Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В заметке выводятся некоторые соотношения, характеризующие задачу о встрече двух линейно управляемых движений.

§ 1. Рассмотрим два движения: преследуемое движение $z(t)$, описываемое уравнением

$$\frac{dz}{dt} = C(t)\, z + g(t) + d(t)\, v \tag{1.1}$$

и преследующее движение $y(t)$, описываемое уравнением

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + f(t) + b(t)\, u \tag{1.2}$$

Здесь y, z — n-мерные векторы фазовых координат y_i, z_i управляемых объектов; $A(t)$, $C(t)$ — $n \times n$-матрицы; $b(t)$, $d(t)$ — n-векторы, параметры системы; $f(t)$, $g(t)$ — n-векторы внешних воздействий; u, v — скалярные управляющие воздействия. Функции $A(t)$, $C(t)$, $b(t)$, $d(t)$, $f(t)$, $g(t)$ определены при $t \geqslant 0$.

В работах [1] (стр. 250), [2] рассмотрена задача об оптимальном по времени преследовании. В работе [3] даны оценки времени преследования для одной такой задачи. Ниже выводятся некоторые соотношения, характеризующие задачу о встрече движений (1.1), (1.2) при типичных ограничениях на управляющие воздействия $u(t)$, $v(t)$.

Сформулируем задачу об оптимальной по времени встрече движений $y(t)$ (1.2) и $z(t)$ (1.1).

Рассмотрим три типа ограничений на управляющие воздействия ([4], стр. 625).

(1) Ограничение максимума воздействия

$$|u(t)| \leqslant N, \qquad |v(t)| \leqslant M \qquad (t \geqslant t_0) \tag{1.3}$$

(2) Ограничение «энергии» воздействия

$$\int_{t_0}^{\infty} u^2(t)\, dt \leqslant N^2, \qquad \int_{t_0}^{\infty} v^2(t)\, dt \leqslant M^2 \tag{1.4}$$

(3) Ограничение импульса воздействия

$$\int_{t_0}^{\infty} |d\eta(t)| \leqslant N, \qquad \int_{t_0}^{\infty} |d\zeta(t)| \leqslant M \qquad \begin{pmatrix} d\eta(t) = u(t)\, dt \\ d\zeta(t) = v(t)\, dt \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Здесь t_0 — начало процесса управления, интегралы (1.5) имеют смысл полных вариаций ([5], стр. 184) функций $\eta(t)$, $\zeta(t)$ на интервале $[t_0, \infty]$. Класс допустимых функций $u(t)$, $v(t)$ ($\eta(t)$, $\zeta(t)$ в случае (3)) определяется в каждом случае характером ограничений (1.3) — (1.5). В случае (1) функции $u(t)$, $v(t)$ — измеримые ([5], стр. 20), в случае (2) функции $u(t)$, $v(t)$ с интегрируемым квадратом при $t_0 \leqslant t < \infty$ ([5], стр. 28), в случае (3) функции $\eta(t)$, $\zeta(t)$ с ограниченным изменением на интервале $[t_0, \infty)$ ([5], стр. 184). Кроме этого, ограничим множества допустимых управлений $u(t)$, $v(t)$ и соответствующих им движений $y(t)$, $z(t)$ еще следующим условием: в случаях (1), (2) функции $u(t)$, $v(t)$ должны быть непрерывны справа, в случае (3) движения $y(t)$ и $z(t)$ должны также быть непрерывными справа.

Будем говорить, что управления $u(t)$, $v(t)$ стеснены ограничениями (i), (j), понимая под ними ограничения (1), (2), (3), и будем писать $u \in (i)$, $v \in (j)$, если функция $u(t)$ стеснена ограничением (i) $(i = (1), (2), (3))$, а функция $v(t)$ стеснена ограничением (j) $(j = (1), (2), (3))$.

При заданных начальных условиях $t = t_0 \geqslant 0$, $y(t_0) = y^\circ$, $z(t_0) = z^\circ$ и при выбранном управлении $u(t) \in (i)$, $v(t) \in (j)$ $(t \geqslant t_0)$ момент времени $t = t^*$ называется моментом встречи [1,2], если $y(t^*) = z(t^*)$ $(t^* \geqslant t_0)$. Если при некотором $t = t^*$ движения $y(t)$ и $z(t)$ встречаются впервые, т. е. если $y(t^*) = z(t^*)$, но $y(t) \neq z(t)$ при $t_0 \leqslant t < t^*$, то этот момент t^* будем называть первым моментом встречи и обозначать t_1^* $[t_0, y^\circ, z^\circ, u, v, i, j]$. При введенных ограничениях на классы допустимых функций $u(t)$, $v(t)$ для всяких двух фиксированных движений $y(t)$, $z(t)$ $(t \geqslant t_0)$, имеющих по крайней мере один момент встречи $t = t^*$, будет существовать и первый момент встречи.

При ограничениях (1) — (3) задача из работ [1,2] трансформируется в следующую задачу.

Задача $[(i), (j)]$. При данных t_0, y°, z° найти оптимальные управления $u^\circ(t) \in (i)$, $v^\circ(t) \in (j)$, для которых

$$t_1^* \, [t_0, y^\circ, z^\circ, u^\circ, v^\circ, (i)\,(j)] = \max_v \min_u t_1^* \, [t_0, y^\circ, z^\circ, u, v, (i), (j)] \quad (1.6)$$

Эта постановка задачи менее естественна, чем постановка минимаксных проблем управления в теории динамического программирования [6]. В задачах динамического программирования[1] оптимальные управления u, v ищут обычно в виде функций $u = U[t, y, z]$, $v = V[t, y, z]$ и управляющие воздействия определяются, следовательно, в каждый момент t процесса по реализовавшимся в этот момент величинам $y(t)$ и $z(t)$, т. е.

$$u(t) = U[t, y(t), z(t)], \qquad v = V[t, y(t), z(t)]$$

При этом в задачах динамического программирования предполагается, что стратегия $z(t)$ ($v(\tau)$ при $\tau \geqslant t$) неизвестна в момент t в органе управления $y(t)$, а стратегия $y(t)$ ($u(\tau)$ при $\tau \geqslant t$) неизвестна в органе управления $z(t)$. Такое предположение соответствует типичной ситуации в теории игр [7]. В задаче $[(i), (j)]$ предполагается, однако, что управление $v(t)$ для всех $t \geqslant t_0$ сообщается наперед в орган, вырабатывающий управление $u(t)$. Несмотря на указанный недостаток, задача $[(i), (j)]$, по-видимому, представляет и известный самостоятельный интерес и имеет значение, как вспомогательное звено в других проблемах.

---

[1] Задачи преследования, оптимальные по времени встречи, исследовались Ю. М. Репиным с позиций теории динамического программирования на семинаре по дифференциальным уравнениям в Свердловске в 1957 г. Некоторые задачи преследования аналогичного типа рассматривались в докладе автора на IV Всесоюзном математическом съезде (Программа съезда, стр. 68).

§ 2. В работах [1,2] указаны необходимые условия, которым должны удовлетворять оптимальные управления $u^\circ(t)$ и $v^\circ(t)$ для задачи $[(i), (j)]$ при $i = 1$, $j = 1$. Такие условия можно вывести и для других задач $[(i), (j)]$. Однако здесь такие условия дают мало для эффективного решения проблемы. Поэтому представляют интерес оценки, связанные с рассматриваемыми задачами, а также представляет интерес рассмотрение других задач о встрече движения $y(t)$ и $z(t)$. Последнее имеет значение и потому, что в широком классе случаев задача (i, j) может не иметь решения (см. ниже, стр. 246). Достаточно точная оценка величины $t_1^* [t_0, y^\circ, z^\circ, u^\circ, v^\circ, (i), (j)]$, даже если эта величина существует, по-видимому, весьма затруднительна. Поэтому в дальнейшем рассмотрим другую величину T, которая оценивает число t_1^* сверху.

Определение 2.1. Пусть даны начальные условия t_0, y°, z° и ограничения $u \in (i)$, $v \in (j)$. Назовем момент $t = T \geqslant t_0$ моментом поглощения процесса $z(t)$ (1.1) процессом $y(t)$ (1.2), если, каково бы ни было управление $v(t) \in (j)$, для этого $v(t)$ можно указать управление $u(t) \in (i)$ такое, что управления $v(t)$, $u(t)$ реализуют встречу движений $y(t)$ и $z(t)$ в момент $t = T$. Если среди таких чисел T есть наименьшее, то назовем это наименьшее число T первым моментом поглощения процесса $z(t)$ процессом $y(t)$. Первый момент поглощения будем обозначать символом $T_1[t_0, y^\circ, z^\circ, (i), (j)]$.

Именно величины T такого типа оценены в работе [3] для задачи $[(1), (1)]$ в случае систем (1.1) и (1.2) второго порядка на основе теории накопления возмущений.

Обсудим связь между величинами T_1 и t_1^*. Если существует некоторый момент поглощения T, то, очевидно, справедливо неравенство

$$\sup_v \inf_u t_1^* [t_0, y^\circ, z^\circ, u, v, (i), (j)] \leqslant T \qquad (2.1)$$

Следовательно, если существует оптимальное управление u°, v°, для которого

$$t_1^* [t_0, y^\circ, z^\circ, u^\circ, v^\circ, (i), (j)] = \max_v \min_u t_1^* [t_0, y^\circ, z^\circ, u, v, (i), (j)] \qquad (2.2)$$

и если существует первый момент поглощения T_1, то

$$t_1^* [t_0, y^\circ, z^\circ, u^\circ, v^\circ, (i), (j)] \leqslant T_1 [t_0, y^\circ z^\circ, (i), (j)] \qquad (2.3)$$

Существование первого момента поглощения T_1, если существует, по крайней мере, один момент поглощения T, доказывается при достаточно общих предположениях (см. ниже, стр. 249). Напротив, существование $\max \min t_1^*$ даже при условии ограниченности величины $\sup \inf t_1^*$ в столь общем случае доказать не удается. В этом существенное отличие задачи $[(i), (j)]$ от аналогичных задач об оптимальном по быстродействию регулированию [4], где из существования, по крайней мере, одного допустимого управления $u_*(t)$, приводящего движение $x(t)$ в заданную точку, следует существование оптимального управления $u^\circ(t)$. Заметим еще, что из существования оптимального управления $u^\circ(t)$, $v^\circ(t)$ не следует, вообще говоря, существования хотя бы одного момента поглощения T.

Дальнейший материал статьи посвящен изучению встречи движений $z(t)$ и $y(t)$ в момент поглощения T процесса $z(t)$ процессом $y(t)$.

§ 3. Выведем оценки, характеризующие момент поглощения T процесса $z(t)$ процессом $y(t)$. Пусть $\varphi(t)$ — функция, определенная при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Обозначим

$$\|\varphi(t), t_0, \tau, (1)\| = \int_{t_0}^{\tau} |\varphi(t)|\, dt \tag{3.1}$$

$$\|\varphi(t), t_0, \tau, (1)\|^* = vrai \max\, [\,|\varphi(t)|\,, t_0 \leqslant t \leqslant \tau] \tag{3.2}$$

$$\|\varphi(t), t_0, \tau, (2)\| = \|\varphi(t), t_0, \tau, (2)\|^* = \Big[\int_{t_0}^{\tau} \varphi^2(t)\, dt\Big]^{1/2} \tag{3.3}$$

$$\|\varphi(t), t_0, \tau, (3)\| = \max\, [\,|\varphi(t)|\,, t_0 \leqslant t \leqslant \tau] \tag{3.4}$$

$$\|\varphi(t), t_0, \tau, (3)\|^* = \int_{t_0}^{\tau} |d\varphi(t)| \tag{3.5}$$

В каждом из условий (3.1) — (3.5) класс функции $\varphi(t)$ предполагается таким, что имеет смысл соответствующая норма $\|\varphi(t), t_0, \tau, (i)\|$ или $\|\varphi(t), t_0, \tau, (i)\|^*$.

Известно, что при каждом (i) $(i = (1), (2), (3))$ величины $\|\varphi(t), t_0, \tau, (i)\|$ и $\|\varphi(t), t_0, \tau, (i)\|^*$ определяют метрику в стандартных функциональных пространствах (L, L^2 и C соответственно) и нормы линейных функционалов на них ([5], стр. 165). Ограничения (1.3) — (1.5) в обозначениях (3.2), (3.3), (3.5) имеют вид

$$\|u(t), t_0, \infty, (i)\|^* \leqslant N, \qquad \|v(t), t_0, \infty, (i)\|^* \leqslant M \quad (i = 1,2) \tag{3.6}$$

$$\|\eta(t), t_0, \infty, (i)\|^* \leqslant N, \qquad \|\zeta(t), t_0, \infty, (i)\|^* \leqslant M \quad (i = 3) \tag{3.7}$$

Обозначим символами $F^{(1)}[t_0, t]$ и $F^{(2)}[t_0, t]$ соответственно фундаментальные матрицы решений для уравнений

$$dz\,/\,dt = C(t)\, z, \qquad dy\,/\,dt = A(t)\, y$$

символами $(F^{(k)}[t_0, t])^{-1}$ — матрицы, обратные к $F^{(k)}$. Предполагается, что $F^{(k)}[t_0, t_0] = E$-единичная матрица. Символом $[q]_k$ будем обозначать k-ю компоненту вектора q.

Оценим область $S^{(1)}[t_0, T, z^\circ, (j)]$, состоящую из тех точек z, в которые можно привести в момент $t = T$ движение $z(t)$, исходящее из точки $z(t_0) = z^\circ$ выбором управления $v(t) \in (j)$. Запишем решение уравнения (1.1) по формуле Коши ([8], стр. 172)

$$z(T) = F^{(1)}[t_0, T]\, z^\circ + \int_{t_0}^{T} F^{(1)}[t_0, T]\, (F^{(1)}[t_0, t])^{-1} \{g(t) + d(t)\, v(t)\}\, dt \tag{3.8}$$

или в координатах получим равенства

$$c_k[t_0, T] = \int_{t_0}^{T} h_k^{(1)}[t_0, T, t]\, v(t)\, dt \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.9}$$

где (3.10)

$$c_k[t_0, T] = z_k(T) - \Big[F^{(1)}[t_0, T]\, z^\circ + \int_{t_0}^{T} F^{(1)}[t_0, T]\, (F^{(1)}[t_0, t])^{-1} g(t)\, dt\Big]_k$$

$$h_k^{(1)}[t_0, T, t] = [F^{(1)}[t_0, T]\, (F^{(1)}[t_0, t])^{-1} d(t)]_k \tag{3.11}$$

Множество значений $c = \{c_k\} \neq 0$, для которых разрешимы уравнения (3.9) относительно функций $v(t) \in (j)$, определяется условием [4]

$$\Phi^{(1)}[t_0, T, c, (j)] \geqslant \frac{1}{M} \tag{3.12}$$

где

$$\Phi^{(1)}[t_0, T, c, (j)] = \min_\lambda \|\lambda \cdot h^{(1)}[t_0, T, t], t_0, T, (j)\| \quad \text{при } \lambda \cdot c = 1 \tag{3.13}$$

Здесь символ $\lambda \cdot q$ означает скалярное произведение векторов λ и q. Кроме того, уравнения (3.9) разрешимы при $c_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, область $S^{(1)}$ состоит из таких точек z, для которых или $c = 0$ или $c \neq 0$ и выполнено условие (3.12), причем координаты z_k и c_k связаны соотношением (3.10) при $z_k = z_k(T)$. Это множество $S^{(1)}$ будет ограниченным, замкнутым и притом выпуклым множеством [9].

Из условия (3.12) можно вывести также, что граница области $S^{(1)}[t_0, T, z^\circ, (j)]$ изменяется непрерывно при непрерывном изменении t_0, T и z°.

Если T — момент поглощения, то для любого управления $v^*(t) \in (j)$ можно указать функцию $u^*(t) \in (i)$, такую, что для соответствующих движений справедливо равенство $y^*(T) = z^*(T)$.

Следовательно, область $S^{(1)}$ должна лежать в области $S^{(2)}[t_0, T, y^\circ, (i)]$, каждая точка которой достижима в момент $t = T$ движением $y(t)$, исходящим из точки $y(t_0) = y^\circ$ при управлениях $u(t) \in (i)$.

Область $S^{(2)}$, аналогично области $S^{(1)}$, определяется условием:

$$\text{либо} \quad a = 0 \quad \text{либо} \quad \Phi^{(2)}[t_0, T, a, (i)] \geqslant \frac{1}{N} \qquad (a \neq 0) \tag{3.14}$$

где

$$\Phi^{(2)}[t_0, T, a, (i)] = \min_\lambda \|\lambda \cdot h^{(2)}[t_0, T, t], t_0, T, (i)\| \quad \text{при } \lambda \cdot a = 1 \tag{3.15}$$

причем (3.16)

$$a_k[t_0, T] = z_k - [F^{(2)}[t_0, T]\, y^\circ + \int_{t_0}^{T} F^{(2)}[t_0, T] \times (F^{(2)}[t_0, t])^{-1} f(t)\, dt]_k$$

$$h_k^{(2)}[t_0, T, t] = [F^{(2)}[t_0, T]\, [F^{(2)}[t_0, t])^{-1} b(t)]_k \tag{3.17}$$

Следовательно, $t = T$ — момент поглощения тогда и только тогда, когда выполнено условие (случай, когда $S^{(1)} = S^{(2)}$ — точка, неинтересен)

$$\min_a \Phi^{(2)}[t_0, T, a, (i)] \geqslant \frac{1}{N} \qquad (a \neq 0) \tag{3.18}$$

при

$$\Phi^{(1)}[t_0, T, c, (j)] \geqslant \frac{1}{M} \qquad (c \neq 0) \quad (\text{и при } c = 0)$$

где векторы a и c связаны соотношением

$$a = c + F^{(1)}[t_0, T]\, z^\circ + \int_{t_0}^{T} F^{(1)}[t_0, T]\,(F^{(1)}[t_0, t])^{-1} g(t)\, dt -$$

$$- F^{(2)}[t_0, T]\, y^\circ - \int_{t_0}^{T} F^{(2)}[t_0, T]\,(F^{(2)}[t_0, t])^{-1} f(t)\, dt \tag{3.19}$$

Вследствие выпуклости областей $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ минимум (3.18) достаточно искать при условии

$$\Phi^{(1)}\,[t_0,\ T,\ c,\ (j)] = \frac{1}{M} \qquad (c \neq 0) \quad (\text{и при } c = 0) \tag{3.20}$$

Решение задачи (3.18) в общем случае доставляет большие трудности.

Отметим в заключение что величины $\varphi^{(i)}(t) = \lambda \cdot h^{(i)}[t_0, T, t]$ имеют здесь еще следующий смысл: $\varphi^{(1)}(t)$ — это [1] скалярное произведение вектора $d(t)$ на вектор-решение $\psi^{(1)}(t)$ уравнения $d\psi / dt = - C^*(t)\psi$, удовлетворяющее начальному условию $\psi^{(1)}(T) = \lambda$, а $\varphi^{(2)}(t)$ — скалярное произведение вектора $b(t)$ на вектор-решение $\psi^{(2)}(t)$ уравнения $d\psi / dt = - A^*(t)\psi$, удовлетворяющее условию $\psi^{(2)}(T) = \lambda$. Знак $*$ означает здесь транспонирование.

§ 4. Рассмотрим вопрос об определении первого момента поглощения T_1 процесса $z(t)$ процессом $y(t)$. Примем, что движение $y(t)$ будет управляемым ([10,11], стр. 222) на каждом отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ $(\tau > t_0)$. Для этого достаточно, чтобы векторы

$$L_1^{(2)}(t) = b(t), \qquad L_{k+1}^{(2)}(t) = \frac{dL_k^{(2)}}{dt} - A(t)L_k^{(2)}(t)$$
$$(k = 1, \ldots, n-1) \tag{4.1}$$

были линейно независимы при $t = t_0$.

В этом случае первый момент поглощения T_1 определяется как наименьший корень уравнения (при $i \neq 3$, $j \neq 3$)

$$\min \Phi^{(2)}\,[t_0, T, a, (i)] = \frac{1}{N}$$
$$\text{при} \quad \Phi^{(1)}\,[t_0, T, c, (j)] = \frac{1}{M} \qquad (c \neq 0) \quad (\text{и при } c = 0) \tag{4.2}$$

который существует, если существует, по крайней мере, один момент поглощения T.

В самом деле, T_1 — наименьшее число, среди чисел T, удовлетворяющих условию

$$\min_a \Phi^{(2)}\,[t_0, T, a, (i)] \geqslant \frac{1}{N} \ \text{при}\ \Phi^{(1)}\,[t_0, T, c, (j)] = \frac{1}{M} \quad (c \neq 0)\ (\text{и при } c = 0) \tag{4.3}$$

Если $t = T$ — некоторый момент поглощения, то при этом T условие (4.3) выполняется. С другой стороны, при $y^\circ \neq z^\circ$ для $T \to t_0$ множество (4.3) стягивается к точке $c = 0$, а следовательно, величина $\min_a \Phi^{(2)}[t_0, T, a, (i)]$ сходится при этом к нулю, так как отрезок (t_0, T) стягивается в точку, а вектор $a = z^\circ - y^\circ + c + O[T - t_0]$ остается конечным, отличным от нулевого. Теперь для доказательства существования наименьшего корня уравнения (4.2) достаточно отметить, что величина $\min_a \Phi^{(2)}$ при $\Phi^{(1)} = 1 / M$ меняется непрерывно при изменении T. Последнее условие выполняется, так как при условиях управляемости величина $\Phi^{(2)}$ зависит непрерывно от T и a, а множество (4.3), как отмечалось выше, деформируется непрерывно с изменением T, векторы c и a связаны зависимостью, непрерывной по T.

Если условие управляемости движения $y(t)$ не выполнено, то в первый момент поглощения T_1 может выполняться не равенство (4.2), а строгое неравенство (4.3), так как $\Phi^{(2)}$ может быть при этом разрывной по a.

Итак, момент T_1 в известном ряде случаев можно определять из уравнения (4.1). Практическое решение этого уравнения весьма затруднительно. Здесь можно воспользоваться методом введения в задачу параметра ϑ, как это описано в статье[4] для задачи об оптимальном по быстродействию регулировании. Однако такой путь решения может осложняться точками бифуркации, отсутствие которых трудно проверить заранее.

§ 5. Рассмотрим случай ограничений [(2), (2)], когда вычисление величины $\min_a \Phi^{(2)}$ при $\Phi^{(1)} = 1 / M$ является наименее сложным. Примем для упрощения, что не только движение $y(t)$, но и движение $z(t)$ также управляемо. Для этого достаточно, чтобы наряду с векторами $L_k^{(2)}$ (4.1) были линейно независимыми векторы

$$L_k^{(1)}(t_0) \,/\, L_1^{(1)}(t) = d(t), \qquad L_{k+1}^{(1)}(t) = dL_k^{(1)}/dt - C(t) L_k^{(1)}(t) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Вместо $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ здесь удобно рассмотреть величины

$$\alpha^{(i)}[t_0, T, q] = (\Phi^{(i)}[t_0, T, q, (2)])^{-2} \tag{5.1}$$

$$(i = 1,2; \; q = a \text{ при } i = 2, \; q = c \text{ при } i = 1)$$

Тогда условия (4.3), которые выполняются в каждый момент поглощения T, трансформируются в условия

$$\max_a \alpha^{(2)}[t_0, T, a] \leqslant N^2 \quad \text{при} \quad \alpha^{(1)}[t_0, T, c] = M^2 \tag{5.2}$$

Величины $\alpha^{(i)}$ являются квадратичными формами величин c_j и a_j соответственно при $i = 1$ и $i = 2$. Так как векторы $\{a_j\}$ и $\{c_j\}$ связаны с вектором $\{z_j\}$ линейными соотношениями (3.10) и (3.16), то задача (5.2) сводится к проблеме

$$\max_a \alpha^{(2)} = \max_z \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(2)}(t_0, T) z_i z_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(2)}(t_0, T) z_i + \beta^{(2)}(t_0, T) \right\} \tag{5.3}$$

при

$$\alpha^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(1)}(t_0, T) z_i z_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(1)}(t_0, T) z_i + \beta^{(1)}(t_0, T) = M^2 \tag{5.4}$$

где $\Sigma \beta_{ij}^{(k)} z_i z_j$ $(k = 1, 2)$ — определенно положительные формы. Коэффициенты $\beta_{ij}^{(k)}$, $\beta_i^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$ вычисляются следующим образом:

$$\alpha^{(k)} = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(k)} q_i q_j = \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{(k)} h_i^{(k)} [t_0, T, t] \right)^2 dt \qquad \begin{pmatrix} q = a \text{ при } k = 2 \\ q = c \text{ при } k = 1 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

где $\{\rho_i^{(k)}\}$ — решение системы уравнений [10]

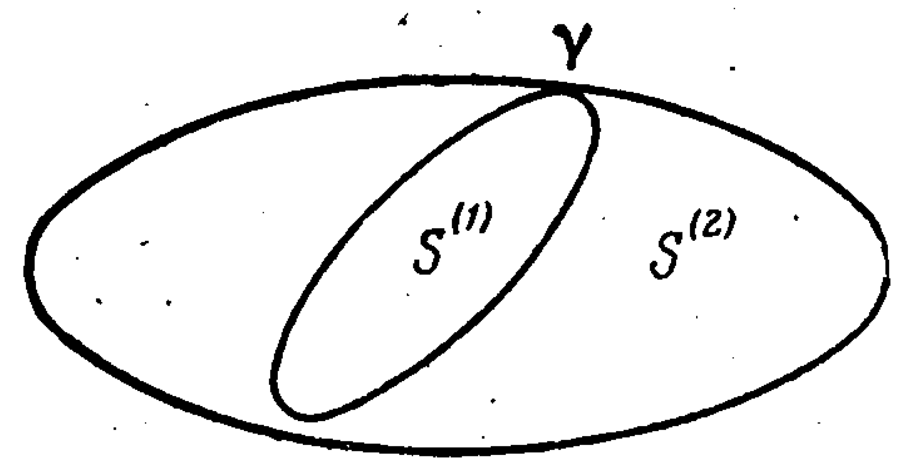
$$\sum_{j=1}^{n} (h_i^{(k)} \cdot h_j^{(k)}) \rho_j^{(k)} = (h_i^{(k)} \cdot q) \tag{5.6}$$

$$(h_i^{(k)} \cdot h_j^{(k)}) = \int_{t_0}^{T} h_i^{(k)} h_j^{(k)} dt, \qquad (q_i \cdot h_i^{(k)}) = q_i \int_{t_0}^{T} h_i^{(k)} dt \tag{5.7}$$

Формы (5.3), (5.4) получаются после подстановки выражений (3.10) и (3.16) для c и a в форму (5.5). Решение задачи (5.3), (5.4) принципиальных трудностей не составляет. Однако решать эту задачу удобнее не в переменных z_i, а в некоторых переменных λ_i, связанных с z_i линейными соотношениями.

Рассмотрим выражение (5.3). Здесь z_i — координаты точки $z(T)$, в которую может быть приведено движение $z(t)$ в момент $t = T$ управлением $v(t) \in (j)$. Так как точка $z(T)$ лежит на поверхности $\alpha^{(1)} = M^2$, т. е. на границе области $\alpha^{(1)} \leqslant M^2$ достижимости, то управление $v(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$ является оптимальным в том смысле, что на нем минимизируется величина

$$\varphi = \int_{t_0}^{T} v^2(t)\, dt \tag{5.8}$$



Фиг. 1

при заданных краевых условиях $z(t_0)$ и $z(T)$. Но оптимальное управление $v^\circ(t)$ имеет здесь вид [10,11]

$$v^\circ(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i^{(1)}[t_0, T, t] \tag{5.9}$$

Подставляя $v = v^\circ$ согласно (5.9) в (5.8) и в (3 8) и подставляя полученное тогда выражение (3.8) в (5.3), получим задачу о максимуме квадратичной функции от λ_i

$$\max_\lambda \alpha\, [T, \lambda_1, \ldots, \lambda_n] = ? \tag{5.10}$$

при

$$\varphi\, [\lambda_1, \ldots, \lambda_n, T] = \int_{t_0}^{T} (\lambda_i h_i^{(1)})^2\, dt = M^2 \tag{5.11}$$

§ 6. Рассмотрим задачу о построении управления u, которое выбиралось бы в ходе процесса на основании информации о реализующихся значениях $z(t)$ и $y(t)$ и осуществляло бы встречу движений $y(t)$ и $z(t)$, причем $v(\tau)$ при $\tau \geqslant t$ было бы неизвестным в органе управления $y(t)$ в каждый момент $t \geqslant t_0$. Управление u должно строиться так, чтобы для реализаций $v(t) \in (j)$ получались бы реализации $u(t) \in (i)$.

Ограничимся случаем $i = (2)$, $j = (2)$ при $n = 2$, как самым простым. Примем, что движение $y(t)$ управляемо на каждом отрезке $[t_1, t_2]$ $t_0 \leqslant t_1 < t_2$. Для этого достаточно, чтобы векторы $L_k^{(2)}(t)$ $(k = 1, 2)$ (4.1) были линейно независимыми при всех $t \geqslant t_0$, кроме, может быть, отдельных и изолированных значений t.

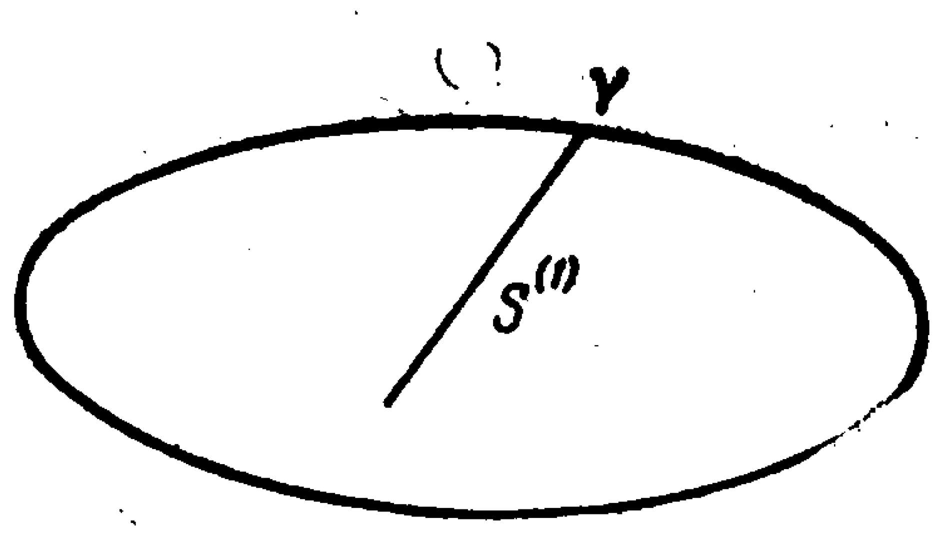
Пусть существует, по крайней мере, один момент $t = T > t_0$ поглощения процесса $z(t)$ процессом $y(t)$, а следовательно, существует и первый момент $t = T_1(t_0)$, определяемый из условий (4.2). В момент $t = T_1$ в соответствии с результатами § 4, 5 имеет место следующая картина. Множество точек z на плоскости z_1, z_2, в которые можно привести движение $z(t)$ в момент $t = T_1$ при ограничении $v(t) \in (2)$, есть эллипс $S^{(1)}(t_0, T_1)$: $\alpha^{(1)} \leqslant M^2$ (фиг. 1), если движение $z(t)$ управляемо на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T_1$, или — это множество суть отрезок $S^{(1)}(t_0, T_1)$ (фиг. 2) (или даже точка), если движение $z(t)$ неуправляемо при $t_0 \leqslant t \leqslant T_1$.

Множество $S^{(2)}(t_0, T_1)$ точек z, в которые можно привести движение $y(t)$ в момент $t = T_1$ при ограничении $u(t) \in (2)$, есть эллипс $\alpha^{(2)} \leqslant N^2$ (фиг. 1, 2). Случай, когда $S^{(i)}(t_0, T_1)$ — точка, неинтересен и его дальше не рассматриваем. Множество $S^{(1)}(t_0, T_1)$ лежит внутри множества $S^{(2)}(t_0, T_1)$ и границы их касаются в точке γ, где и достигается максимум (5.4). При всех $t = \tau$, $\tau < T_1$ множество $S^{(1)}(t_0, \tau)$ уже не лежит целиком в $S^{(2)}(t_0, \tau)$.

Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие $Q(t_0, T_1)$. Границы $S^{(1)}(t_0, T_1)$ и $S^{(2)}(t_0, T_1)$ имеют лишь одну общую точку γ и кривизна границы $S^{(2)}(t_0, T_1)$ в точке γ меньше, чем кривизна границы $S^{(1)}(t_0, T_1)$ в этой точке.

Последнее требование условия $Q[t_0, T]$ всегда выполнено, если движение $z(t)$ неуправляемо при $t_0 \leqslant t \leqslant T_1$.



Фиг. 2

Выберем управление $u(t) \in (2)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T_1$ так, чтобы движение $y(t)$ приводилось им в момент $t = T_1$ в точку γ. Это управление $u(t)$ имеет вид [10]

$$u(t) = \sum_{i=1}^{2} \rho_i^{(2)}[t_0, T_1]\, h_i^{(2)}[t_0, T_1, t]$$

где $\{\rho_i^{(k)}\}$ — решение системы уравнений (5.6) при $T = T_1$, причем величины a_i и $h_i^{(2)}$ определены равенствами (3.16) и (3.17) при $T = T_1$ и z_i, равных координатам точки γ.

Пусть на некотором отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta(t_0) < T_1$ управление $u^*(t)$ совпадает с управлением $u(t)$, указанным в предыдущем абзаце, а управление $v^*(t)$ — совпадает на этом отрезке с каким-нибудь управлением $v(t) \in (2)$. Пусть $y^*(\vartheta)$, $z^*(\vartheta)$ — те точки, в которые приводятся движения $y(t)$ и $z(t)$ управлениями $u^*(t)$ и $v^*(t)$ в момент $t = \vartheta(t_0)$. Рассмотрим задачу об управлении движениями $y(t)$, $z(t)$, исходящими из точек $y^*(\vartheta)$, $z^*(\vartheta)$ при $t \geqslant \vartheta$ и при ограничениях

$$\int_{\vartheta}^{\infty} u^2(t)\,dt \leqslant N^2 - \int_{t_0}^{\vartheta} [u^*(t)]^2\,dt = N^2(\vartheta) \tag{6.1}$$

(2) (ϑ)

$$\int_{\vartheta}^{\infty} v^2(t)\,dt \leqslant M^2 - \int_{t_0}^{\vartheta} [v^*(t)]^2\,dt = M^2(\vartheta) \tag{6.2}$$

Обозначим через $S^{(1)}[\vartheta, T_1]$ — область на плоскости z_1, z_2, достижимую движением $z(t)$, исходящим из точки $z^*(\vartheta)$, при управлении $v(t)$, стесненном ограничением (6.2), через $S^{(2)}[\vartheta, T_1]$ — область, достижимую движением $y(t)$, исходящим из точки $y^*(\vartheta)$, при управлении $u(t)$, стесненном условием (6.1). Области $S^{(1)}[\vartheta, T_1]$ и $S^{(2)}[\vartheta, T_1]$ лежат внутри областей $S^{(1)}[t_0, T_1]$ и $S^{(2)}[t_0, T_1]$.

Область $S^{(2)}$ $[\vartheta, T_1]$ проходит через точку γ и, следовательно, граница области $S^{(2)}$ $[\vartheta, T_1]$ касается в этой точке границы области $S^{(2)}$ $[t_0, T_1]$. При непрерывном изменении ϑ величины $\beta_{ij}^{(2)}(\vartheta, T_1)$, $\beta_i^{(2)}(\vartheta, T_1)$, $\beta^{(2)}(\vartheta, T)$, определяющие форму $\alpha^{(2)}$ (5.5), изменяются непрерывно, поэтому кривизна эллипса $\alpha^{(2)} = N^2$, ограничивающего $S^{(2)}$, изменяется в точке γ непрерывно с изменением ϑ. Но тогда из условия Q $[t_0, T_1]$ следует, что можно выбрать столь малый отрезок времени $[t_0, \vartheta^*(t_0)]$, $\vartheta^* > t_0$, что при выборе управления $u = u^*(t)$ и любого управления $v(t) \in (2)$ на этом отрезке, область $S^{(1)}$ $[\vartheta^*, T_1]$ будет содержаться в области $S^{(2)}[\vartheta^*, T_1]$. Следовательно, для задачи о встрече движений $y(t)$, $z(t)$ при ограничении (2) (ϑ^*), исходящих из точек $y^*(\vartheta^*)$, $z^*(\vartheta^*)$, момент $t = T_1$ будет моментом поглощения процесса $z(t)$ процессом $y(t)$ $(t \geqslant \vartheta^*)$. Следовательно, для этой задачи будет существовать и первый момент поглощения

$$T_1[\vartheta^*, y^*(\vartheta^*), z^*(\vartheta^*), (2)(\vartheta^*), (2)(\vartheta^*)] \leqslant T_1[t_0, y^\circ, z^\circ, (2), (2)]$$

Предположим, что для моментов ϑ^*, T_1 $[\vartheta^*, y^*, z^*, (2)(\vartheta^*), (2)(\vartheta^*)] = T_1^*$ снова выполняется условие Q $[\vartheta^*, T_1^*]$ (стр. 252). Тогда для отрезка $[\vartheta^*, T_1^*]$ можно выполнить то же построение, что и выше для отрезка $[t_0, T_1]$. Обозначая $\vartheta^* = t_1$, можно тогда построить управление $u^*(t)$ на некотором отрезке $t_1 \leqslant t < t_2$. Если и в момент t_2 будет выполнено условие Q, то можно продолжить построение $u^*(t)$ аналогичным образом при $t_2 \leqslant t < t_3$ и т. д. Указанный процесс можно продолжать в сторону возрастания t_k $(k = 0, 1, \ldots)$ до тех пор, пока будет на каждом шаге выполняться условие Q.

В то же время последовательности t_k будет соответствовать невозрастающая последовательность первых моментов поглощения $T_1[t_k]$. Предположим, что на каждом шаге, пока $T_1[t_k] - t_k > \delta > 0$, кривизна эллипса-границы $S^{(1)}$ $[t_k, T_1[t_k]]$ будет больше, чем кривизна эллипса-границы $S^{(2)}$ $[t_k, T_1[t_k]]$ на постоянную величину $\varepsilon(\delta) > 0$.

Тогда последовательности t_k и $T_1[t_k]$ при $k \to \infty$ будут иметь некоторый общий предел T, к которому последовательность t_k сходится снизу, а $T[t_k]$ — сверху. В этом случае управление $u(t)$, совпадающее с управлением $u^*(t)$ при каждом $t \in [t_k, t_{k+1})$, построенным так, как указано выше, будет, очевидно, приводить движение $y(t)$ к движению $z(t)$ в момент $t = T$, как бы ни выбиралось на каждом отрезке $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ управление $v(t) \in (2)$. Здесь еще можно изучить предельный переход $t_{k+1} \to t_k$, но это затруднительно.

Таким образом, если на каждом шаге t_k в процессе преследования будет выполняться условие Q, то можно построить управление $u(t)$, которое обеспечивает встречу движений $y(t)$ и $z(t)$. Если, однако, на некотором шаге t_k или при $t_k \to t^* < T_1[t^*]$ условие Q нарушится, то построение управления $u(t)$, обеспечивающего встречу движений $y(t)$ и $z(t)$, при условии, что в момент t неизвестен выбор управления $v(t)$, может оказаться невозможным.

Точнее говоря, можно указать пример, когда существует момент поглощения процесса $z(t)$ процессом $y(t)$, однако нельзя указать такого правила выбора управления $u(t) = U[t, y, z, N, M]$, непрерывного в точке t_0 справа и такого, что это правило выбора обеспечивает встречу движений $y(t)$, $z(t)$, если в момент $t = t_0$ в органе управления движением $y(t)$ будет неизвестно управление $v(t_0)$.

Примечание 6.1. При выполнении условий, типа условия $Q[t_0, T_1]$ и при $t_1^* = T_1$ от решения $u = u^\circ(t)$, $v = v^\circ(t)$ задачи [(1), (1)] также можно переходить к решению $u = U[t, y, z]$, $v = V[t, y, z]$ соответствующей задачи преследования в аспекте теории динамического программирования (см. начало § 6) путем, аналогичным рассмотренному выше для задачи [(2), (2)]. При этом, однако, возникают трудности при требующемся тогда предельном переходе $t_{k+1} \to t_k$.

6.2. Соображения, приведенные в статье, естественно обобщаются на случаи, когда в уравнениях (1.1) и (1.2) v и u — не скаляры, но r — векторы ($a\, d(t)$ и $b(t)$ — соответственно $n \times r$ — матрицы) и когда требуется встреча $y(t)$ и $z(t)$ лишь по части координат. Таким путем получаем, например, из простых геометрических соображений, что момент $t_1^* = T_1$ $(t_0 = 0)$ для встречи движений материальных точек с массами $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$

$$\frac{dz_i}{dt} = z_{i+3}, \qquad \frac{dz_{i+3}}{dt} = \frac{1}{m^{(1)}} v_i, \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_{i+3}, \qquad \frac{dy_{i+3}}{dt} = \frac{1}{m^{(2)}} u_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

при условии $y_i(t_1^*) = z_i(t_1^*)$ $(i = 1, 2, 3)$ и при ограничении

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant N^2, \qquad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \leqslant M^2 \qquad \left(\frac{N}{m^{(2)}} > \frac{M}{m^{(1)}} > 0\right)$$

определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} [(y_{0i} + T_1 y_{0i+3}) - (z_{0i} + T_1 z_{0i+3})]^2 = \frac{T_1^4}{4} \left(\frac{N}{m^{(2)}} - \frac{M}{m^{(1)}}\right)^2$$

При этом оптимальные усилия $u^\circ(u_1, u_2, u_3)$ и $v^\circ(v_1, v_2, v_3)$ в каждый момент преследования должны быть направлены параллельно друг другу. Последний результат установлен впервые Ю. М. Репиным.

Поступила 1 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. Келенджеридзе Д. Л. К теории оптимального преследования. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 3.
3. Гноенский Л. С. К задаче преследования. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
4. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
5. Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.— Л., Гостехиздат, 1954.
6. Беллман Р. Динамическое программирование, М., ИЛ, 1960.
7. Кинси Дж. Мак. Введение в теорию игр. М., Физматгиз, 1960.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2, Гостехиздат, 1949.
9. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ — НТВУ, 1938, статья IV, стр. 171.
10. Kalman R. E. New methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory. REAS, Technical Report, 61. 1.
11. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.