

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИХ К КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ

Н. Н. Серебрякова

(Горький)

Для одного частного вида динамических систем второго порядка, близких к кусочно-линейным, представляющих существенный интерес для приложений, получены, следуя Ю. И. Неймарку [1-3], необходимые и достаточные условия существования и устойчивости периодических движений различных возможных типов.

§ 1. Неавтономные системы, близкие к кусочно-линейным. Рассмотрим систему

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -\psi(x) + \mu f(x, y, t) \quad (1.1)$$

Пусть

$$\psi(x) \equiv \alpha_i x + \beta_i \quad \text{при } x_{i-1} < x < x_i \quad (i = \dots - 1, 0, 1, 2, \dots)$$

$$f(x, y, t) \equiv f_i^{(1)}(x, y, t) \quad \text{при } x_{i-1} < x < x_i, y > 0$$

$$f(x, y, t) \equiv f_i^{(2)}(x, y, t) \quad \text{при } x_{i-1} < x < x_i, y < 0$$

Здесь  $f_i^{(j)}(x, y, t)$  ( $j = 1, 2$ ) — аналитические функции, периодические по  $t$  с периодом  $2\pi$ , а  $\mu$  — малый положительный параметр. Предположим, что система (1.1) при  $\mu = 0$  имеет в начале координат ( $x = y = 0$ ) состояние равновесия типа центра или «сшитого центра».

Фазовыми координатами системы (1.1) при  $\mu \neq 0$  будут  $x, y$  и  $t$ . Точки плоскостей  $t = t_0$  и  $t = t_0 + 2\pi n$  с одинаковыми координатами  $x$  и  $y$  отождествляем.

Обозначим через  $S_k^{(1)}$  полуплоскости  $x = x_k$  при  $y > 0$ , а через  $S_k^{(2)}$  полуплоскости  $x = x_k$  при  $y < 0$  ( $k = \dots - 1, 0, 1 \dots$ ). Рассмотрим траектории системы (1.1) при  $\mu = 0$  и при  $\mu \neq 0$ , удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям

$$x = x_0, \quad y = y_0 > 0 \quad \text{при } t = t_0 \quad (1.2)$$

Введем новое время  $t = \tau + t_0$  и рассмотрим точечное преобразование полуплоскости  $S_0^{(1)}$  в полуплоскость  $S_k^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ).

Пусть фазовая траектория системы (1.1) при  $\mu = 0$  пересекает полуплоскости  $S_k^{(j)}$  в точках  $P_{k0}^{(j)}(x_k, y_{k0}^{(j)}, \tau_{k0}^{(j)})$ , а при  $\mu \neq 0$  в точках  $P_k^{(j)}(x_k, y_k^{(j)}, \tau_k^{(j)})$ . Докажем, что

$$y_k^{(j)} \approx y_{k0}^{(j)} + \frac{\mu}{y_{k0}^{(j)}} \int_{L_k^{(j)}} f(x, y, \tau + t_0) dx + \mu^2 (\dots) \quad (1.3)$$

$$\tau_k^{(j)} = \tau_{k0}^{(j)} + \mu \Phi_k^{(j)}(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

Здесь  $L_k^{(j)}$  — интегральная кривая системы (1.1) при  $\mu = 0$  от точки  $P_0(x_0, y_0, 0)$  до точки  $P_{k0}^{(j)}(x_k, y_{k0}, \tau_{k0}^{(j)})$ .

Докажем сначала, что формулы (1.3) имеют место при преобразовании полуплоскости  $S_0^{(1)}$  в полуплоскость  $S_1^{(1)}$ . Пусть для определенности в полосе между полуплоскостями  $S_0^{(1)}$  и  $S_1^{(1)}$  функция  $\psi(x)$  имеет вид

$$\psi(x) \equiv \alpha_1 x + \beta_1 \equiv \omega_1^2 x - a_1$$

Решение системы (1.1) при  $\mu = 0$ , удовлетворяющее условиям (1.2), имеет вид

$$x = \left(x_0 - \frac{a_1}{\omega_1^2}\right) \cos \omega_1 \tau + \frac{y_0}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau + \frac{a_1}{\omega_1^2} \equiv \alpha_{10}(\tau, y_0)$$

$$y = -\left(x_0 - \frac{a_1}{\omega_1^2}\right) \omega_1 \sin \omega_1 \tau + y_0 \cos \omega_1 \tau \equiv \beta_{10}(\tau, y_0)$$

Представляя решение системы (1.1) при  $\mu \neq 0$ , удовлетворяющее условиям (1.2), в виде ряда по степеням  $\mu$ , будем иметь (1.4)

$$x = \alpha_{10}(\tau, y_0) + \frac{\mu}{\omega_1} \int_0^\tau f_1^{(1)}[\alpha_{10}(u, y_0), \beta_{10}(u, y_0), u + t_0] \sin \omega_1(\tau - u) du + \mu^2(\dots)$$

$$y = \beta_{10}(\tau, y_0) + \mu \int_0^\tau f_1^{(1)}[\alpha_{10}(u, y_0), \beta_{10}(u, y_0), u + t_0] \cos \omega_1(\tau - u) du + \mu^2(\dots)$$

Пусть  $\tau_1^{(1)}$  — наименьший промежуток времени, за который изображающая точка достигнет полуплоскости  $S_1^{(1)}$ . Представим  $\tau_1^{(1)}$  в виде ряда

$$\tau_1^{(1)} = \tau_{10}^{(1)} + \mu \Phi_1^{(1)}(y_0, t_0) + \dots$$

Подставляя  $\tau = \tau_1^{(1)}$  в равенства (1.4), получим

$$y_1^{(1)} = y_{10}^{(1)} + \frac{\mu}{y_{10}^{(1)}} \int_0^{\tau_{10}^{(1)}} f_1^{(1)}[\alpha_{10}(u, y_0), \beta_{10}(u, y_0), u + t_0] \times \\ \times \left[ \left(\omega_1 x_1 - \frac{a_1}{\omega_1}\right) \sin \omega_1(\tau_{10}^{(1)} - u) + y_{10}^{(1)} \cos \omega_1(\tau_{10}^{(1)} - u) \right] du + \mu^2(\dots) = \\ = y_{10}^{(1)} + \frac{\mu}{y_{10}^{(1)}} \int_{L_1^{(1)}} f_1^{(1)}(x, y, \tau + t_0) dx + \mu^2(\dots)$$

$$\tau_1^{(1)} = \tau_{10}^{(1)} - \frac{\mu}{y_{10}^{(1)} \omega_1} \int_0^{\tau_{10}^{(1)}} f_1^{(1)}[\alpha_{10}(u, y_0), \beta_{10}(u, y_0), u + t_0] \times$$

$$\times \sin \omega_1(\tau_{10}^{(1)} - u) du + \mu^2(\dots) \equiv \tau_{10}^{(1)} + \mu \Phi_1^{(1)}(y_0, t_0) + \mu^2(\dots)$$

Здесь  $L_1^{(1)}$  — пространственная кривая  $x = \alpha_{10}(\tau, y_0)$ ,  $y = \beta_{10}(\tau, y_0)$ , проходящая от точки  $P_0(x_0, y_0, 0)$  до точки  $P_{10}^{(1)}(x_1, y_{10}^{(1)}, \tau_{10}^{(1)})$ . Аналогично доказывается справедливость формул (1.3) преобразования полуплоскости  $S_0^{(1)}$  в  $S_1^{(1)}$  и для случая, когда

$$\psi(x) \equiv \alpha_1 x + \beta_1 \equiv -\omega_1^2 x + a_1$$

Предположим, что формулы (1.3) имеют место при преобразовании полуплоскости  $S_0^{(1)}$  в  $S_{k-1}^{(1)}$ ; докажем, что они имеют место при преобразо-

вании; полуплоскости  $S_0^{(1)}$  в  $S_k^{(1)}$ . Пусть для определенности

$$\psi(x) \equiv \alpha_k x + \beta_k \equiv -\omega_k^2 x + a_k, \quad f(x, y, \tau + t_0) \equiv f_k^{(1)}(x, y, \tau + t_0) \\ \text{при } x_{k-1} < x < x_k$$

Разлагая решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям

$$x = x_{k-1}, \quad y = y_{k-1}^{(1)} \quad \text{при } \tau = \tau_{k-1}^{(1)} \quad (1.5)$$

в ряд по степеням  $\mu$ , будем иметь

$$x = \alpha_{k0}(\tau - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)}) + \\ + \frac{\mu}{\omega_k} \int_{\tau_{k-1}^{(1)}}^{\tau} f_k^{(1)}[\alpha_{k0}(u - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)}), \beta_{k0}(u - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)}), u + t_0] \operatorname{sh} \omega_k(\tau - u) du + \mu^2(\dots) \\ y = \beta_{k0}(\tau - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)}) + \quad (1.6)$$

$$+ \mu \int_{\tau_{k-1}^{(1)}}^{\tau} f_k^{(1)}[\alpha_{k0}(u - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)}), \beta_{k0}(u - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)}), u + t_0] \operatorname{ch} \omega_k(\tau - u) du + \mu^2(\dots)$$

Здесь  $x = \alpha_{k0}(\tau - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)})$ ,  $y = \beta_{k0}(\tau - \tau_{k-1}^{(1)}, y_{k-1}^{(1)})$  — решение системы (1.1) при  $\mu = 0$ , удовлетворяющее условиям (1.5).

Пусть  $\tau_k^{(1)}$  — момент времени, в который изображающая точка достигнет полуплоскости  $S_k^{(1)}$ . Представим  $\tau_k^{(1)}$  в виде

$$\tau_k^{(1)} = \tau_{k0}^{(1)} + \mu \Phi_k^{(1)}(y_0, t_0) + \dots$$

Подставляя  $\tau = \tau_k^{(1)}$  в равенства (1.6) и разлагая правые части в ряд по степеням  $\mu$ , получим

$$y_k^{(1)} = y_{k0}^{(1)} + \frac{\mu}{y_{k0}^{(1)}} \int_{L_{k-1}^{(1)}} f(x, y, \tau + t_0) dx + \\ + \frac{\mu}{y_{k0}^{(1)}} \int_{\tau_{k-1,0}^{(1)}}^{\tau_{k0}^{(1)}} f_k^{(1)}[\alpha_{k0}(u - \tau_{k-1,0}^{(1)}, y_{k-1,0}^{(1)}), \beta_{k0}(u - \tau_{k-1,0}^{(1)}, y_{k-1,0}^{(1)}), u + t_0] \times \\ \times [y_{k0}^{(1)} \operatorname{ch} \omega_k(\tau_{k0}^{(1)} - u) - \omega_k(x_k - a_k/\omega_k^2) \operatorname{sh} \omega_k(\tau_{k0}^{(1)} - u)] du + \mu^2(\dots) = \\ = y_{k0}^{(1)} + \frac{\mu}{y_{k0}^{(1)}} \int_{L_k^{(1)}} f(x, y, \tau + t_0) dx + \mu^2(\dots)$$

$$\tau_k^{(1)} = \tau_{k0}^{(1)} + \mu \left\{ \Phi_{k-1}^{(1)}(y_0, t_0) - \frac{1}{y_{k-1,0}^{(1)} y_{k0}^{(1)}} \frac{\partial \alpha_{k0}(\tau_{k0}^{(1)} - \tau_{k-1,0}^{(1)}, y_{k-1,0}^{(1)})}{\partial y_{k-1,0}^{(1)}} \times \right.$$

$$\times \int_{L_{k-1}^{(1)}} f(x, y, \tau + t_0) dx - \frac{1}{y_{k0}^{(1)}} \int_{\tau_{k-1,0}^{(1)}}^{\tau_{k0}^{(1)}} \frac{\partial \alpha_{k0}(\tau_{k0}^{(1)} - u, y_{k-1,0}^{(1)})}{\partial y_{k-1,0}^{(1)}} \times$$

$$\times f_k^{(1)}[\alpha_{k0}(u - \tau_{k-1,0}^{(1)}, y_{k-1,0}^{(1)}), \beta_{k0}(u - \tau_{k-1,0}^{(1)}, y_{k-1,0}^{(1)}), u + t_0] du \left. \right\} + \\ + \mu^2(\dots) \equiv \tau_{k0}^{(1)} + \mu \Phi_k^{(1)}(y_0, t_0) + \mu^2(\dots)$$

Аналогично показывается справедливость формул (1.3) при

$$\psi(x) = \alpha_k x_k + \beta_k \equiv \omega_k^2 x - a_k$$

Пусть при дальнейшем движении точка траектории системы (1.1) при  $\mu \neq 0$  пересекает плоскость  $y = 0$  в точке  $M(x_k^*, 0, \tau_k^*)$ , а при  $\mu = 0$  в точке  $M_0(x_{k0}^*, 0, \tau_{k0}^*)$ , причем  $x_k \leq x_k^* \leq x_{k+1}$ ,  $x_k \leq x_{k0}^* \leq x_{k+1}$ .

Предположим, для определенности, что

$$\psi(x) \equiv \alpha_{k+1} x + \beta_{k+1} \equiv -\omega_{k+1}^2 x + a_{k+1} \quad \text{при } x_k < x < x_{k+1}$$

Решение системы (1.1) при  $\mu \neq 0$ , удовлетворяющее условиям

$$x = x_k, \quad y = y_k^{(1)} \quad \text{при } \tau = \tau_k^{(1)} \quad (1.7)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{k+1,0}(\tau - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + \frac{\mu}{\omega_{k+1}} \int_{\tau_k^{(1)}}^{\tau} \text{sh } \omega_{k+1}(\tau - u) \times \\ &\times f_{k+1}^{(1)}[\alpha_{k+1,0}(u - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)}), \beta_{k+1,0}(u - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)}), u + t_0] du + \mu^2(\dots) \\ y &= \beta_{k+1,0}(\tau - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + \mu \int_{\tau_k^{(1)}}^{\tau} \text{ch } \omega_{k+1}(\tau - u) \times \\ &\times f_{k+1}^{(1)}[\alpha_{k+1,0}(u - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)}), \beta_{k+1,0}(u - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)}), u + t_0] du + \mu^2(\dots) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $\alpha_{k+1,0}(\tau - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ ,  $\beta_{k+1,0}(\tau - \tau_k^{(1)}, y_k^{(1)})$  — решение системы (1.1) при  $\mu = 0$ , удовлетворяющее условиям (1.7). Представим  $\tau_k^*$  в виде  $\tau_k^* = \tau_{k0}^* + \mu \Phi_k^*(y_0, t_0) + \dots$ . Подставляя  $\tau = \tau_k^*$  в первое из равенств (1.8) и разлагая полученное выражение по степеням  $\mu$ , имеем

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_{k0}^* + \mu \left\{ \frac{\text{sh } \omega_{k+1}(\tau_{k0}^* - \tau_{k0}^{(1)})}{\omega_{k+1} y_{k0}^{(1)}} \int_{L_k^{(1)}} f(x, y, \tau + t_0) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega_{k+1}} \int_{\tau_{k0}^{(1)}}^{\tau_{k0}^*} \text{sh } \omega_{k+1}(\tau_{k0}^* - u) \times \right. \\ &\quad \left. \times f_{k+1}^{(1)}[\alpha_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^{(1)}, y_{k0}^{(1)}), \beta_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^{(1)}, y_{k0}^{(1)}), u + t_0] du \right\} + \mu^2(\dots) \end{aligned}$$

Решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям

$$x = x_k^*, \quad y = 0 \quad \text{при } \tau = \tau_k^* \quad (1.9)$$

при  $x_k < x < x_{k+1}$ ,  $y < 0$ , можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= \alpha'_{k+1,0}(\tau - \tau_k^*, x_k^*) + \frac{\mu}{\omega_{k+1}} \int_{\tau_k^*}^{\tau} \text{sh } \omega_{k+1}(\tau - u) \times \\ &\times f_{k+1}^{(2)}[\alpha'_{k+1,0}(u - \tau_k^*, x_k^*), \beta'_{k+1,0}(u - \tau_k^*, x_k^*), u + t_0] du + \mu^2(\dots) \\ y &= \beta'_{k+1,0}(\tau - \tau_k^*, x_k^*) + \mu \int_{\tau_k^*}^{\tau} \text{ch } \omega_{k+1}(\tau - u) \times \\ &\times f_{k+1}^{(2)}[\alpha'_{k+1,0}(u - \tau_k^*, x_k^*), \beta'_{k+1,0}(u - \tau_k^*, x_k^*), u + t_0] du + \mu^2(\dots) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь  $\alpha_{k+1,0}(\tau - \tau_k^*, x_k^*)$ ,  $\beta_{k+1,0}(\tau - \tau_k^*, x_k^*)$  — решение системы (1.1) при  $\mu = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям (1.9).

Пусть  $\tau_k^{(2)}$  — момент времени, в который изображающая точка достигнет полуплоскости  $S_k^{(2)}$ . Представим  $\tau_k^{(2)}$  в виде ряда

$$\tau_k^{(2)} = \tau_{k0}^{(2)} + \mu \Phi_k^{(2)}(y_0, t_0) + \dots$$

Подставляя  $\tau = \tau_k^{(2)}$  в равенстве (1.10) и принимая во внимание, что  $x(\tau_k^{(2)}) = x_k$ , будем иметь

$$\begin{aligned} y_k^{(2)} &= y_{k0}^{(2)} + \frac{\mu}{y_{k0}^{(2)}} \int_{L_k^{(1)}} f(x, y, \tau + t_0) dx + \\ &+ \frac{\mu}{y_{k0}^{(2)}} \left\{ \int_{\tau_{k0}^{(1)}}^{\tau_{k0}^*} f_{k+1}^{(1)} [\alpha_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^{(1)}, y_{k0}^{(1)}), \beta_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^{(1)}, y_{k0}^{(1)}), u + t_0] \times \right. \\ &\quad \times \omega_{k+1} \left( x_{k0}^* - \frac{a_{k+1}}{\omega_{k+1}^2} \right) \text{sh } \omega_{k+1} (u - \tau_{k0}^*) du + \\ &\quad + \int_{\tau_{k0}^*}^{\tau_{k0}^{(2)}} f_{k+1}^{(2)} [\alpha_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^*, x_{k0}^*), \beta_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^*, x_{k0}^*), u + t_0] \times \\ &\quad \times \left[ y_{k0}^{(2)} \text{ch } \omega_{k+1} (u - \tau_{k0}^{(2)}) + \omega_{k+1} \left( x_k - \frac{a_{k+1}}{\omega_{k+1}^2} \right) \text{sh } \omega_{k+1} (u - \tau_{k0}^{(2)}) \right] du \left. \right\} + \\ &+ \mu^2 (\dots) = y_{k0}^{(2)} + \frac{\mu}{y_{k0}^{(2)}} \int_{L_k^{(2)}} f(x, y, \tau + t_0) dx + \mu^2 (\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_k^{(2)} &= \tau_{k0}^{(2)} + \mu \left\{ \Phi_k^{(1)}(y_0, t_0) - \frac{1}{y_{k0}^{(2)} y_{k0}^{(1)}} \frac{\partial \alpha_{k+1,0}(\tau_{k0}^{(2)} - \tau_{k0}^{(1)}, y_{k0}^{(1)})}{\partial y_{k0}^{(1)}} \times \right. \\ &\quad \times \int_{L_k^{(1)}} f(x, y, \tau + t_0) dx - \frac{1}{y_{k0}^{(2)}} \int_{\tau_{k0}^{(1)}}^{\tau_{k0}^*} \frac{\partial \alpha_{k+1,0}(\tau_{k0}^{(2)} - u, y_{k0}^{(1)})}{\partial y_{k0}^{(1)}} \times \\ &\quad \times f_{k+1}^{(1)} [\alpha_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^{(1)}, y_{k0}^{(1)}), \beta_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^{(1)}, y_{k0}^{(1)}), u + t_0] du - \\ &\quad - \frac{1}{y_{k0}^{(2)}} \int_{\tau_{k0}^*}^{\tau_{k0}^{(2)}} f_{k+1}^{(2)} [\alpha_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^*, x_{k0}^*), \beta_{k+1,0}(u - \tau_{k0}^*, x_{k0}^*), u + t_0] \times \\ &\quad \times \frac{\partial \alpha_{k+1,0}(\tau_{k0}^{(2)} - u, y_{k0}^{(1)})}{\partial y_{k0}^{(1)}} du \left. \right\} + \mu^2 (\dots) \equiv \tau_{k0}^{(2)} + \mu \Phi_k^{(2)}(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots) \end{aligned}$$

Следовательно, формулы (1.3) сохраняют свой вид и при пересечении траекторией плоскости  $y = 0$ .

Возвращаясь в формулах (1.3) к прежнему времени  $t$ , будем иметь

$$y_k^{(j)} = y_{k0}^{(j)} + \frac{\mu}{y_{k0}^{(j)}} \int_{L_k^{(j)}} f(x, y, t) dx + \mu^2 (\dots)$$

$$t_k^{(j)} \equiv t_0 + \tau_k^{(j)} = t_0 + \tau_{k0}^{(j)} + \mu \Phi_k^{(j)}(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

Рассмотрим теперь преобразование полуплоскости  $S_0^{(1)}$  в себя. Предположим, что система (1.1) при  $\mu = 0$  имеет семейство периодических решений  $L(y_0, t_0)$ , зависящее от параметров  $y_0$  и  $t_0$  и такое, что  $T'(y_0) \neq 0$ . Точечное преобразование полуплоскости  $S_0^{(1)}$  в себя в окрестности кривой  $L$ , проходящей через точки  $P_0(x_0, y_0, t_0)$  и  $P_0^{(1)}[x_0, y_0, t_0 + mT(y_0)]$ , имеет вид

$$y_0^{(1)} = y_0 + \frac{\mu}{y_0} \int_L f(x, y, t) dx + \mu^2 (\dots) \equiv y_0 + \mu F(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

$$t_0^{(1)} = t_0 + mT(y_0) + \mu \Phi(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots) \quad (1.11)$$

где  $T(y_0)$  — период периодического решения системы (1.1) при  $\mu = 0$ , зависящий от  $y_0$ ;  $m$  — число витков кривой  $L$  вокруг оси  $t$ .

Очевидно, имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.1.** Для того чтобы точечное преобразование (1.11) имело неподвижную точку

$$P_0(x_0, y_0^\circ + \mu y_1, t_0^\circ + \mu t_1)$$

стремящуюся к точке  $P(x_0, y_0^\circ, t_0^\circ)$  при  $\mu \rightarrow 0$ , необходимо, чтобы выполнялись условия

$$F(y_0^\circ, t_0^\circ) \equiv \frac{1}{y_0^\circ} \int_{L_0} f(x, y, t) dx = 0, \quad T(y_0^\circ) = \frac{2\pi n}{m} \quad (1.12)$$

где  $L$  — замкнутая интегральная кривая системы (1.1) при  $\mu = 0$ , проходящая через отождествленные точки  $P(x_0, y_0^\circ, t_0^\circ)$ ,  $P^{(1)}(x_0, y_0^\circ, t_0^\circ + 2\pi n)$ , а  $n/m$  — рациональная дробь.

**Теорема 1.2.** Пусть  $y_0^\circ$  и  $t_0^\circ$  — решение системы (1.12). Если

$$T'(y_0^\circ) F_{t_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) \neq 0$$

то преобразование (1.11) имеет единственную неподвижную точку

$$P_0(x_0, y_0^\circ + \mu y_1, t_0^\circ + \mu t_1)$$

стремящуюся к точке  $P(x_0, y_0^\circ, t_0^\circ)$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Введем обозначения

$$\alpha(y_0, t_0) \equiv \mu F(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

$$\beta(y_0, t_0) \equiv -2\pi n + T(y_0) m + \mu \Phi(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

Вычисленный в точке  $y_0 = y_0^\circ + \mu y_1$ ,  $t_0 = t_0^\circ + \mu t_1$  якобиан

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(y_0, t_0)} = -\mu m T'(y_0^\circ) F_{t_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) + \mu^2 (\dots)$$

отличен от нуля при достаточно малых  $\mu$ . Следовательно, при достаточно малых  $\mu$  система

$$y_0 = y_0^\circ + \mu F(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

$$t_0 + 2\pi n = t_0^\circ + mT(y_0) + \mu \Phi(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

разрешима относительно  $y_0$  и  $t_0$  и преобразование (1.11) имеет неподвижную точку  $P_0(x_0, y_0, t_0)$ .

Выясним, далее, условия устойчивости неподвижной точки преобразования (1.11). Характеристическое уравнение точечного преобразования (1.11) с точностью до членов второго порядка малости относительно  $\mu$  имеет вид

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

где

$$p = -2 - \mu [\Phi_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + F_{y_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ)] + \mu^2 (\dots)$$

$$q = 1 + \mu [-mT'(y_0^\circ) F_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + \Phi_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + F_{y_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ)] + \mu^2 (\dots)$$

Условия устойчивости неподвижной точки преобразования (1.11)

$$1 + p + q \equiv -\mu mT'(y_0^\circ) F_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + \mu^2 (\dots) > 0$$

$$1 - p + q \equiv 4 + \mu (\dots) > 0$$

$$q - 1 \equiv \mu [-mT'(y_0^\circ) F_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + \Phi_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + F_{y_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ)] + \mu^2 (\dots) < 0$$

Эти условия выполняются при достаточно малых  $\mu$ , если

$$\begin{aligned} T'(y_0^\circ) F_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) &< 0 \\ -mT'(y_0^\circ) F_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + \Phi_{t_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) + F_{y_0}'(y_0^\circ, t_0^\circ) &< 0 \end{aligned}$$

Неподвижная точка будет неустойчивой, если не выполняется хотя бы одно из этих неравенств.

Предположим далее, что система (1.1) при  $\mu = 0$  имеет семейство периодических решений  $L(y_0, t_0)$ , период которых не зависит от  $y_0$ .

В этом случае кривые  $L$  должны быть целиком расположены между плоскостями  $x = x_{-1} < 0$  и  $x = x_1 > 0$ , где функция  $\psi(x)$  имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} \omega_1^2 x & \text{при } x_{-1} < x < 0 \\ \omega_2^2 x & \text{при } 0 < x < x_1 \end{cases}$$

В этом случае точечное преобразование полуплоскости  $S_0^{(1)}(x = 0, y > 0)$  в себя в окрестности кривой  $L$ , проходящей через точки  $P_0(0, y_0, t_0)$  и  $P_0^{(1)}[0, y_0, t_0 + m(\pi/\omega_1 + \pi/\omega_2)]$ , имеет вид:

$$y_0^{(1)} = y_0 + \frac{\mu}{y_0} \int_L f(x, y, t) dx + \mu^2 (\dots) \equiv y_0 + \mu F(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

$$t_0^{(1)} = t_0 + m \left( \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2} \right) + \dots \quad (1.13)$$

$$+ \frac{\mu}{y_0} \left\{ \frac{1}{\omega_2} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \int_{L_{i1}} f(x, y, t) \sin \omega_2 \left( t - i \frac{\pi}{\omega_1} - t_0 \right) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+1} \int_{L_{i2}} f(x, y, t) \sin \omega_1 \left[ t - (i+1) \frac{\pi}{\omega_2} - t_0 \right] dt \right\} + \mu^2 (\dots) \equiv$$

$$\equiv t_0 + m \left( \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2} \right) + \mu \Phi(y_0, t_0) + \mu^2 (\dots)$$

Здесь  $m$  — число витков интегральной кривой  $L$  вокруг оси  $t$ ;  $L_{i1}$  — кусок интегральной кривой  $L$ , заключенный между плоскостями

$$t = t_0 + (\pi / \omega_1 + \pi / \omega_2) i + \pi / \omega_2, \quad t = t_0 + (\pi / \omega_1 + \pi / \omega_2) i$$

а  $L_{i2}$  — кусок интегральной кривой  $L$ , заключенный между плоскостями

$$t = t_0 + (\pi / \omega_1 + \pi / \omega_2) i + \pi / \omega_2, \quad t = t_0 + (\pi / \omega_1 + \pi / \omega_2) (i + 1)$$

Очевидно, если  $\omega_1 = \omega_2$ , то

$$\Phi(y_0, t_0) = \frac{1}{y_0 \omega_1} \int_L f(x, y, t) \sin \omega_1 (t - t_0) dt$$

Из выражений (1.13) следует, что точечное преобразование (1.13) может иметь неподвижную точку только при рациональных  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Предположим, что число  $m$  удовлетворяет условию

$$m \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) = 2n$$

где  $n$  — целое положительное число.

Тогда аналогично предыдущему получим следующие теоремы.

**Теорема 1.3.** Для того чтобы точечное преобразование (1.13) имело неподвижную точку  $P_0(0, y_0^\circ + \mu y_1, t_0^\circ + \mu t_1)$ , стремящуюся к точке  $P(0, y_0^\circ, t_0^\circ)$  при  $\mu \rightarrow 0$ , необходимо, чтобы

$$F(y_0^\circ, t_0^\circ) = 0, \quad \Phi(y_0^\circ, t_0^\circ) = 0 \quad (1.14)$$

**Теорема 1.4.** Пусть  $y_0^\circ$  и  $t_0^\circ$  — решение системы (1.14). Если

$$F_{t_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) \Phi_{y_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) - F_{y_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) \Phi_{t_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) \neq 0$$

то преобразование (1.13) имеет единственную неподвижную точку

$$P_0(0, y_0^\circ + \mu y_1, t_0^\circ + \mu t_1)$$

стремящуюся к точке  $P(0, y_0^\circ, t_0^\circ)$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Эта неподвижная точка устойчива, если

$$\begin{aligned} F_{y_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) \Phi_{t_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) - F_{t_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) \Phi_{y_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) &> 0 \\ \Phi_{t_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) + F_{y_0'}(y_0^\circ, t_0^\circ) &< 0 \end{aligned}$$

и неустойчива, если не выполняется хотя бы одно из этих неравенств.

**§ 2. Автономная система, близкая к кусочно-линейной.** Рассмотрим систему

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -\psi(x) + \mu f(x, y) \quad (2.1)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \psi(x) &\equiv \alpha_i x + \beta_i && \text{при } x_{i-1} < x < x_i \\ f(x, y) &= f_i^{(1)}(x, y) && \text{при } x_{i-1} < x < x_i, y > 0 \\ f(x, y) &= f_i^{(2)}(x, y) && \text{при } x_{i-1} < x < x_i, y < 0 \end{aligned} \quad (i = \dots -1, 0, 1, \dots)$$

Функции  $f_i^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) — аналитические по  $x$  и  $y$ , а  $\mu$  — малый положительный параметр.

Обозначим через  $S_i^{(1)}$  полупрямые  $x = x_i$  при  $y > 0$ , а через  $S_i^{(2)}$  — полупрямые  $x = x_i$  при  $y < 0$  и рассмотрим фазовые траектории системы

(2.1) при  $\mu = 0$  и при  $\mu \neq 0$ , удовлетворяющие начальным условиям

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (2.2)$$

Пусть фазовая траектория системы (2.1) при  $\mu = 0$  пересекает полу-прямые  $S_k^{(j)}$  в точках  $P_{k0}^{(j)}(x_k, y_{k0}^{(j)})$ , а при  $\mu \neq 0$  в точках  $P_k^{(j)}(x_k, y_k^{(j)})$ .

Предположим, что система (2.1) при  $\mu = 0$  имеет семейство периодических решений  $L(y_0)$ , зависящее от параметра  $y_0$ . Тогда точечное преобразование полупрямой  $S_0^{(1)}$  в себя в окрестности замкнутой кривой  $L$  имеет вид

$$y_0^{(1)} = y_0 + \frac{\mu}{y_0} \int_L f(x, y) dx + \mu^2 (\dots) \equiv y_0 + \mu F(y_0) + \mu^2 (\dots) \quad (2.3)$$

где  $L = L(y_0)$  — замкнутая интегральная кривая, проходящая через точку  $P_0(x_0, y_0)$ .

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.1.** Для того чтобы преобразование (2.3) при достаточно малых  $\mu$  имело неподвижную точку

$$P_0(x_0, y_0^\circ + \mu y_1)$$

стремящуюся к точке  $P(x_0, y_0^\circ)$  при  $\mu \rightarrow 0$ , необходимо, чтобы выполнялось условие

$$F(y_0^\circ) = 0 \quad (2.4)$$

**Теорема 2.2.** Пусть  $y_0^\circ$  — решение уравнения (2.4). Если  $F'(y_0^\circ) \neq 0$ , то преобразование (2.3) имеет единственную неподвижную точку,  $P_0(x_0, y_0^\circ + \mu y_1)$ , стремящуюся к точке  $P(x_0, y_0^\circ)$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Эта неподвижная точка устойчива, если  $F'(y_0^\circ) < 0$ , и неустойчива, если  $F'(y_0^\circ) > 0$ .

Полученные условия существования и устойчивости периодического решения системы (2.1) аналогичны соответствующим условиям, приведенным в работе [4], для систем, близких к гамильтоновым.

Если функции  $\psi(x)$  и  $f(x, y)$  — периодические по  $x$  с периодом  $2\pi$ , то фазовое пространство системы (2.1) будет цилиндрическим с отождествленными прямыми  $x = x_0$  и  $x = 2\pi + x_0$ . Теоремы 2.1 и 2.2 будут давать в этом случае необходимые и достаточные условия существования неподвижной точки, соответствующей периодическому решению, охватывающему цилиндр. Кривая  $L(y_0^\circ)$  в равенстве (2.4) будет в этом случае замкнутой интегральной кривой системы (2.1) при  $\mu = 0$ , проходящей через точку  $P(x_0, y_0^\circ)$  и охватывающей фазовый цилиндр.

§3. *Пример.* Рассмотрим уравнение из теории электрических машин [5-8]

$$\ddot{\varphi} + \lambda [1 - \beta \Theta'(\varphi)] \dot{\varphi} + \Theta(\varphi) = \gamma \quad (\lambda > 0, \gamma > 0)$$

где функция  $\Theta(\varphi)$  — периодическая с периодом  $2\pi$ , при кусочно-линейной аппроксимации

$$\Theta(\varphi) = \Theta_1(\varphi) \equiv (-1)^k \frac{2}{\pi} \varphi + (-1)^{k-1} 2k$$

$$(2k - 1) \frac{\pi}{2} < \varphi < (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = \dots - 1, 0, 1, \dots)$$

В качестве фазового пространства будем рассматривать полосу, заключенную между прямыми  $\varphi = -\pi$  и  $\varphi = \pi$ . Точки этих прямых, имеющие одинаковые ординаты, отождествляем. Введем малый положительный параметр, полагая  $\lambda = \mu\lambda_0$ ,

$\gamma = \mu\gamma_0$ , и перейдем к системе, близкой к кусочно-линейной

$$d\varphi / dt = y, \quad dy / dt = -\Theta_1(\varphi) + \mu \{ \gamma_0 - \lambda_0 [1 - \beta\Theta_1'(\varphi)] y \} \quad (3.1)$$

Изучение периодических решений системы (3.1) позволяет строго установить качественную картину разбиения фазового пространства на траектории для малых  $\lambda$  и  $\gamma$  и выяснить, как изменяется эта картина при изменении параметров.

Траектории системы (3.1) при  $\mu = 0$  имеют либо вид замкнутых кривых, охватывающих состояние равновесия (типа центра) в точке  $\varphi = 0, y = 0$ , либо замкнутых кривых, сшитых из кусков эллипсов и гипербол, охватывающих фазовое пространство (цилиндр). Эти две области разделяются сепаратрисами, составленными из кусков прямых и эллипсов, идущими из седла в седло (в точках  $(-\pi, 0), (\pi, 0)$  система (3.1) при  $\mu = 0$  имеет простые седла).

При  $\mu \neq 0$ , но сколь угодно малом, замкнутые кривые, охватывающие состояние равновесия или фазовый цилиндр, превращаются в спирали, и только некоторые из интегральных кривых остаются замкнутыми, т. е. превращаются в предельные циклы. Сепаратрисы, образующие вместе с состояниями равновесия при  $\mu = 0$  замкнутый контур, для  $\mu \neq 0$  вообще не будут образовывать такой контур, также превращаясь в спирали, накручивающиеся на предельный цикл или состояние равновесия или уходящие в бесконечность. Знание характера и расположения предельных циклов позволяет однозначно определить качественную структуру разбиения фазового пространства на траектории.

Система (3.1) может иметь как циклы, охватывающие цилиндр, так и циклы, охватывающие состояние равновесия  $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$ . Будем отыскивать циклы, охватывающие цилиндр. Тогда, применяя теорему 2.1, будем иметь

$$F_1(y_0^0) = \frac{1}{y_0^0} \left\{ 2 \int_{L_1} \left[ \gamma_0 - \lambda_0 \left( 1 + \beta \frac{2}{\pi} \right) y \right] d\varphi + 2 \int_{L_2} \left[ \gamma_0 - \lambda_0 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \beta \right) y \right] d\varphi \right\} \quad (3.2)$$

Здесь  $L_1$  и  $L_2$  — части интегральной кривой системы (3.1) при  $\mu = 0$ , проходящей через точку  $P(-\pi, y_0^0)$ , расположенные соответственно в интервалах  $-\pi \leq \varphi \leq -\pi/2$  и  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ . Уравнения кривых  $L_1$  и  $L_2$  соответственно будут

$$(L_1) \frac{y^2}{2} - \frac{(\varphi + \pi)^2}{\pi} = \frac{(y_0^0)^2}{2}, \quad (L_2) \frac{y^2}{2} + \frac{\varphi^2}{\pi} = \frac{(y_0^0)^2}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Интегрирование ведется в направлении движения по траекториям. Если  $y_0^0 > 0$ , то, вычисляя интеграл в правой части равенства (3.2), получим

$$F_1(y_0^0) = \frac{1}{y_0^0} \left\{ 2\pi\gamma_0 - \lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2h} + h \left( 1 + \frac{2}{\pi} \beta \right) \ln \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2h} \right)^2 \frac{1}{|2h|} + \left( 1 - \beta \frac{2}{\pi} \right) (2h + \pi) \arcsin \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \sqrt{2h + \pi}} \right] \right\} \equiv \frac{1}{y_0^0} \psi_1(h) \quad \left( h = \frac{(y_0^0)^2}{2} \right)$$

Для выяснения числа корней уравнения

$$\psi_1(h) = 0 \quad (3.3)$$

находим

$$\psi_1'(h) = -\lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{2}{\pi} \beta \right) \ln \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2h} \right)^2 \frac{1}{|2h|} + 2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \beta \right) \arcsin \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \sqrt{2h + \pi}} \right], \quad \psi_1''(h) = \frac{\sqrt{2} \pi \lambda_0}{\sqrt{\pi + 4h}} \frac{4h + \pi + 2\beta}{2h(2h + \pi)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi_1(h) = 2\pi\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \left( \beta - 2 - \frac{\pi}{2} \right), \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \psi_1(h) = -\infty$$

Исследуя поведение функции  $\psi_1(h)$  в интервале  $0 < h < \infty$ , заключаем, что при  $0 < h < \infty$  функция  $\psi_1(h)$  монотонно убывает, если  $\beta \geq -\pi/2$ , и имеет один максимум, если  $\beta < -\pi/2$ . Отсюда легко видеть, что при

$$4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) > 0$$

уравнение (3.3) имеет один положительный корень. Система (3.1) при этом имеет один устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, в верхнем фазовом полупространстве.

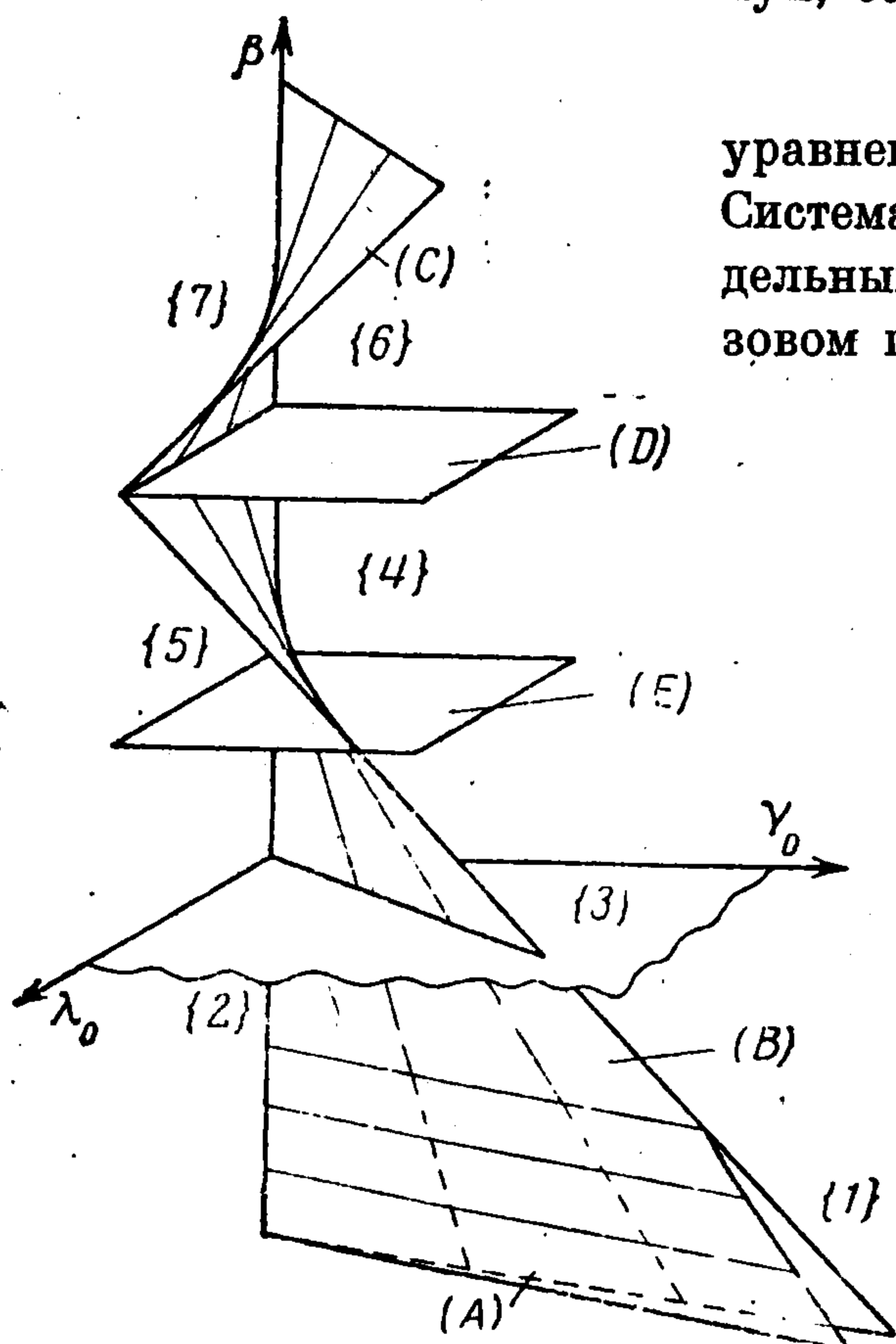
В области пространства параметров  $\lambda_0, \gamma_0$  и  $\beta$ , определяемой соотношениями

$$\psi_1'(h) = 0, \quad \psi_1(h) > 0$$

$$4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \beta - 2 - \frac{\pi}{2} \right) < 0$$

уравнение (3.3) имеет два положительных корня. Система (3.1) при этом имеет два предельных цикла в верхнем фазовом полупространстве. Причем большему корню уравнения (3.3) соответствует устойчивый, а меньшему неустойчивый предельный цикл.

Отыскиваем далее предельные циклы, охватывающие цилиндр и расположенные в нижнем фазовом полупространстве ( $y_0^\circ < 0$ ).



Фиг. 1

Интегрируя выражение (3.2) и полагая  $(y_0^\circ)^2/2 = h$ , будем иметь

$$F_2(y_0^\circ) = \frac{1}{y_0^\circ} \left\{ -2\pi\gamma_0 - \lambda_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left[ 2 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2h} + h \left( 1 + \frac{2}{\pi} \beta \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \ln \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2h} \right)^2 \frac{1}{|2h|} + \left( 1 - \frac{2}{\pi} \beta \right) (2h + \pi) \arcsin \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \sqrt{2h + \pi}} \right] \right\} \equiv \frac{\psi_2(h)}{y_0^\circ}$$

Аналогично предыдущему, можно показать, что при  $\gamma_0 > 0, \lambda_0 > 0$  система (3.1) не может иметь более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр в нижнем фазовом полупространстве. Если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi_2(h) = -2\pi\gamma_0 + \lambda_0 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \beta - 2 - \frac{\pi}{2} \right) > 0$$

то система (3.1) в нижнем фазовом полупространстве имеет устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр.

Находим, наконец, предельные циклы, охватывающие состояние равновесия.

Тогда, применяя теорему (2.1), будем иметь

$$F_3(y_1^\circ) = -\frac{4\lambda_0}{y_1^\circ} \left[ \left( 1 + \frac{2}{\pi} \beta \right) \int_{L_1} y d\varphi + \left( 1 - \frac{2}{\pi} \beta \right) \int_{L_2} y d\varphi \right] \equiv \frac{1}{y_1^\circ} \psi_3(h_1) \quad (3.4)$$

Здесь  $L_1$  и  $L_2$  — части интегральной кривой системы (3.1) при  $\mu = 0$ , проходящей через точку  $P'(-\pi/2, y_1^\circ)$  ( $0 < y_1^\circ < \sqrt{\pi/2}$ ), расположенные соответственно в интервалах  $-\pi \leq \varphi \leq -\pi/2$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ .

Уравнения кривых  $L_1$  и  $L_2$  имеют вид (3.5)

$$(L_1) \frac{y^2}{2} - \frac{(\varphi + \pi)^2}{\pi} = h_1, \quad (L_2) \frac{y^2}{2} + \frac{\varphi^2}{\pi} = h_1 + \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\pi}{4} \leq h_1 = \frac{(y_1^\circ)^2}{2} - \frac{\pi}{4} \leq 0 \right)$$

Из выражений (3.4) следует, что при  $(1 - 2\beta/\pi)(1 + 2\beta/\pi) > 0$  уравнение  $F_3(y_1^\circ) = 0$  не имеет действительных корней.

Пусть  $1 - 2\beta/\pi < 0$ . Легко видеть, что

$$\psi_3(h_1) = 2\psi_1(h_1) - 4\pi\gamma_0, \quad \psi_3'(h_1) = 2\psi_1'(h_1), \quad \psi_3''(h_1) = 2\psi_1''(h_1)$$

При значениях  $h_1$ , удовлетворяющих условию (3.5), имеем

$$\psi_3''(h_1) < 0, \quad \psi_3'(-\frac{\pi}{4}) > 0, \quad \lim_{h_1 \rightarrow 0} \psi_3'(h_1) = -\infty$$

$$\psi_3(-\frac{\pi}{4}) = -2\lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2}{\pi}\beta\right) \frac{\pi^2}{4} > 0, \quad \lim_{h_1 \rightarrow 0} \psi_3(h_1) = \lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \pi \left(\beta - 2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

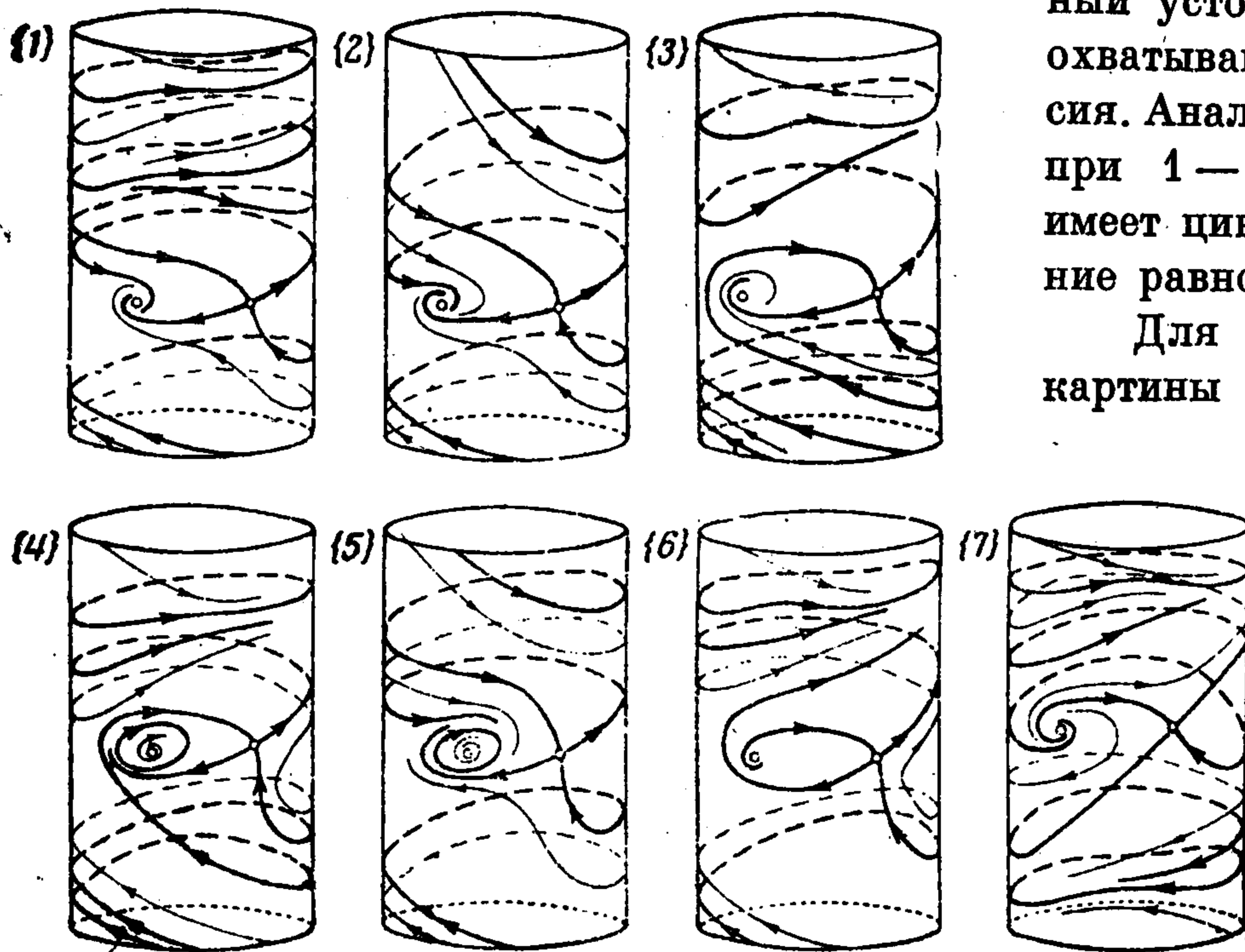
Отсюда находим, что при  $1 - 2\beta/\pi < 0$ ,  $\beta - 2 - \pi/2 < 0$  существует единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия. Аналогично можно показать, что при  $1 - 2\beta/\pi > 0$  система (3.1) не имеет циклов, охватывающих состояние равновесия.

Для выяснения качественной картины фазовых траекторий заметим, что состояние равновесия  $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$  будет устойчивым фокусом при

$$\mu\lambda_0(1 - 2\beta/\pi) > 0$$

неустойчивым фокусом при  $\mu\lambda_0(1 - 2\beta/\pi) < 0$ .

На фиг. 1 приведено разбиение пространства параметров  $\lambda_0$ ,  $\gamma_0$  и  $\beta$  на области, точкам кото-



Фиг. 2

рых соответствует определенная качественная картина фазовых траекторий.

В области {1}

$(4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) < 0, 1 + 2\beta/\pi < 0, \psi_1'(h) = 0, \psi_1(h) > 0)$   
система (3.1) имеет два предельных цикла, охватывающих цилиндр, в верхнем фазовом полупространстве. Верхний цикл — устойчивый, нижний — неустойчивый.

В области {2}

$$(\gamma_0 > 0, 4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) < 0, 1 - 2\beta/\pi > 0, \psi_1'(h) = 0, \psi_1(h) < 0)$$

система (3.1) не имеет предельных циклов.

В области {3}

$$(\lambda_0 > 0, 4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) > 0, 1 - 2\beta/\pi > 0)$$

система (3.1) имеет один устойчивый цикл, охватывающий цилиндр в верхнем фазовом полупространстве.

В области {4}

$$(\lambda_0 > 0, 4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) > 0, 1 - 2\beta/\pi < 0, \beta - 2 - \pi/2 < 0)$$

система (3.1) имеет один устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия, и один устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, в верхнем фазовом полупространстве.

В области {5}

$$(\gamma_0 > 0, \lambda_0 > 0, 4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) < 0, 1 - 2\beta/\pi < 0)$$

система (3.1) имеет один устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия.

В области {6}

$$(\beta - 2 - \pi/2 > 0, \lambda_0 > 0, \gamma_0 > 0, -4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) < 0)$$

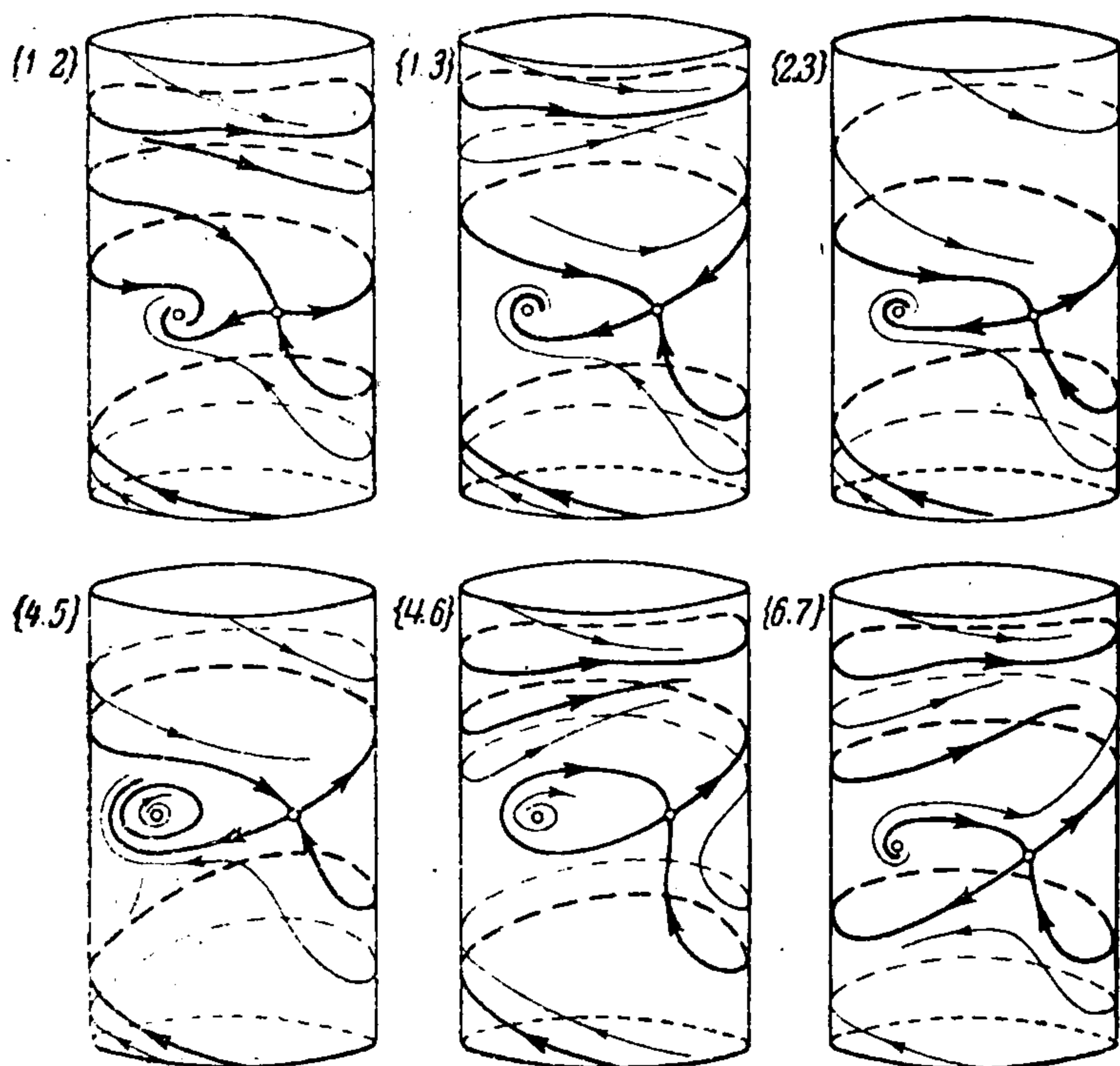
система имеет один устойчивый предельный цикл в верхнем полупространстве.

В области {7}

$$(\gamma_0 > 0, \lambda_0 > 0, -4\gamma_0 + \lambda_0 \sqrt{\pi/2} (\beta - 2 - \pi/2) > 0)$$

система (3.1) имеет два устойчивых цикла, охватывающих цилиндр. Один из них расположен в нижнем, а другой в верхнем фазовом полупространстве.

Качественные картины фазовых траекторий для перечисленных областей изображены на фиг. 2.



Фиг. 3

На плоскости (D) ( $\beta - 2 - \pi/2 = 0$ ) предельный цикл, охватывающий состояние равновесия  $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$ , влипает в сепаратрису, идущую из седла в то же седло. На поверхности (E) ( $1 - 2\beta/\pi = 0$ ) в точке  $O_1(\mu\gamma_0\pi/2, 0)$  система имеет состояние равновесия типа центра.

На фиг. 3 изображены качественные картины фазовых траекторий, соответствующих бифуркационным значениям параметров. В фигурных скобках указываются номера тех областей, на границе между которыми система {3.1} имеет указанную качественную картину фазовых траекторий.

В заключение благодарю Н. Н. Баутина за ценные советы.

Поступила 27 XII 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1958, том 1, № 1, 2, 5—6.
2. Неймарк Ю. И. и Шильников Л. П. О применении метода малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
3. Неймарк Ю. И. и Шильников Л. П. Исследование динамических систем, близких к кусочно-линейным. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1960, том 3, № 3.
4. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, т. 4, вып. 9.
5. Ку Ю. Н. Nonlinear Analysis of Electromechanical Problems, J. Franklin Institute, 1953, vol. 255, page 9—31.
6. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, том 2, № 12.
7. Белюстина Л. Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1959, том 2, № 2.
8. Губарь Н. А. Исследование одной кусочно-линейной системы с тремя параметрами. ПММ, 1961, том XXV, вып. 6.