Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

К НЕРАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

М. Региш

(Тимишоара, Румынская Народная Республика)

Рассматривается «неравномерная» (относительно начального значения параметра t) асимптотическая устойчивость по первому приближению. Исследуются различные типы условий неравномерного поведения относительно t_0 решений линейной системы дифференциальных уравнений, а также устанавливаются связи между ними. Выводятся критерии устойчивости по первому приближению, включающие группу «равномерных» эквивалентных между собой критериев К. П. Персидского [1,2], И. Г. Малкина [3] и Перрона [4], а также «обобщенные» критерии А. М. Ляпунова [5] (см. примечание на стр. 72 или монографию [6], примечание 2 на стр.364, или же работу [7]) и И. Г. Малкина [8] (см. также монографию [6], стр. 369). Показывается, что последний критерий содержит в качестве частного случая обобщенный критерий Ляпунова. Критерий [9], рассматриваемый для случая обычной (т. е. неусловной) устойчивости, также содержится в результатах данной работы.

В статье использованы некоторые идеи М. Г. Крейна [10] (см. также и работу [11]), а также по примеру Беллмана [12] используется одна теорема типа Банаха—Штейнхауса [13,14]. Работа допускает дальнейшие обобщения как в направлении перехода к рассмотрению данных уравнений и задач в общих банаховых пространствах, так и в направлении перехода к так называемой условной устойчивости (т. е. дихотомии) в смысле работ Массера и Шеффера [15].

Пользуюсь случаем выразить признательность А. Халанаю за внимательное отношение, проявленное к работе, и за полезные советы, полученные от него при выполнении работы.

1. Предварительные замечания. Пусть R_n обозначает n-мерное пространство, а R_n^* — множество всех квадратных матриц n-порядка. Нормы вектора x и матрицы A будем обозначать соответственно

$$\|x\| = \|(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \qquad \|A\| = \|(a_{ij})_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

Будем рассматривать следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.1}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + \varphi(t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.2}$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\,X \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi(t)$—вектор-функция, определенная на $[0,+\infty)$ со значениями в множестве R_n, в дальнейшем она будет подвергаться различным ограничениям; $A(t)$ — функция, определенная на $[0,+\infty)$ со значениями в R_n^*, причем допускаем, что существует число $A_0 > 0$ такое, что $\|A(t)\| \leqslant A_0$ на $[0,+\infty)$; матрица X — квадратная $(n\times n)$.

Решение $x(t)$ уравнения (1.1) или (1.2), для которого $x(t_0)=x_0$, будем обозначать через $x(t, t_0, x_0)$. Аналогично решение $X(t)$ уравнения (1.3), для которого $X(t_0)=X_0$, будем обозначать через $X(t, t_0, X_0)$.

Если $I \in R_n^*$ — единичная матрица, то, вводя обычное обозначение $X(t, t_0)=X(t, t_0, I)$, будем иметь следующие соотношения

$$X(t,t_0,X_0)=X(t,t_0)X_0, \qquad X(t,t_0)=X(t,t_1)X(t_1,t_0), \qquad X(t_1,t_2)=X^{-1}(t_2,t_1)$$
$$t,\ t_0\ t_1,\ t_2 \geqslant 0$$

Если $x(t, t_0, x_0)$ — решение уравнения (1.1), то

$$x(t, t_0, x_0)=X(t, t_0)x_0 \tag{1.4}$$

Если $x(t, t_0, x_0)$ — решение уравнения (1.2), то

$$x(t, t_0, x_0)=X(t, t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} X(t, s)\varphi(s)\,ds \tag{1.5}$$

Для дальнейшего определим класс функциональных пространств, с которым будем постоянно иметь дело.

Пусть L — множество всех измеримых функций $\varphi(t)$ на $[0, +\infty)$ со значениями в R_n, интегрируемых на каждом конечном интервале, и пусть a — действительное число. Введем в рассмотрение следующие банаховы функциональные пространства (считая тождественными эквивалентные[1] между собой функции)

$$L_a^p=\left\{\varphi:\ \varphi\in L,\ \int_0^{+\infty}\|\varphi(s)\|^p e^{pas}\,ds<+\infty\right\}, \qquad p\in[1, +\infty) \tag{1.6}$$

т. е. множество функций φ, содержащихся в L (измеримых и удовлетворяющих неравенству, указанному в скобках) и

$$L_a^\infty=\{\varphi:\ \varphi\in L,\ \operatorname{ess\,sup}_{s\geqslant 0}\|\varphi(s)\|e^{as}<+\infty\} \tag{1.7}$$

т. е. множество функций из L, удовлетворяющих неравенству в скобках[2], при этом нормы определяются обычным образом:

$$\|\varphi\|_{L_a^p}=\|\varphi\|_{(p,a)}=\left[\int_0^{+\infty}\|\varphi(s)\|^p e^{pas}\,ds\right]^{1/p}, \qquad p\in[1, +\infty) \tag{1.8}$$

$$\|\varphi\|_{L_a^\infty}=\|\varphi\|_{(\infty,a)}=\operatorname{ess\,sup}_{s\geqslant 0}\|\varphi(s)\|e^{as} \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. Если a, b — два действительных числа, то линейный оператор Ω_a^b, преобразующий элементы $\varphi(s)$ из L_a^p в элементы $\varphi^*(s)$ из L_b^p определенный равенством

$$\varphi^*(s)=\Omega_a^b\varphi=\varphi(s)e^{(a-b)s} \tag{1.10}$$

имеет обратный оператор $[\Omega_a^b]^{-1}=\Omega_b^a$ и отображает изоморфно и даже изометрично (т. е. с сохранением расстояний между элементами) пространство L_a^p на L_b^p.

---

[1] Эквивалентные функции — это функции, совпадающие между собой всюду, кроме множества точек нулевой меры.

[2] Символ $\operatorname{ess\,sup}_{s\geqslant 0} y(s)$ означает нижнюю грань чисел, являющихся верхними гранями функций $y(s)$ на множествах, получающихся из $s\geqslant 0$ выбрасыванием множеств нулевой меры.

В частности, все пространства L_a^p изометричны пространству $L_0^p = L^p$. Далее, если $a < b$, то $L_a^p \supset L_b^p$ и топология в L_b^a сильнее, чем топология, индуцированная в L_b^p топологией пространства L_a^p (другими словами, из сходимости некоторой последовательности функций φ по норме, определенной для пространства L_b^p, обязательно вытекает сходимость той же последовательности по норме, определенной для L_a^p; в этом смысле, пользуясь терминологией [16,15], скажем, что пространство L_b^p сильнее, чем L_a^p.

2. Изучение систем (1.1), (1.2) и (1.3). Переходим теперь к рассмотрению ряда условий, налагаемых на решения уравнения (1.2) и (1.3). Эти условия обобщают некоторые известные ограничения на движения систем первого приближения в упоминавшихся выше критериях.

A (h, a, b). Существуют $h, a, b > 0$ такие, что

$$\| X(t, s) \| \leqslant h e^{as} e^{-bt} \qquad (t \geqslant s \geqslant 0)$$

B (a, b, p). Существуют $a, b > 0$ и $p \in [1, +\infty)$ такие, что

$$\sup_{t \geqslant 0} \int_0^t e^{pbt} \| X(t, s) \|^p e^{-pas} \, ds < +\infty$$

C (a, b, p). Существуют $a, b > 0$ и $p \in [1, +\infty]$ такие, что решение $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (1.2) принадлежит к L_b^∞ для каждого φ из L^p, т. е.

$$\operatorname{ess\,sup} \| x(t, t_0, x_0) \| e^{bt} = N < \infty \quad \text{при} \quad \int_0^\infty \| \varphi(s) \|^p e^{pas} \, ds < \infty$$

Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 2.1. Имеют место следующие соотношения:

Эквивалентности

$$\begin{array}{lll} (\alpha) & A(h, a, b) \Leftrightarrow C(a, b, 1) & \\ (\beta) & B(a, b, q) \Leftrightarrow C(a, b, p) & \text{для } \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \quad \begin{cases} p \in (1, +\infty] \\ q \in [1, +\infty) \end{cases} \end{array}$$

Импликации (следствия)

(γ) $B(a, b, q),\ C(a, b, p) \rightarrow A(h, a, b)$ для $p \in (1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty)$

(δ) $A(h, a, b) \Rightarrow C(a, b - \varepsilon, p)$ для $p \in (1, +\infty]$ и любого заданного $\varepsilon > 0$

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, сформулируем две леммы, доказательства которых, в силу их простоты, опустим. Отметим только, что используется одно неравенство Беллмана [17].

Лемма 2.1. Существует $T > 0$ такое, что

$$\| X(t; s) - X(t, t_0) \| \leqslant \tfrac{1}{2} \| X(t, t_0) \| \quad \text{при} \quad s \in [t_0 - T, t_0 + T] \qquad (t, t_0 \geqslant 0)$$

Непосредственным следствием этой леммы будет лемма.

Лемма 2.2. Существует $T > 0$ такое, что

$$\tfrac{1}{2} \| X(t, t_0) \| \leqslant \| X(t, s) \| \leqslant \tfrac{3}{2} \| X(t, t_0) \| \quad \text{при } s \in [t_0 - T, t_0 + T] \quad (t, t_0 \geqslant 0) \quad (2.1)$$

Сформулируем важную теорему типа Банаха — Штейнхауса, на которую существенным образом опирается доказательство теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Пусть при некоторых действительных числах a, b и при некотором $p \in [1, +\infty]$ интегралы

$$V_t u = \int_0^t X(t, s)\, u(s)\, ds \qquad (t \geqslant 0)$$

определяют линейный оператор V

$$V: L_a{}^p \to L_b{}^\infty, \qquad (Vu)(t) = V_t u$$

Тогда этот оператор будет непрерывным, т. е. существует число $M > 0$ такое, что

$$\| Vu \|_{(\infty,\, b)} \leqslant M \| u \|_{(p,\, a)}, \qquad u \in L_a^p, \tag{2.2}$$

Более того,

(*a*) если $p \in (1, +\infty]$, то

$$\sup_{t \geqslant 0} \left[\int_0^t e^{qbt} \| X(t, s) \|^q e^{-qas}\, ds \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty \qquad \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$$

(*b*) если $p = 1$, то

$$\sup_{t \geqslant s \geqslant 0} e^{bt} \| X(t, s) \| e^{-as} < +\infty$$

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы.

Пусть $\{t_k\}$ — последовательность всех положительных рациональных чисел, перенумерованных в некотором порядке, и пусть линейные ограниченные операторы

$$V_k : L_a{}^p \to R_n \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

определены формулами

$$V_k u = e^{bt_k} V_{t_k} u \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Так как для каждого $u \in L_a{}^p$ имеем по условию

$$\sup_{k \geqslant 1} \| V_k u \| < +\infty$$

то, согласно теореме Банаха — Штейнхауса [13], следует существование такого положительного числа M, что

$$\| V_k \| \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Следовательно,

$$\| V_k u \| \leqslant M \| u \|_{(p,\, a)} \quad \text{или} \quad e^{bt_k} \left\| \int_0^{t_k} X(t_k, s)\, u(s)\, ds \right\| \leqslant M \| u \|_{(p,\, a)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда по непрерывности

$$e^{bt} \left\| \int_0^t X(t, s)\, u(s)\, ds \right\| \leqslant M \| u \|_{(p,\, a)} \quad (t \geqslant 0) \quad \text{или} \quad \| Vu \|_{(\infty,\, b)} \leqslant M \| u \|_{(p,\, a)} \tag{2.3}$$

Докажем теперь вторую часть теоремы.

Пусть $x_{1j}(t, s), \ldots, x_{nj}(t, s)$ $(j = 1, \ldots, n)$ — столбцы матрицы $X(t, s)$.

(а) Пусть $p \in (1, +\infty)$, $t \geqslant 0$ — произвольные, но фиксированные числа. Рассмотрим функции

$$u_i(s) = (u_{ij}(s))_{1 \leqslant j \leqslant n} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где

$$u_{ij}(s) = \| X(t, s) \|^{\frac{q}{p} - 1} e^{-qas} x_{ij}(t, s) \left[\int_0^t \| X(t, s) \|^q e^{-qas} \, ds \right]^{-\frac{1}{p}}, \qquad s \in [0, t]$$

$$u_{ij}(s) = 0, \qquad s > t \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Тогда легко видеть, что

$$u_i \in L_a^p, \qquad \| u_i \|_{(p, a)} \leqslant 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Применим теперь неравенство (2.3); будем иметь

$$Me^{-bt} \geqslant \left\| \int_0^t X(t, s) u_i(s) \, ds \right\| = \left\| \int_0^t \left[\sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{\alpha j}(t, s) u_{ij}(s) \right) e_\alpha \right] ds \right\| =$$

$$= \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \left(\int_0^t \left[\sum_{j=1}^n x_{\alpha j}(t, s) u_{ij}(s) \right] ds \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \left| \int_0^t \left[\sum_{j=1}^n x_{ij}(t, s) u_{ij}(s) \right] ds \right| =$$

$$= \int_0^t \left[\sum_{j=1}^n x_{ij}^2(t, s) \right] \| X(t, s) \|^{\frac{q}{p} - 1} e^{-qas} \left[\int_0^t \| X(t, s) \|^q e^{-qas} \, ds \right]^{-\frac{1}{p}} ds \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Отсюда

$$Me^{-bt} \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_0^t \left[\sum_{j=1}^n x_{ij}^2(t, s) \right] \| X(t, s) \|^{\frac{q}{p} - 1} e^{-qas} \left[\int_0^t \| X(t, s) \|^q e^{-qas} \, ds \right]^{-\frac{1}{p}} ds$$

Но, как нетрудно видеть, при любых интегрируемых и неотрицательных на множестве E функциях $f_1(s), \ldots, f_n(s)$ имеет место следующее неравенство:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_E f_i(s) \, ds \geqslant \frac{1}{n} \int_E [\max_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(s)] \, ds$$

Окончательно получим

$$Me^{-bt} \geqslant \frac{1}{n} \int_0^t \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\sum_{j=1}^n x_{ij}^2(t, s) \right] \| X(t, s) \|^{\frac{q}{p} - 1} e^{-qas} \left[\int_0^t \| X(t, s) \|^q e^{-qas} \, ds \right]^{-\frac{1}{p}} ds =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\int_0^t \| X(t, s) \|^q e^{-qas} \, ds \right]^{\frac{1}{q}}$$

что и требовалось.

Случай $p = +\infty$ исчерпывается аналогично с той разницей, что функции $u_{ij}(s)$ определяются проще

$$u_{ij}(s) = \frac{x_{ij}(t, s) e^{-as}}{\| X(t, s) \|}, \qquad s \in [0, t]; \qquad u_{ij}(s) = 0, \qquad s > t \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

(b) Пусть $p = 1$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ — произвольные, но фиксированные числа. Применение леммы 2.2 к уравнению

$$\frac{dY}{d\tau} = -YA(\tau)$$

т. е. к матрице $Y(\tau, \sigma) = X^{-1}(\tau, \sigma) = X(\sigma, \tau)$ позволяет заключить о существовании такого независимого от t, s положительного числа T, что

$$\| X(s, t_0) \| \leqslant \frac{3}{2} \| X(t_0, t_0) \| = \frac{3}{2} < 2 \quad \text{при } s \in [t_0 - T, \ t_0 + T], \qquad t_0 \geqslant 0$$

Рассмотрим теперь функцию

$$u(s) = \begin{cases} (e^{-as} / 4T) \, X(s, t_0) \, x_0, & s \in [\alpha, \beta] \\ 0, & 0 \leqslant s \notin [\alpha, \beta] \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \max(0, t_0 - T) \\ \beta = \min(t, t_0 + T) \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что

$$u \in L_a^1, \qquad \| u \|_{(1, a)} \leqslant \| x_0 \|$$

Применяя неравенство (2.3), получим

$$Me^{-bt} \geqslant \left\| \int_0^t X(t, s) \, u(s) \, ds \right\| = \frac{1}{4T} \left\| \int_\alpha^\beta X(t, s) \, X(s, t_0) \, x_0 e^{-as} \, ds \right\| =$$

$$= \frac{1}{4T} \| X(t, t_0) \, x_0 \| \int_\alpha^\beta e^{-as} \, ds \geqslant \frac{1}{4T} \| X(t, t_0) \, x_0 \| \, e^{-a\beta} \, [\beta - \alpha]$$

следовательно, в силу произвольности x_0 имеем

$$\| X(t, t_0) \| \leqslant 4Me^{aT} e^{at_0} e^{-bt}, \qquad t \geqslant T, \quad \| X(t, t_0) \| \leqslant 2, \qquad t < T$$

Вводя обозначение $h = \max[2/\min(e^{at_0} e^{-bt}); \ 4Me^{2aT}]$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0 \leqslant T)$, окончательно получим

$$\| X(t, t_0) \| \leqslant he^{at_0} e^{-bt}, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.1. В случае (a) ограниченность матрицы $A(t)$ по $t \geqslant 0$ оказывается несущественной, а в случае (b) она, напротив, очень существенна, зато доказательство можно провести в произвольном банаховом пространстве. Заметим, что вся первая часть доказательства теоремы 2.2 переносится без изменений на случай банаховых пространств вместо R_n.

Замечание 2.2. Аналогичную теорему можно найти без доказательства у Беллмана [12]. В работе Беллмана теорема формулируется для конечномерных пространств при $a = b = 0$, $p = 1, 2, \ldots + \infty$ (см. также по этому поводу [13, 14]).

Доказательство теоремы 2.1. Импликация $A(h, a, b) \Rightarrow C(a, b, 1)$ очевидна. Для того чтобы показать, что $C(a, b, 1) \Rightarrow A(h, a, b)$, рассмотрим решение

$$x(t, 0, 0) = \int_0^t X(t, s) \, \varphi(s) \, ds \qquad (t \geqslant 0) \tag{2.4}$$

уравнения (1.2). По условию $(V_t \varphi) \, e^{bt} = xe^{bt}$ — ограниченная функция от $t \geqslant 0$ при любой $\varphi \in L_a^1$. Согласно теореме 2.2 отсюда следует существование такого числа $h > 0$, что

$$e^{-as} \| X(t, s) \| \, e^{bt} \leqslant h, \qquad t \geqslant s \geqslant 0 \tag{2.5}$$

а это означает как раз условие $A(h, a, b)$. Равносильность условий $C(a, b, p)$ и $B(a, b, q)$ доказывается аналогично.

Докажем теперь, что $B(a, b, q) \Rightarrow A(h, a, b)$. Для этого предположим, что хотя $B(a, b, q)$ выполнено, все же $A(h, a, b)$ не имеет места, т. е. не существует такого числа $h > 0$, чтобы было выполнено неравенство (2.5).

Возьмем последовательность $\{h_n\}$ такую, что

$$\lim h_n = + \infty \quad \text{при} \to + \infty \tag{2.6}$$

Тогда существуют последовательности $\{t_n\}$, $\{s_n\}$ такие, что

$$t_n \geqslant s_n, \qquad e^{-as_n} \| X(t_n, s_n) \| e^{bt_n} > h_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.7}$$

Легко видеть, что обязательно $\sup_n t_n = +\infty$; действительно, в противном случае (2.6) и (2.7) имели бы место на компактном[1] множестве

$$\{(t, s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \sup_n t_n < +\infty\}$$

что невозможно, так как $X(t, s)$ непрерывна по каждому аргументу и

$$\| X(t, s) \| \leqslant \| X(t, 0) \| \| X(0, s) \|$$

Извлекая (в случае надобности) три подпоследовательности, обозначаемые соответственно также через $\{h_n\}$, $\{t_n\}$, $\{s_n\}$, можно дополнительно предполагать, что даже $\lim t_n = +\infty$ при $n \to +\infty$.

Рассмотрим теперь два случая.

(a). Пусть имеем $\sup_n s_n < +\infty$; в таком случае согласно условию $B(a, b, q)$ существует $C > 0$ такое, что

$$C \geqslant \int_0^{t_n} e^{-qas} \| X(t_n, s) \|^q e^{qbt_n} ds \geqslant \int_{s_n}^{s_n+T} e^{-qas} \| X(t_n, s) \|^q e^{qbt_n} ds$$

при всех числах n достаточно больших: здесь T — число, определенное в лемме 2.2. Согласно той же лемме и неравенству (2.7) можно продолжать

$$C \geqslant \frac{1}{2^q} \int_{s_n}^{s_n+T} e^{-qas} \| X(t_n, s_n) \|^q e^{qbt_n} ds \geqslant \frac{T}{2^q} e^{-qaT} h_n^q \to +\infty$$

при $n \to +\infty$, что невозможно.

(b) Пусть теперь $\sup_n s_n = +\infty$; в таком случае можно предполагать, что $\lim s_n = +\infty$ при $n \to \infty$ и так же, как в случае (a), получим неравенства

$$C \geqslant \int_0^{t_n} e^{-qas} \| X(t_n, s) \|^q e^{qbt_n} ds > \int_{s_n-T}^{s_n} e^{-qas} \| X(t_n, s) \|^q e^{qbt_n} ds \geqslant \frac{T}{2^q} h_n^q \to +\infty$$

при $n \to +\infty$, что также невозможно.

Наконец, импликация $A(h, a, b) \Rightarrow C(a, b - \varepsilon, p)$ для любого $p \in (1, +\infty]$ и любого $\varepsilon > 0$ следует соответственно из неравенства

$$\| x(t, 0, 0) \| e^{(b-\varepsilon)t} \leqslant e^{(b-\varepsilon)t} \int_0^t \| X(t, s) \| \cdot \| \varphi(s) \| ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{(b-\varepsilon)t} \left(\int_0^t \| X(t, s) \|^q e^{-qas} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t \| \varphi(s) \|^p e^{pas} ds \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant ht^{\frac{1}{q}} e^{-\varepsilon t} \| \varphi \|_{(p, a)} \leqslant C_1$$

или из неравенства

$$\| x(t, 0, 0) \| e^{(b-\varepsilon)t} \leqslant (\sup_{s \geqslant 0} \| \varphi(s) \| e^{as}) e^{(b-\varepsilon)t} \int_0^t \| X(t, s) \| e^{-as} ds \leqslant hte^{-\varepsilon t} \| \varphi \|_{(\infty, a)} \leqslant C_2$$

где $C_1, C_2 > 0$ — достаточно большие постоянные. Теорема полностью доказана.

[1] Т. е. на таком множестве, для которого любая ограниченная последовательность имеет, по крайней мере, один предельный элемент.

3. Применение к задаче об устойчивости по первому приближению. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \Phi(x, t), \qquad x \in R_n \tag{3.1}$$

где $A(t)$ — матричная функция из (1.1), а $\Phi(x, t)$ — вектор-функция, определенная и непрерывная на множестве

$$t \geqslant 0, \qquad \|x\| \leqslant D \qquad (D > 0) \tag{3.2}$$

и удовлетворяющая условию

$$\|\Phi(x, t)\| \leqslant f(t)\|x\|^m \qquad (m \geqslant 1) \tag{3.3}$$

Здесь число m и действительная функция $f(t)$ уточняются ниже.

Для уравнения (3.1) существуют различные важные критерии устойчивости по первому приближению; их можно разбить на две группы. В первую группу включаются критерии, налагающие, в конечном счете, на матрицу $X(t, t_0)$ условие К. П. Персидского [1]

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant he^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Эти критерии образуют группу «равномерных» критериев. Ко второй группе относятся «обобщенные» критерии [5, 8, 9, 18], т. е. некоторые распространения критериев первой группы на «неравномерный» случай. Например, условие И. Г. Малкина в принятых обозначениях имеет вид

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant he^{\beta t_0} e^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad m > \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \tag{3.5}$$

Сформулируем теперь критерий устойчивости по первому приближению, охватывающий все вышеуказанные критерии.

Теорема (3.1). Пусть для уравнения первого приближения (1.1) выполнено условие $A(h, a, b)$ при некоторых $h > 0$, $a \geqslant b > 0$, а для $\Phi(x, t)$ выполнено неравенство (3.3); рассмотрим следующие случаи:

$$(\alpha) \quad m > \frac{a}{b}, \quad a \geqslant b, \quad p \in [1, +\infty], \quad f \in L_0^p, \quad \|f\|_{(p,0)} \leqslant K_p$$

$$\|x_0\| \leqslant D_1, \quad \|x_0\| \leqslant [2(m-1)h^m K_p \| e^{(a-mb)s}(\|q, 0)]^{-\frac{1}{m-1}} e^{-\frac{(a-b)m}{m-1}t_0}$$

$$(\beta) \quad m = \frac{a}{b}, \quad a > b, \quad p = 1, \quad f \in L_0^1, \quad \|f\|_{(1,0)} \leqslant K_1$$

$$\|x_0\| \leqslant D_1, \quad \|x_0\| \leqslant [2(m-1)h^m K_1]^{-\frac{1}{m-1}} e^{-\frac{(a-b)m}{m-1}t_0}$$

$$(\gamma) \quad m = \frac{a}{b}, \quad a = b, \quad p \in [1, +\infty], \quad f \in L_0^p, \quad \|f\|_{(p,0)} \leqslant K_p$$

$$\|x_0\| \leqslant D_1$$

$$(\delta) \quad m = \frac{a}{b}, \quad a = b, \quad p = +\infty, \quad f \in L_0^\infty, \quad \|f\|_{(\infty,0)} \leqslant K_\infty$$

$$K_\infty < \frac{b}{h}, \quad \|x_0\| < D_1$$

где $q = \frac{p}{p-1}$, $D_1 < D$, K_p, $p \in [1, +\infty]$ — постоянные, тогда для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (3.1) имеют место импликации

$$(\alpha),\ (\beta),\ (\gamma) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant He^{at_0}e^{-bt}\|x_0\|, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$
$$(\delta) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant he^{ct_0}e^{-ct}\|x_0\|, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

Здесь

$H = 2^{\frac{1}{m-1}} h$ в случаях (α), (β); $H = he^{hK_p}$ в случае (γ); $c = b - hK_\infty > 0$ в случае (δ).

Доказательство теоремы 3.1. Будем иметь

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \|X(t, t_0)\| \, \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|X(t, \tau)\| \, \|\Phi[x(\tau), \tau]\| \, d\tau, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

Полагая

$$t = t_0 + s, \qquad \tau = t_0 + \sigma, \qquad \|x(t_0 + s, t_0, x_0)\| = \varphi(s), \qquad \varphi(0) = \|x_0\|$$

и учитывая условие $A(h, a, b)$, получим

$$\varphi(s) \leqslant he^{at_0}e^{-b(t_0+s)}\varphi(0) + \int_0^s he^{a(t_0+\sigma)}e^{-b(t_0+s)}f(t_0+\sigma)\,\varphi^m(\sigma)\,d\sigma$$

или

$$\varphi(s) \leqslant ke^{-bs}\varphi(0) + ke^{-bs}\int_0^s e^{a\sigma}f(t_0+\sigma)\,\varphi^m(\sigma)\,d\sigma, \qquad k = \begin{Bmatrix} he^{(a-b)t_0}, & a > b \\ h, & a \leqslant b \end{Bmatrix}, \qquad h > 1$$

Легко заметить, что если $\psi(s)$ определяется уравнением

$$\psi(s) = ke^{-bs}\varphi(0) + ke^{-bs}\int_0^s e^{a\sigma}f(t_0+\sigma)\,\psi^m(\sigma)\,d\sigma, \qquad s \geqslant 0 \tag{3.6}$$

то, с одной стороны,

$$\varphi(s) \leqslant \psi(s), \qquad s \geqslant 0$$

а, с другой, простым дифференцированием равенства (3.6) получим

$$\dot{\psi} + b\psi = Q(s)\,\psi^m, \qquad Q(s) = ke^{(a-b)s}f(t_0+s) \tag{3.7}$$

В случаях (α), (β) это уравнение — типа Бернулли; решая его, получим

$$\psi(s) = \left[[\psi(0)]^{1-m}e^{(m-1)bs} - (m-1)\,ke^{(m-1)bs}\int_0^s e^{(a-mb)\sigma}f(t_0+\sigma)\,d\sigma\right]^{-\frac{1}{m-1}}, \quad s \geqslant 0$$

Но $\psi(0) = k\varphi(0)$ и $\varphi(s) \leqslant \psi(s)$, следовательно,

$$\varphi(s) \leqslant ke^{-bs}\varphi(0)\left\{1 - (m-1)\,k^m[\varphi(0)]^{m-1}\int_0^s e^{(a-mb)\sigma}f(t_0+\sigma)\,d\sigma\right\}^{-\frac{1}{m-1}} \tag{3.8}$$

Случай (α). Так как в этом случае $k = he^{(a-b)t_0}$ и

$$\int_0^s f(t_0+\sigma)\,e^{(a-mb)\sigma}\,d\sigma \leqslant \|f\|_{(p,\,0)}\,\|e^{(a-mb)\sigma}\|_{(q,\,0)}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{3.9}$$

то, учитывая неравенство (α) для $\|x_0\|$, из (3.8) и (3.9) следует

$$\varphi(s) \leqslant 2^{\frac{1}{m-1}}he^{(a-b)t_0}e^{-bs}\varphi(0) = 2^{\frac{1}{m-1}}he^{at_0}e^{-b(t_0+s)}\varphi(0)$$

или, в прежних обозначениях

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant He^{at_0}e^{-bt}\|x_0\|, \qquad H = 2^{\frac{1}{m-1}}h \tag{3.10}$$

Случай (β). Так как $mb = a$ и $p = 1$, то из (3.8) и из неравенства (β) для $\|x_0$ заключаем, как и выше, что имеет место (3.10).

Случаи (γ) и (δ). В этих случаях доказательство проводится аналогично с той только разницей, что уравнение (3.7) становится линейным; однако при этом оно в основном совпадает с результатами М. Г. Крейна [10] и Д. Л. Кучера [11].

Теорема 3.2. Если для уравнения (1.2) выполнено условие $C(a, b, r)$, $a, b > 0$, $r \in [1, +\infty]$, то имеют место все заключения теоремы 3.1. Более того, для случая (β) имеет место следующее уточнение:

(β′). Пусть при $a > b$, $m \geqslant a/b$

$$\|x_0\| \leqslant [4h]^{-1} e^{-at_\cdot} \left\{4 \sup_\psi \left\| e^{bt} \int_0^t X(t, s) \psi(s)\, ds \right\|_{(\infty, 0)} \right\}^{\frac{1}{m-1}}$$

где

$$\psi \in L_a^r, \qquad \|\psi\|_{(r, a)} \leqslant K_r, \qquad r \in [1, +\infty] \qquad (K_r > 0)$$

Тогда имеет место

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant H_1 e^{at_0} e^{-bt} \|x_0\|, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \qquad f \in L_0^r, \qquad \|f\|_{(r, 0)} \leqslant K_r$$

Доказательство. Так как из теоремы 2.1 следует, что $C(a, b, r) \Rightarrow A(h, a, b)$, то первая часть теоремы вытекает автоматически. Для доказательства последней части допустим, что для (1.2) выполнено условие $C(a, b, r)$ при некоторых $r \in [1, +\infty]$, $a > b > 0$ и что $m \geqslant a/b$. Из $C(a, b, r)$ вытекает, что

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant h e^{at_0} e^{-bt}, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

Выберем здесь $h > 1/4$. Покажем, что

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < 4h e^{at_0} e^{-bt} \|x_0\|, \qquad t \geqslant t_0$$

как только

$$\|x_0\| \leqslant [4h e^{at_0}]^{-1} \left\{4 \sup_\psi \left\| e^{bt} \int_0^t X(t, s) \psi(s)\, ds \right\|_{(\infty, 0)} \right\}^{-\frac{1}{m-1}}$$

Так как $\|x(t_0, t_0, x_0)\| = \|x_0\| < 4h \|x_0\| e^{(a-b)t_0}$, то при всех значениях $t \geqslant t_0$, достаточно близких к t_0, требуемое неравенство выполняется. Допустим, что существует первое такое значение $\tau > t_0$, для которого

$$\|x(\tau, t_0, x_0)\| = 4h e^{at_0} e^{-b\tau} \|x_0\|$$

причем, для всех $t \in [t_0, \tau)$ имеем

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < 4h e^{at_0} e^{-bt} \|x_0\| \tag{3.11}$$

Это предположение будет приводить к противоречию. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = \begin{cases} x(s, t_0, x_0), & s \in [t_0, \tau) \\ 0, & 0 \leqslant s \notin [t_0, \tau) \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что

$$\psi(s) = [4^m h^m \|x_0\|^m e^{amt_0}]^{-1} \Phi[\varphi(s), s] \in L_a^r, \qquad \|\psi\|_{(r, a)} \leqslant K_r$$

Из этого и из условия $C(a, b, r)$ следует при $t \in [t_0, \tau)$

$$e^{bt} \left\| \int_{t_0}^t X(t, s) \frac{\Phi[x(s), s]}{4^m h^m \|x_0\|^m e^{amt_0}} ds \right\| \leqslant \left\| e^{bt} \int_0^t X(t, s) \psi(s)\, ds \right\|_{(\infty, 0)}$$

Но тогда при тех же значениях t имеем

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \|X(t, t_0)\| \cdot \|x_0\| + \left\| \int_{t_0}^t X(t, s) \Phi[x(s), s]\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant h e^{at_0} e^{-bt} \|x_0\| + 4^m h^m e^{amt_0} \|x_0\|^m e^{-bt} \left\| e^{bt} \int_0^t X(t, s) \psi(s)\, ds \right\|$$

или

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant h e^{at_0} e^{-bt} \|x_0\| \left[1 + 4 \left\| e^{bt} \int_0^t X(t, s) \psi(s)\, ds \right\|_{(\infty, 0)} (4h e^{at_0})^{m-1} \|x_0\|^{m-} \right]$$

Отсюда, имея в виду условие, которому подчинено $\|x_0\|$, получим окончательно

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant 2he^{at_0}e^{-bt}\|x_0\|, \qquad t \in [t_0, \tau)$$

что невозможно, так как противоречит предположению

$$\|x(\tau, t_0, x_0)\| = 4he^{at_0}e^{-b\tau}\|x_0\|$$

Итак, теорема доказана.

Покажем теперь, что если уравнение (1.1) обладает положительными характеристическими числами, то всегда имеет место некоторая теорема об устойчивости по первому приближению.

Обозначим через $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ характеристические числа уравнения (1.1), а через $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ — характеристические числа уравнения

$$\frac{dY}{d\tau} = -YA(\tau), \qquad Y \in R_n^*$$

Тогда можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.3. Если $\lambda_1 > 0$, то при любых $a < \mu_n$, $b < \lambda_1$ и некотором $h > 0$ уравнение (1.1) обладает свойством $A(h, a, b)$ и даже свойством $C(a, b, p)$ при любом $p \in [1, +\infty]$. Следовательно, будут иметь место все заключения теорем (3.1) и (3.2).

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из нижеследующей леммы 3.1.

Обозначим через $N_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ нормальную систему решений уравнения (1.1) (см., например, [6], стр. 323—332) и через $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — его характеристические числа

$$\lambda_j = \text{характ. число } \{N_{1j}(t), \ldots, N_{nj}(t)\} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Через $N(t)$ будем обозначать матрицу, столбцы которой составлены из нормальных решений, отмеченных выше

$$\{N_{1j}(t), \ldots, N_{nj}(t)\}, \quad t \geqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Эта матрица имеет следующие свойства:

(a) $N(t) \in R_n^*, \qquad t \geqslant 0$

(b) $X(t, t_0) = N(t)N^{-1}(t_0) \qquad (t, t_0 \geqslant 0)$

(c) $\dfrac{dN^{-1}(s)}{ds} = -N^{-1}(s)A(s) \qquad (s \geqslant 0)$

(d) Если обозначить элементы матрицы $N^{-1}(s)$ через $N_{\alpha\beta}^{-1}$, то $N_{\alpha\beta}^{-1} = \Delta_{\beta\alpha}/\Delta$, где $\Delta = \det N$, а $\Delta_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $N_{\alpha\beta}$ в матрице N.

(e) Если $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ — характеристические числа матрицы $N^{-1}(s)$, т. е.

$$\mu_i = \text{характ. число } \{N_{i1}^{-1}(s), \ldots, N_{in}^{-1}(s)\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

то будем иметь (см., например, [19])

$$0 \geqslant \lambda_\alpha + \mu_\alpha \geqslant -\sigma$$

где $\sigma \geqslant 0$ — «коэффициент неправильности» уравнения (1.1), т. е. число, определяемое равенством

$$\text{характ. число}\left(\exp - \int_0^t \operatorname{Sp} A(u)\,du\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = -\sigma \qquad (\sigma \geqslant 0) \qquad (3.12)$$

В этих обозначениях имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1. Если $\lambda < \lambda_1$ и $\mu < \mu_n$, то существует

$$h = h(\mu, \lambda) > 0$$

такое, что

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant h e^{-\mu t_0} e^{-\lambda t} \qquad (t, t_0 \geqslant 0) \qquad (3.13)$$

Доказательство. Так как $\lambda < \lambda_1$ и λ_1 — наименьшее характеристическое число матрицы $N(t)$, то имеем

$$\|N(t)\| \leqslant h_1(\lambda) e^{-\lambda t}, \qquad t \geqslant 0, \qquad h_1(\lambda) \geqslant 0 \qquad (3.14)$$

Аналогично

$$\|N^{-1}(t_0)\| \leqslant h_2(\mu) e^{-\mu t_0}, \qquad t_0 \geqslant 0, \qquad h_2(\mu) > 0 \qquad (3.15)$$

Из свойства (b) и из (3.14) и (3.15) вытекает

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant \|N(t)\| \|N^{-1}(t_0)\| \leqslant h e^{-\mu t_0} e^{-\lambda t}, \qquad t, t_0 \geqslant 0$$

где $h = h_1 h_2$; лемма доказана.

Лемма 3.2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует

$$k = k(\varepsilon) > 0$$

такое, что

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant k e^{(\sigma + 2\varepsilon) t_0} e^{-(\lambda_1 - \varepsilon)(t - t_0)}, \qquad t, t_0 \geqslant 0 \qquad (3.16)$$

где σ — число, определенное равенством (3.12).

Доказательство. Обозначим столбцы матрицы $X(t, t_0)$ через

$$\{x_{1j}(t, t_0), \ldots, x_{nj}(t, t_0)\} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Из (b) имеем

$$x_{ij}(t, t_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} N_{i\alpha}(t) N_{\alpha j}^{-1}(t_0) \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Отсюда, имея в виду свойства (e), получим

$$|x_{ij}(t, t_0)| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} |N_{i\alpha}(t)|\, |N_{\alpha j}^{-1}(t_0)| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{ij} e^{-(\lambda_\alpha - \delta)t} e^{-(\mu_\alpha - \eta)t_0} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{ij} e^{-(\lambda_\alpha - \delta)(t - t_0)} e^{-(\mu_\alpha + \lambda_\alpha - \delta - \eta)t_0} \leqslant k_{ij} e^{(\sigma + \delta + \eta)t_0} e^{-(\lambda_1 - \delta)(t - t_0)}$$

где C_α^{ij}, $k_{ij} = n \max_\alpha C_\alpha^{ij}$ — постоянные. Следовательно, полагая $\delta = \eta = \varepsilon > 0$, имеем окончательно

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant k e^{(\sigma + 2\varepsilon)t_0} e^{-(\lambda_1 - \varepsilon)(t - t_0)} \qquad (t, t_0 \geqslant 0)$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3.1. «Обобщенный критерий» Ляпунова вытекает из обобщенного критерия И. Г. Малкина ([8] или [6], стр. 369) и, следовательно, из критерия, выраженного теоремой 3.1; действительно, так как условие Ляпунова означает [7]

$$m > 1 + \frac{\sigma}{\lambda_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где m — число из теоремы 3.1, λ_i — характеристические числа уравнения (1.1), а σ — число (3.12), то можно подобрать достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что

$$m > 1 + \frac{\sigma + 2\varepsilon}{\lambda_1 - \varepsilon}$$

Но тогда, в силу леммы 3.2, выполнено условие критерия И. Г. Малкина, что и требовалось. Можно еще отметить, что (как это легко можно видеть из примера И. Г. Малкина ([6], стр. 368) или [3]) критерий И. Г. Малкина не равносилен критерию Ляпунова.

Замечание 3.2. Критерий, предложенный в работе [9], сформулированный для случая обыкновенной (т. е. неусловной) устойчивости, включается в теорему 3.2 при $m = 2$, $a = 2k$, $b = k$, $p = +\infty$.

Поступила 12 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. Физ.-матем. об-ва при Казанском университете, 1936—37, т. VIII, сер. 3.
2. Персидский К. П. Об устойчивости движения по первому приближению. Матем. сб., 1933, т. 40.
3. Малкин И. Г. Об устойчивости по первому приближению. Сб. научн. тр. Каз. авиац. ин-та, 1935, № 3.
4. Perron O. Die stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Zeitschr., 1930, 32, 5 (schluss) Heft.
5. Ляпунов А. М. Общая задача по устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
7. Massera J. L. Contributions to stability theory. Annals of Math., 1956, vol. 64, p. 182—206.
8. Малкин И. Г. Об устойчивости движения по первому приближению. ДАН СССР, 1938, т. XVIII, № 3.
9. Майзель А. Д. Об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 2.
10. Крейн М. Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости. Усп. матем. н., 1948, т. III, вып. 3/25.
11. Кучер Д. Л. О некоторых критериях ограниченности решений системы дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1949, т. XIX, № 5.
12. Bellman R. On application of a Banach—Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of non linear differential and difference equations. Annals of Math., 1948, vol. 49, № 3, July.
13. Banach S., Steinhaus H. Sur le principe de la condensation des singularités. Fund. Math., 1927, 9.
14. Zygmund A. Trigonometrical series. Monografie Matematiyczne, Varszawa—Lwow, 1935, t. V.
15. Massera J. L., Schäffer J. J. Linear differential equations and functional analysis, IV, Math. Annalen, 1960, 139, 287—342.
16. Massera J. L., Schäffer J. J. Linear differential equations and functional analysis. I. Annals of Math., 1958, vol. 67, № 3, May.
17. Bellman R. Stability theory of differential equations, New York, Toronto, London, 1953.
18. Reghis M. Asupra stabilitătii «după prima aproximatie». Lucrările stiintifice ale Inst. Ped. Timisoara. Mat.-Fiz., 1958.
19. Perron O. Die ordnungszalen der Differentialgleichungssysteme. Math. Zeitschr., 1929, B. 31.