Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЬЮТОНОВОЙ СИЛЫ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

К. Г. Валеев

(Ленинград)

Вывод уравнений движения. Рассматривается уравнение движения материальной точки M относительно неподвижного начала O

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}, \qquad k = \mathrm{const}, \qquad r = |\mathbf{r}| \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_0, \qquad t = t_0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки M, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу массы дополнительно к ньютоновой силе $-kr^{-3}\mathbf{r}$. Введем обозначения

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad |\mathbf{G}| = G, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{r}\mathbf{r}, \qquad |\boldsymbol{\gamma}| = 1 \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{G}$ — момент количества движения точки M с массой, равной единице; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный из начала O к точке M.

Дифференцируя $\mathbf{G}$ (1.3) по t, получим из (1.1)

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{1.4}$$

Подставляя в (1.1) $\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma} r$ и умножая уравнение (1.1) скалярно на $\boldsymbol{\gamma}$, получим уравнения для r

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r^3} G^2 = -\frac{k}{r^3} + \mathbf{F}\boldsymbol{\gamma} \tag{1.5}$$

Преобразуя векторное произведение векторов $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\gamma}$, получим дифференциальное уравнение для $\boldsymbol{\gamma}$

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = r^{-2}\mathbf{G} \times \boldsymbol{\gamma} \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.4), (1,5), (1.6) с двумя известными интегралами

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1, \qquad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{G} = 0 \tag{1.7}$$

эквивалентна уравнению (1.1). Совершим замену зависимой переменной r и независимой переменной t

$$u = r^{-1}, \qquad d\tau = r^{-2}\, dt = u^2\, dt \tag{1.8}$$

Уравнения (1.4) — (1.6) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\tau}=u^{-3}\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{F},\qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau}=\mathbf{G}\times\boldsymbol{\gamma},\qquad \frac{d^2u}{d\tau^2}+G^2u=k-u^{-2}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\gamma} \tag{1.9}$$

Построим в точке O ортогональный векторный триедр, состоящий из единичных векторов $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{s}$, где

$$\mathbf{g}=G^{-1}\mathbf{G},\qquad \mathbf{s}=\mathbf{g}\times\boldsymbol{\gamma},\qquad \boldsymbol{\gamma}=r^{-1}\mathbf{r} \tag{1.10}$$

Будем называть плоскостью движения плоскость, проходящую через начало O, движущуюся точку M и содержащую вектор скорости $d\mathbf{r}/dt$.

Вектор $\mathbf{g}$ перпендикулярен к плоскости движения, вектор $\mathbf{s}$ лежит в плоскости движения.

Проекции возмущающей силы $\mathbf{F}$ на оси, совпадающие по направлению с векторами $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{s}$, обозначим через F_γ, F_g, F_s

$$\mathbf{F}=F_\gamma\boldsymbol{\gamma}+F_g\mathbf{g}+F_s\mathbf{s} \tag{1.11}$$

Упростим первое из уравнений (1.9), составив уравнение отдельно для G и $\mathbf{g}$; подставив в (1.9) $\mathbf{G}=G\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}$, согласно (1.11) в (1.9), получим уравнения

$$\frac{dG}{d\tau}=\frac{1}{u^3}F_s,\qquad \frac{d\mathbf{g}}{d\tau}=\frac{F_g}{u^3G}\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{g} \tag{1.12}$$

Введем новый вспомогательный вектор $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega}=G\mathbf{g}+u^{-3}G^{-1}F_g\boldsymbol{\gamma} \tag{1.13}$$

Из уравнения (1.9) для $\boldsymbol{\gamma}$ и из (1.12) для $\mathbf{g}$ можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma},\qquad \frac{d\mathbf{g}}{d\tau}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{g} \tag{1.14}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}$ является вектором угловой скорости (см., например, [1], стр. 64) движения векторного триедра $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{s}$. Если $F_g\equiv 0$, то $\mathbf{g}=\mathrm{const}$ и движение происходит в одной неподвижной плоскости.

Уравнения (1.14) и (1.9) для u и уравнение (1.12) для G образуют замкнутую систему. Она имеет девятый порядок, но известны заранее три интеграла

$$\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}=1,\qquad \mathbf{g}\mathbf{g}=1,\qquad \boldsymbol{\gamma}\mathbf{g}=0 \tag{1.15}$$

Полученная система уравнений эквивалентна уравнению (1.1). Ее недостаток в большем порядке, чем (1.1); достоинство в том, что при $\mathbf{F}\equiv 0$ эта система обращается в систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Поэтому при достаточно малых значениях силы $F=|\mathbf{F}|$ можно применять метод малого параметра. Другой особенностью системы (1.5), (1.14) и первого уравнения (1.12) будет то, что при силах F_γ, F_s, зависящих только от u, τ, G, уравнения (1.5), (1.12) можно интегрировать независимо от уравнений (1.14). Интегрирование уравнений (1.14) эквивалентно задаче отыскания положения тела по известному вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в подвижных осях координат. Эта задача рассматривается в работе ([1], стр. 100 — 136) и может быть сведена к интегрированию одного нелинейного комплексного уравнения Дарбу (см., например, [1], стр. 130).

Если плоскость движения неизменна, т. е. $\mathbf{g}=\mathrm{const}$, то из (1.12) для $\mathbf{g}$ получим $F_g=0$. В этом случае вся трудность решения задачи заключена в интегрировании уравнений (1.9) для u и уравнения (1.12) для G.

Плоскость движения совершает регулярную прецессию в случае, когда

$$F_s \equiv 0, \quad F_g = au^3 = ar^{-3}, \quad a = \mathrm{const} \tag{1.16}$$

Из уравнения (1.12) имеем $G = \mathrm{const}$, $\omega = \mathrm{const}$ как в подвижных осях, так, следовательно, и в неподвижных осях координат.

Как указал автору А. И. Лурье, результаты работы [2], относящиеся к движению спутника по круговой орбите ($u = \mathrm{const}$) при силах $F_g = \mathrm{const}$, $F_s = F_\gamma = 0$, значительно проще могут быть получены из уравнений, аналогичных (1.14).

Отметим, наконец, что полученные уравнения особенно удобны для изучения орбит, близких к круговым, в то время как классические уравнения (см., например, [3], стр. 350) малопригодны для малых значений эксцентриситета e оскулирующего эллипса.

2. Случай плоского движения. Если $F_g \equiv 0$, то плоскость движения неподвижна. Совершим замену в (1.5), (1.12) для G, независимой переменной τ на φ и зависимой переменной G на p, по формулам

$$d\varphi = G\,d\tau = Gu^2\,dt, \qquad p = G^2 \tag{2.1}$$

В результате получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{p} - \frac{1}{u^2p}F_\gamma - \frac{1}{u^3p}F_s\frac{du}{d\varphi}, \qquad \frac{dp}{d\varphi} = \frac{2F_s}{u^3} \tag{2.2}$$

При $F_g \equiv 0$ переменная φ имеет определенный геометрический смысл; это — угол с вершиной в начале O, который описывает радиус-вектор $\mathbf{r}$ на неподвижной плоскости движения.

Предположим, что в (2.2) силы F_γ, F_s не зависят от φ, в этом случае порядок системы можно понизить. Введем в качестве независимой переменной u, в качестве зависимой $q = du/d\varphi$. Имеем

$$q\frac{dq}{du} = -u + \frac{1}{p}\left(k - \frac{1}{u^2}F_\gamma - \frac{1}{u^3}F_s q\right), \qquad q\frac{dp}{du} = \frac{2}{u^3}F_s \qquad \left(q = \frac{du}{d\varphi}\right) \tag{2.3}$$

Систему уравнений (2.3) можно проинтегрировать, если внешние силы имеют вид

$$F_\gamma = ku^2 + au^3, \qquad F_s = bu^4, \qquad F_g = 0 \quad (a, b = \mathrm{const}) \tag{2.4}$$

так как, разделив первое уравнение (2.3) на второе, получим уравнение, не содержащее u и линейное относительно q.

3. Интегрирование в частном случае внешних сил. Рассмотрим более общий, чем (2.4), случай дополнительных сил

$$F_\gamma = \frac{k}{r^2} + \frac{a(G)}{r^3}, \qquad F_s = \frac{b(G)}{r^4}, \qquad F_g = 0 \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) для силы F показывает, что фактически из рассмотрения исключается ньютонова сила. На точку M действует сила, обратно пропорциональная третьей степени расстояния r в направлении вектора $\mathbf{r}$, и сила, обратно пропорциональная четвертой степени расстояния r в направлении вектора $\mathbf{s}$, лежащего в плоскости движения перпендикулярно к $\mathbf{r}$.

Если $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ и в начальный момент t_0 выбрано a так, чтобы $F_\gamma = 0$, т. е. $a = -kr_0$, то максимальная дополнительная сила F_γ в направлении r должна достигаться при

$$r = 1.5r_0, \qquad F_\gamma(1.5r_0) = \frac{4}{27}\frac{k}{r_0^2} \tag{3.2}$$

Здесь kr_0^{-2} — ньютонова сила притяжения при $r = r_0$.

Уравнения (1.5), (1.19) принимают при (3.1) вид

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + G^2u = -a(G)\,u, \qquad \frac{dG}{d\tau} = b(G)\,u \tag{3.3}$$

Исключая из первого уравнения при помощи второго u, приходим к интегрируемому уравнению третьего порядка

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{b(G)}\frac{dG}{d\tau}\right)\right] + \frac{G^2}{b(G)}\frac{dG}{d\tau} + \frac{a(G)}{b(G)}\frac{dG}{d\tau} = 0 \tag{3.4}$$

Проинтегрируем уравнение (3.4) один раз и умножим на $2b^{-1}(G)\,dG/d\tau$. Приходим к новому уравнению второго порядка

$$\frac{2}{b(G)}\frac{dG}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{b(G)}\frac{dG}{d\tau}\right] + \frac{2\psi_1(G)}{b(G)}\frac{dG}{d\tau} = 0 \tag{3.5}$$

$$\psi_1(G) = \int (G^2 + a(G))\frac{dG}{b(G)} \tag{3.6}$$

Интегрируя уравнение (3.5) по τ, еще раз приходим к уравнению первого порядка

$$\left[\frac{1}{b(G)}\frac{dG}{d\tau}\right]^2 = -\int \frac{2\psi_1(G)}{b(G)}dG \equiv \psi_2(G) \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.3) находим

$$u = \sqrt{\psi_2(G)}, \qquad r = [\psi_2(G)]^{-1/2} \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (1.8) находим выражение для t

$$t = \int \frac{d\tau}{u^2} = \int \frac{dG}{b(G)\sqrt{\psi_2^3(G)}} \tag{3.9}$$

Из (3.7), (2.1) можем найти выражение для угла φ

$$\varphi = \int \frac{G\,dG}{b(G)\sqrt{\psi_2(G)}} \tag{3.10}$$

Получим решение задачи, где r, t, φ заданы функциями параметра G. Произвольные постоянные можно найти из условий (1.2). Приведем окончательный ответ для решения задачи (1.1) с начальными условиями (1.2) в случае сил вида (2.6).

Решение проведено способом, указанным в этом пункте. Функция $\psi_2(G)$ (3.7) принимает вид

$$\psi_2(G) = C_2 - \frac{1}{6b^2}G^4 - \frac{a}{b^2}G^2 + \frac{2}{b}C_1G \tag{3.11}$$

$$C_1 = |\mathbf{r}_0|^{-1}(\mathbf{r}_0\dot{\mathbf{r}}_0) - \frac{1}{3b}|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|^3 - \frac{a}{b}|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0| \tag{3.12}$$

$$C_2 = |\mathbf{r}_0|^{-2} + \frac{1}{6b^2}|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|^4 + \frac{a}{b^2}|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|^2 + \frac{2}{b}C_1|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|$$

Для r, t, φ найдем из (3.8) — (3.10)

$$t = t_0 + \int_{G_0}^{G} \frac{dG}{b(G)\sqrt{\psi_2^3(G)}}, \qquad r = \frac{1}{\sqrt{\psi_2(G)}} \tag{3.13}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{G_0}^{G} \frac{G\,dG}{b(G)\sqrt{\psi_2(G)}}, \qquad G_0 = |\mathbf{r}\times\mathbf{r}_0| \tag{3.14}$$

Для r получаем выражение

$$\mathbf{r} = r(\boldsymbol{\gamma}_0\cos\varphi + \mathbf{s}_0\sin\varphi) = r\left(\frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}\cos\varphi + \frac{\dot{\mathbf{r}}_0(\mathbf{r}_0)^2 - \mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0\dot{\mathbf{r}}_0)}{|\mathbf{r}_0|\cdot|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|}\sin\varphi\right) \tag{3.15}$$

Так как в выражения (3.1) для сил F_γ, F_s входят произвольные функции от G, то можно указанный в этом пункте способ интегрирования применить для приближенного численного или графического решения уравнений (1.10), (1.12) при другом способе задания сил. Для этого задаем произвольные $a(G)$, $b(G)$ в (3.1). Находим выражения (3.8) — (3.10) для r, φ, t, а затем уточняем функции $a(G)$, $b(G)$. Предлагаемый способ удобнее непосредственного интегрирования уравнений (1.10), (1.12), так как все время интегрируются известные выражения от G, а не дифференциальные уравнения.

4. Случаи интегрируемости уравнений движения, когда дополнительная сила $\mathbf{F}$ направлена вдоль скорости $d\mathbf{r}/dt$ движущейся точки M. Обозначим через α угол, образованный радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и вектором скорости $d\mathbf{r}/dt$

$$\cos\alpha = \mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(|\mathbf{r}|\cdot\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\right)^{-1}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r\,d\varphi}{dr} \tag{4.1}$$

Если сила F направлена вдоль скорости, то

$$\mathbf{F}\parallel\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad F_\gamma = F\cos\alpha, \qquad F_s = F\sin\alpha, \qquad F = |\mathbf{F}| \tag{4.2}$$

Из (4.1), (4.2) находим

$$F_\gamma + \frac{1}{u}F_s\frac{du}{d\varphi} = F\cos\alpha - \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}F\sin\alpha \equiv 0 \tag{4.3}$$

Для силы $\mathbf{F}$, направленной вдоль скорости, уравнения (2.2), (2.3) принимают сравнительно простой вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{p}, \qquad \frac{dp}{d\varphi} = \frac{2F_s}{u^3} \tag{4.4}$$

Интересно отметить, что изменение радиуса r зависит от силы $\mathbf{F}$ лишь косвенно через p.

(а) Пусть проекция силы F_s задана в виде

$$F_s = a(\varphi)\,b(p)\,u^3 \tag{4.5}$$

В этом случае уравнения (4.4) интегрируются.

Выпишем решение в частном случае (4.5), когда сила $\mathbf{F}$ действует вдоль скорости и имеет вид

$$F = |\mathbf{F}| = \frac{1}{r^3}\frac{A(\varphi)}{\sin\alpha}, \qquad F_s = \frac{A(\varphi)}{r^3} = A(\varphi)\,u^3 \tag{4.6}$$

Из (4.4), (1.2) находим решение

$$p(\varphi) = |\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0|^2 + 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} A(\varphi)\,d\varphi \tag{4.7}$$

$$r(\varphi) = \left(\frac{\cos\varphi}{|\mathbf{r}_0|} - \frac{\mathbf{r}_0\dot{\mathbf{r}}_0\sin\varphi}{|\mathbf{r}_0|\cdot|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|} + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{k\sin(\varphi-\tau)}{p(\tau)}\,d\tau\right)^{-1} \tag{4.8}$$

$$t = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{r^2(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{p(\varphi)}} \tag{4.9}$$

В качестве параметра служит угол φ, описываемый в плоскости движения радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

(b) Совершим в (4.4) переход к новой независимой переменной u, положив

$$q = \frac{du}{d\varphi}, \qquad q = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r}\operatorname{ctg}\alpha \tag{4.10}$$

Система уравнений (2.4), (2.5) принимает вид

$$q\frac{dq}{du} = \frac{k}{p} - u, \qquad q\frac{dp}{du} = \frac{2F_s}{u^3} \tag{4.11}$$

Система уравнений (4.11) будет интегрироваться, если в (4.11) положить

$$F_s = qa(u)\,b(p) = -u\dot{a}(u)\,b(p)\operatorname{ctg}\alpha \tag{4.12}$$

Приведем решение для случая, когда сила F имеет вид

$$F = A(r)\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \tag{4.13}$$

Из (4.11) находим выражения для r, φ, t через параметр u

$$p(u) = |\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|^2 - 2\int_{u_0}^{u}\frac{1}{u}A\left(\frac{1}{u}\right)du, \qquad u_0 = |\mathbf{r}_0|^{-1} \tag{4.14}$$

$$q(u) = \left[\frac{(\mathbf{r}_0\dot{\mathbf{r}}_0)^2}{|\mathbf{r}_0|^2\cdot|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0|^2} + 2\int_{u_0}^{u}\left(\frac{k}{p(u)} - u\right)du\right]^{1/2} \tag{4.15}$$

$$r = \frac{1}{u}, \qquad \varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{u}\frac{du}{q(u)}, \qquad t = t_0 + \int_{u_0}^{u}\frac{du}{u^2 q(u)\sqrt{p(u)}} \tag{4.16}$$

(c) Из (4.1) имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = -rq, \qquad \sin\alpha = (1 + r^2q^2)^{-1/2} = u(u^2+q^2)^{-1/2} \tag{4.17}$$

Уравнения (4.11) можно переписать в виде

$$\frac{d(q^2+u^2)}{du} = \frac{2k}{p}, \qquad q\frac{dp}{du} = \frac{2F}{u^2\sqrt{u^2+q^2}} \tag{4.18}$$

Введем в качестве независимой переменной величину μ

$$\mu = q^2 + u^2 \tag{4.19}$$

Величина $(\mu)^{-1/2}$ имеет определенный геометрический смысл; это — расстояние от начала координат точки O до прямой, проходящей через точку M параллельно вектору скорости $d\mathbf{r}/dt$.

Уравнения (4.18) проинтегрируются, если выражение для силы F имеет вид

$$F = |\mathbf{F}| = r^{-3} a(\mu) b(p) \operatorname{ctg} \alpha \tag{4.20}$$

Приведем окончательное решение для случая силы $\mathbf{F}$, действующей вдоль вектора скорости $d\mathbf{r}/dt$ и имеющей вид

$$F = a(\mu) \operatorname{ctg} \alpha \, r^{-3} \tag{4.21}$$

Из уравнений (4.18) найдем выражения для r, φ, t через параметр μ

$$p(\mu) = |\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0|^2 \exp\left\{-\int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{a(\mu)}{k\sqrt{\mu}} d\mu\right\}, \qquad \mu_0 = |\dot{\mathbf{r}}_0|^2 |\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0|^{-2} \tag{4.22}$$

$$u(\mu) = \frac{1}{|\mathbf{r}_0|} + 0.5k^{-1} \int\limits_{\mu_0}^{\mu} p(\mu) d\mu, \qquad r(\mu) = \frac{1}{u(\mu)} \tag{4.23}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2k} \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{p(\mu) d\mu}{\sqrt{\mu - u^2(\mu)}}, \qquad t = t_0 + \frac{1}{2k} \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{\sqrt{p(\mu)} d\mu}{u^2(\mu) \sqrt{\mu - u^2(\mu)}} \tag{4.24}$$

Уравнения (4.4), (4.11) имеют простой вид, и, по-видимому, можно найти другие способы задания силы $\mathbf{F}$, при которой эти уравнения интегрируются. Во всех случаях (a), (b), (c) в выражение для силы входит произвольная функция параметра. Все эти случаи можно использовать для приближенных решений при другом способе задания силы $\mathbf{F}$, направленной вдоль скорости. Например, случаи (a), (b) можно использовать при изучении воздействия на спутники трения, создаваемого атмосферой. Заметим, что

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = G\sqrt{u^2 + q^2} = \frac{G}{r \sin \alpha} \tag{4.25}$$

В заключение автор благодарит А. И. Лурье за консультации по данной теме.

Поступила 20 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
2. Илларионов В. Ф., Шкадов М. М. Поворот плоскости круговой орбиты спутника. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
3. Мультон Ф. Р. Введение в небесную механику. М.—Л., ОНТИ, 1935.