3.1}$$

и функционал

$$q=\frac{\delta S}{\delta z} \tag{3.2}$$

образуют общее решение канонической системы (1.9).

Доказательство следует немедленно, если показать, что на каждой интегральной поверхности

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta S}{\delta\alpha}=0$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta S}{\delta\alpha}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta S}{\delta\alpha}+\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 S}{\delta z\,(\xi,\,y)\,\delta\alpha}\,z_y\,(\xi,\,y)\,d\xi$$

Подставим $S=S\,[z,\alpha;\,y]$ в уравнение (2.10) и проварьируем результат по α; будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta S}{\delta\alpha}=-\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta N}{\delta q\,(\xi,\,y)}\,\frac{\delta^2 S}{\delta z\,(\xi,\,y)\,\delta\alpha}\,d\xi$$

[1] К этой формуле относится замечание, сделанное о параметрической функции на стр. 260.

Подставляя в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\delta S}{\delta \alpha}\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\delta^2 S}{\delta z(\xi,y)\,\delta\alpha}\left[z_y(\xi,y)-\frac{\delta N}{\delta q(\xi,y)}\right]d\xi$$

На интегральной поверхности $z_y = \delta N / \delta q$, откуда

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta S}{\delta\alpha}=0$$

что и требовалось.

Если S — полный интеграл Леви, то уравнение (3.1) можно разрешить относительно z, получив общее решение задачи, зависящее от двух произвольных функций α, β. Уравнение (3.2) определит тогда канонически сопряженный импульс q. Функции α и β определяются начальными условиями.

4. Пример. Рассмотрим в качестве примера простейшую задачу — колебания бесконечной струны.

Уравнение $z_{yy}-z_{xx}=0$ будет уравнением Эйлера функционала

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^y dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,(z_y^2-z_x^2)$$

Будем искать решение задачи Коши $z|_{y=0}=\alpha(x)$, $z_y|_{y=0}=\beta(x)$ методом Гамильтона — Якоби. Функция Гамильтона равна

$$N=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,(z_y^2+z_x^2)$$

уравнение (2.10) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\left[\left(\frac{\delta S}{\delta z}\right)^2+z_x^2\right]=0$$

Конечномерным аналогом является уравнение Гамильтона — Якоби системы упруго связанных осцилляторов, разделенных расстоянием a; функционал $S[z;y]$ заменяется при этом функцией $S(z_1,\ldots,z_n;y)$ $(n+1)$ переменных (n — число осцилляторов)

$$\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a\left[\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2+\left(\frac{z_{i+1}-z_i}{a}\right)^2\right]=0$$

Полный интеграл этого уравнения легко найти, перейдя к главным координатам при помощи канонического преобразования

$$\theta_i=\frac{2}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}z_\mu\sin\frac{i\mu\pi}{n+1}$$

«Старые» импульсы q_i будут связаны с «новыми» π_i соотношениями

$$q_i=\frac{2}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\pi_s\sin\frac{is\pi}{n+1}$$

В главных координатах будем иметь

$$S=a\sum_{i=1}^{n}\int\left[\left(\frac{E}{n}+\tau_i\right)\frac{2}{a}-\frac{\lambda_i^2\theta_i^2}{a^2}\right]^{1/2}d\theta_i-Ey\qquad\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i=0\right)$$

Здесь E, τ_i — постоянные.

По классической теореме Якоби

$$y-y_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\left[\frac{2}{a}\left(\frac{E}{n}+\tau_i\right)-\frac{\lambda_i^2\theta_i^2}{a^2}\right]^{-1/2}d\theta_i$$

$$\beta_i=\frac{\partial S}{\partial\tau_i}=\int\left[\frac{2}{a}\left(\frac{E}{n}+\tau_i\right)-\frac{\lambda_i^2\theta_i^2}{a^2}\right]^{-1/2}d\theta_i-\int\left[\frac{2}{a}\left(\frac{E}{n}+\tau_n\right)-\frac{\lambda_n^2\theta_n^2}{a^2}\right]^{-1/2}d\theta_n$$

$$\pi_i=\frac{\partial S}{\partial\theta_i}=a\left[\left(\frac{E}{n}+\tau_i\right)\frac{2}{a}-\frac{\lambda_i^2\theta_i^2}{a^2}\right]^{1/2}\qquad\left(\lambda_i=2\sin\frac{i\pi}{n+1}\right)$$

Из этих уравнений нетрудно получить

$$\theta_i=-\frac{1}{\lambda_i}\left[2a\left(\frac{E}{n}+\tau_i\right)\right]^{1/2}\sin\frac{\lambda_i}{a}(y-y_i),\qquad y_i=y_0-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}'\beta_k$$

Штрих в последней сумме означает пропуск слагаемого β_i. Для z_μ получаем

$$z_\mu=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\sin\frac{i\mu\pi}{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left[2a\left(\frac{E}{n}+\tau_i\right)\right]^{1/2}\sin\frac{i\mu\pi}{n+1}\sin\frac{\lambda_i}{a}(y-y_i)$$

Перейдем к пределу $n=\infty$, $a=0$, $na=l$ (струна длины l, закрепленная на концах). Будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_i}{a}=\frac{i\pi}{l},\qquad x=\frac{il}{n+1},\qquad \frac{E}{na}=e,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\tau_i}{a}=\sigma_i$$

$$\lim_{n\to\infty}z_i=z(x,\ y)=-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{l}{\mu\pi}\sqrt{2(e+\sigma_\mu)}\sin\frac{\mu\pi x}{l}\sin\frac{\mu\pi}{l}(y-y_\mu)$$

Отсюда легко перейти, используя начальные условия, к форме

$$z=\frac{2}{l}\int_0^l\sum_{\mu=1}^{\infty}\sin\frac{\mu\pi x}{l}\sin\frac{\mu\pi\xi}{l}\left[\alpha(\xi)\cos\frac{\mu\pi y}{l}+\beta(\xi)\frac{\sin(\mu\pi y)/l)}{\mu\pi/l}\right]d$$

приводящейся к обычной даламберовской [1], если $l\to\infty$.

Напишем континуальные аналоги проделанных действий. Для бесконечной струны полный интеграл Леви запишется в форме функционального интеграла [11]

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int^{\theta(\xi)}\sqrt{2[E\delta(\xi)+\sigma(\xi)]-\xi^2\theta^2(\xi)}\,d\theta(\xi)-yE\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)d\xi$$

Нижний предел во внутреннем интеграле несуществен; положим его равным нулю. Вместо $\theta(\xi,\ y)$ пишем для краткости $\theta(\xi)$. Функция $\delta(\xi)$ подчинена лишь условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\,d\xi=1$$

в остальном она произвольна. $\sigma(\xi)$ представляет параметрическую функцию; условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(\xi)\,d\xi=0\tag{4.1}$$

которому она подчинена, является обобщением соответствующего условия для постоянных τ_i в конечномерной задаче.

[1] При соответствующем изменении начала отсчета координаты x.

Варьируя функционал S по σ при добавочном условии (4.1), найдем

$$\beta(\xi)=\int\limits_0^{\theta(\xi)}\frac{d\theta(\xi)}{\sqrt{2[E\delta(\xi)+\sigma(\xi)]-\xi^2\theta^2(\xi)}}+\lambda \tag{4.2}$$

Здесь λ — множитель Лагранжа. Интеграл в последней формуле берется по некоторому пути в функциональном пространстве θ, соединяющему точки 0 и $\theta(\xi)$ Его, однако, легко свести к обычному интегралу [11]. Для этого заметим, что интеграл (4.2) не зависит от пути интегрирования, так как выполнено условие [11]

$$\frac{\delta}{\delta\theta(y)}\frac{1}{\sqrt{2[E\delta(x)+\sigma(x)]-x^2\theta^2(x)}}=\frac{\delta}{\delta\theta(x)}\frac{1}{\sqrt{2[E\delta(y)+\sigma(y)]-y^2\theta^2(y)}}$$

Пусть путь интегрирования прямая $\theta=\theta(\xi)t$; тогда $d\theta=\theta(\xi)dt$; получим

$$\beta(\xi)=-\frac{1}{\xi}\arcsin\left\{\frac{-\xi\theta(\xi)}{\sqrt{2[E\delta(\xi)+\sigma(\xi)]}}\right\}+\lambda \tag{4.3}$$

С другой стороны, дифференцируя полный интеграл Леви по E, получим

$$y-y_0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\int\limits_0^{\theta(\xi)}\frac{\delta(\xi)\,d\theta(\xi)}{\sqrt{2[E\delta(\xi)+\sigma(\xi)]-\xi^2\theta^2(\xi)}}$$

Отсюда, как и выше

$$y-y_0=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(\xi)\,d\xi}{\xi}\arcsin\left\{-\frac{\xi\theta(\xi)}{\sqrt{2[E\delta(\xi)+\sigma(\xi)]}}\right\}$$

Вместе с (4.3) это дает

$$y-y_0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\beta(\xi)\,\delta(\xi)\,d\xi-\lambda$$

Отсюда

$$\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\beta(\xi)\,\delta(\xi)\,d\xi-(y-y_0) \tag{4.4}$$

Теперь определяем $\theta(\xi)$ из (4.3) и (4.4); дальнейшие действия очевидны. Нетрудно убедиться в том, что условие (4.1) по существу эквивалентно требованию регулярности начальных данных на бесконечности.

Поступила 27 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Sopra una estensione della teoria Jacobi — Hamilton del calcolo delle variazioni. Rend. Accad. Lincei, Roma, 1890, (4), 6[1].
2. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes. Paris, Gauthier — Villars, 1913.
3. Fréchet M. Sur une extension de la méthode de Jacobi — Hamilton. Annali di matem., 1905, (3) 11.
4. Lévy P. Sur l'integration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. Rend. circ. matem. Palermo, 1914, 37.
5. Prange G. Die Hamilton — Jacobische Theorie für Doppelintegrale. Diss., Göttingen, 1915.
6. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
7. Skyrme T. H. R. Quantum field theory. Proc. Roy. Soc., 1955, A231, № 1186.
8. Аржаных И. С. Канонические уравнения ранга большего нуля. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1962.
9. Аржаных И. С. Алгорифм аналитического продолжения теории поля. Тр. Ин-та математики им. В. И. Романовского, Изд-во АН УзССР, 1962, вып. 26.
10. Аржаных И. С. Оператор типа Гамильтона — Якоби классической теории поля. Докл. АН УзССР, 1962, № 6.
11. Свидзинский А. В. Криволинейный интеграл в функциональном пространстве. Изв. вузов, Математика, 1959, № 1 (8).