

## ВЛИЯНИЕ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ НА РАБОТУ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

Д. Р. Меркин

(Ленинград)

Рассматривается предложенный А. Ю. Ишлинским [1-4] способ учета сил, действующих на материальную систему, движущуюся вблизи Земли. Показывается, что одновременно с новым методом введены отличные от общепринятых определения вертикали места и горизонтальной плоскости, поэтому полученные в этих работах результаты требуют специального пояснения.

Учитывается сжатие Земли, составляются дифференциальные уравнения движения гироскопа и определяются условия, при выполнении которых прибор будет показывать истинную вертикаль места и плоскость меридиана.

§ 1. Будем рассматривать движение материальной точки относительно координатных осей  $Ox_1y_1z_1$ , перемещающихся поступательно в инерциальной системе отсчета, причем начало координат, точка  $O$ , движется по поверхности Земли произвольным образом. Силу  $Q$ , действующую на любую материальную точку в системе отсчета  $Ox_1y_1z_1$ , можно представить двумя эквивалентными выражениями

$$Q = P - mw^* \quad (1.1)$$

$$Q = F - mw \quad (1.2)$$

Здесь  $m$  — масса точки,  $P = mg$  — сила тяжести, складывающаяся из силы притяжения Земли  $F$  и центробежной силы  $-mw_e$ , где  $w_e$  — переносное ускорение точки  $O$ , вызванное вращением Земли

$$P = F - mw_e \quad (1.3)$$

Вектор  $w^*$  равен сумме ускорения  $w_r$  точки  $O$  в ее движении относительно Земли и кориолисова ускорения  $w_c$

$$w^* = w_r + w_c \quad (1.4)$$

$w$  — ускорение точки  $O$  относительно инерциальной системы отсчета

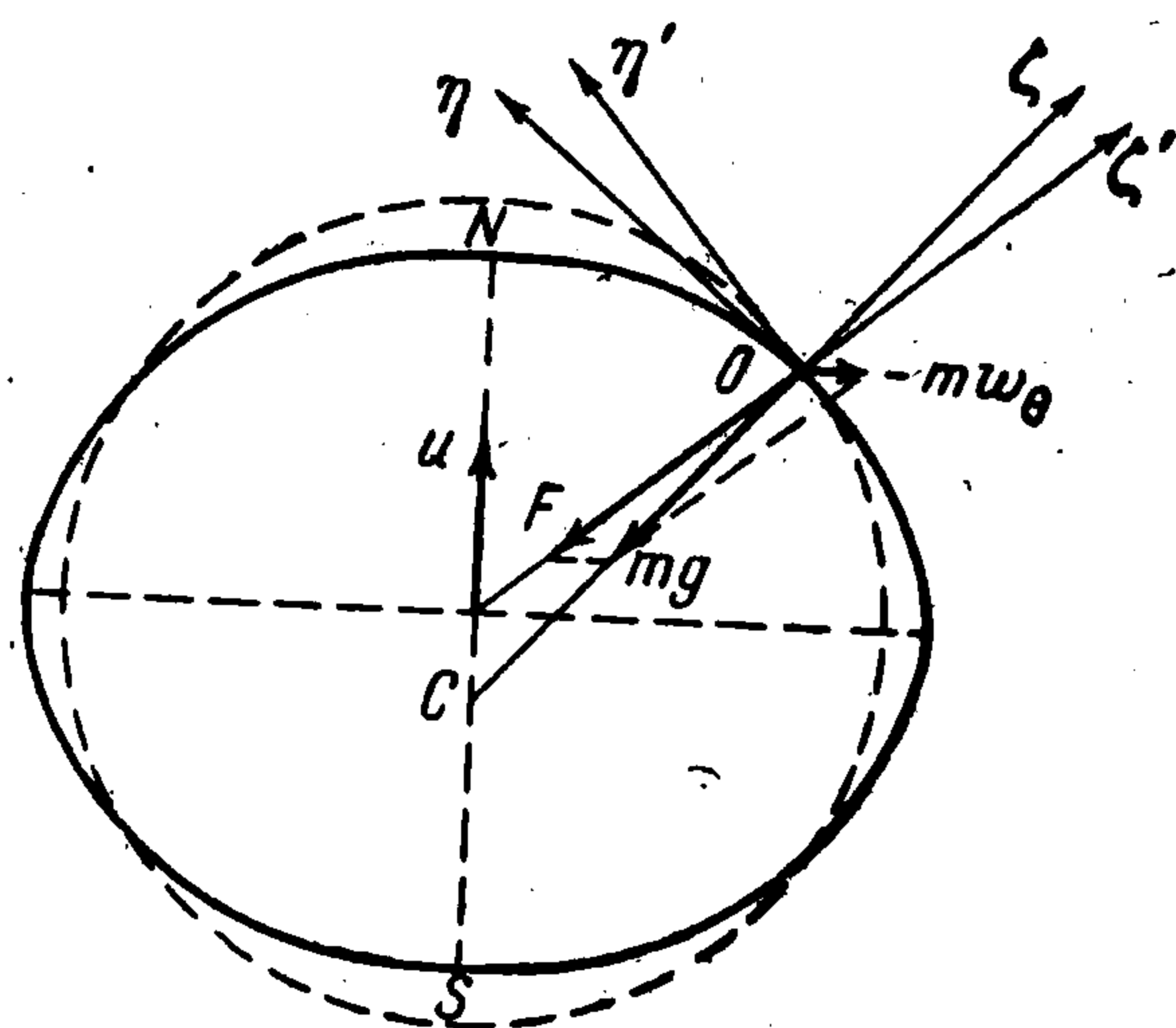
$$w = w_e + w_r + w_c \quad (1.5)$$

Непосредственными измерениями на поверхности Земли нельзя определить ни величину, ни направление силы притяжения  $F$ , в частности, ее направление не совпадает с вертикалью места, а предположение, что она направлена к центру Земли, является только первым приближением [5-7]. Сила тяжести  $P = mg = F - mw_e$  измеряется непосредственно и для ее определения не требуется знания силы  $F$ ; она направлена по вертикали места и ее проекция на горизонтальную плоскость равна нулю. Поэтому в тех случаях, когда по условию задачи требуется ориентировать движение относительно вертикали места и горизонтальной плоскости, пользуются обычно выражением (1.1).

В 1956—1957 гг. А. Ю. Ишлинский предложил [1-4] применять формулу не (1.1), а (1.2), при этом им были сделаны часто встречающиеся допущения, что Земля имеет

форму правильного шара и сила притяжения  $F$  направлена к центру Земли по ее радиусу. При сделанных предположениях он получил ряд выводов об относительном равновесии физического маятника, работе сложных гироскопических устройств и систем инерциальной навигации [1-4,8]. В последние годы опубликовано много работ других авторов, например [9-14], в основе которых лежат те же предположения.

Для того чтобы правильно оценить новый метод и полученные результаты, необходимо остановиться на некоторых понятиях, которыми пользуются авторы этих работ, не акцентируя, что введенные в [1-4] определения отличаются от общепринятых.



Фиг. 1

Обычно под вертикалью места или истинной вертикалью понимается прямая, совпадающая с линией отвеса; вертикаль места направлена по нормали к поверхности Земли (принимается, что она имеет форму геоида<sup>1</sup>). Горизонтальная плоскость перпендикулярна к вертикали места. Прямую, соединяющую точку поверхности Земли с ее центром, будем называть *псевдовертикалью*, а перпендикулярную к ней плоскость — *псевдогоризонтальной* плоскостью. Если бы Земля имела форму правильного шара, то псевдовертикаль

совпадала бы с нормалью к его поверхности, а псевдогоризонтальная плоскость с его касательной плоскостью. На фиг. 1 сплошной овальной линией показан геоид, пунктирной — условная земная сфера,  $\zeta$  — истинная вертикаль,  $\zeta'$  — псевдовертикаль,  $\eta$  — горизонтальная плоскость,  $\eta'$  — псевдогоризонтальная плоскость.

В первом приближении угол  $\nu$  между вертикалью и псевдовертикалью, как известно, равен

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{R_1 U^2}{g} \sin 2\varphi \quad (1.6)$$

где  $U$  — угловая скорость вращения Земли,  $R_1$  — главный радиус кривизны, равный отрезку  $OC$  (фиг. 1 и формулы (2.3)),  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\varphi$  — географическая широта места.

Так как в работах [1-4,8] предполагается, что проекция силы притяжения  $F$  на горизонтальную плоскость равна нулю, то в них рассматривается не горизонтальная плоскость и истинная вертикаль, а псевдогоризонтальная плоскость и псевдовертикаль. Поэтому при строгом выполнении всех предположений и условий, полученных в [2-4] для гировертикали и гирогоризонткомпаса, эти приборы должны показывать не горизонтальную, а псевдогоризонтальную плоскость. В частности, в сделанном утверждении [2], что связанная с гирорамай «...плоскость  $xu$ ... при любых маневрах корабля остается горизонтальной...» под словом «горизонтальной» следует понимать псевдогоризонтальной.

<sup>1</sup> Во многих курсах теоретической механики для простоты изложения считается, что Земля имеет форму шара, но всегда под вертикалью места понимается линия отвеса, совпадающая с направлением силы тяжести  $P = mg = F - mw_e$ . При отсутствии оговорки о форме Земли эта неточность в изложении может привести читателя к неверному выводу — вертикаль места не является нормалью к поверхности Земли. Наиболее точно об этом сказано в курсе А. Зоммерфельда [15].

Вопрос о точном толковании таких понятий, как горизонтальная плоскость и вертикаль места, имеет для инерциальной навигации и теории гироскопических приборов принципиальное значение по следующим соображениям: 1. Если установить в псевдогоризонтальной плоскости акселерометр, то при неподвижном относительно Земли основании он будет показывать ускорение  $\frac{1}{2} R_1 U^2 \sin 2\varphi$ , определяемое горизонтальной составляющей центробежной силы, вызванной вращением Земли. 2. Угол  $\nu$  достигает почти  $6'$ , что для многих гироскопических устройств является недопустимо большим отклонением. 3. Известно, что в положении динамического равновесия ось гироскопического компаса составляет с плоскостью истинного горизонта угол  $\beta_r \neq 0$ . Проблема создания гиригоризонткомпаса сводится по существу к уничтожению угла  $\beta_r$ . Но для гироскопического компаса, имеющего период М. Шулера, угол  $\beta_r$  на неподвижном основании в точности равен правой части выражения (1.6) (см., например, [16]), т. е. ось такого гирикомпаса показывает псевдогоризонтальную плоскость так же, как и гиригоризонткомпас А. Ю. Ишлинского [2]. Таким образом, оба прибора имеют принципиально одинаковое назначение и вопрос может идти только о присутствии им ошибок.

Из сказанного ясно, что использование предположений о правильной шаровой форме Земли, направлении силы притяжения  $F$  и, главным образом, о целесообразности представимости силы  $Q$  выражением (1.2) требует осторожности в толковании общепринятых терминов и полученных результатов. Поэтому, чтобы избежать возможных недоразумений, которые могут возникнуть при употреблении таких обычных понятий, как горизонтальная плоскость, вертикаль места, горизонтальная составляющая скорости и т. п. и избежать невольно возникающих при этом погрешностей, будем в дальнейшем считать, что движение материальной точки или системы ориентировано относительно истинных вертикали и горизонтальной плоскости. Тем самым предполагается, что сила  $Q$  должна представляться, как это принято в классических руководствах по механике [15, 17-19], выражением (1.1).

§ 2. Рассмотрим прежде всего некоторые вопросы кинематики точки, движущейся по поверхности Земли. Будем считать, что Земля имеет форму геоида, в каждой точке которого нормаль к поверхности совпадает с направлением силы тяжести  $P = mg$ . Параметры, определяющие размеры и форму геоида, имеют значения

$$a = 6378.4 \text{ км}, \quad \alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{296.3} \quad (2.1)$$

где  $a$  — радиус экватора и  $b$  — половина расстояния между полюсами.

С точностью до членов выше первого порядка относительно малой величины  $\alpha$ , поверхность геоида аппроксимируется эллипсоидом Клеро, причем эксцентриситет меридиана  $e$  равен

$$e = \sqrt{2\alpha - \alpha^2} \quad (2.2)$$

В дальнейшем предполагается, что поверхность Земли имеет форму эллипсоида Клеро. Поэтому во всех расчетах, где применяется разложение в ряды по степеням малого параметра  $\alpha$  (или  $e^2$ ), сохраняются только члены первого порядка.

Главными нормальными сечениями эллипсоида вращения в точке  $O$  являются плоскость первого вертикала и плоскость меридиана. Соответствующие главные радиусы кривизны определяются равенствами [16]

$$R_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad R_2 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (2.3)$$

где  $\varphi$  — географическая широта.

Первый главный радиус кривизны равен (фиг. 1) отрезку нормали к поверхности  $OC$ , а второй — радиусу кривизны меридиана. Полезно отметить легко проверяемое тождество

$$\frac{\partial (R_1 \cos \varphi)}{\partial \varphi} = -R_2 \sin \varphi \quad (2.4)$$

Введем систему координат  $O\xi\eta\zeta$ , ориентированную географически (ось  $\zeta$  направлена по истинной вертикали вверх, оси  $\xi$ ,  $\eta$  горизонтальны, причем ось  $\xi$  направлена на восток, а  $\eta$  — на север), и обозначим через  $v_E$ ,  $v_N$ ,  $v_\zeta$  проекции скорости точки  $O$  относительно Земли на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Так как по условию точка  $O$  движется по поверхности Земли, то проекции скорости  $V$  точки  $O$  относительно инерциальной системы отсчета имеют вид [16]

$$V_\xi = v_E + R_1 U \cos \varphi, \quad V_\eta = v_N, \quad V_\zeta = 0 \quad (2.5)$$

Скорости изменения широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$  равны

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_2}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_1 \cos \varphi} \quad (2.6)$$

Угловая скорость вращения триедра  $\xi\eta\zeta$  определяется равенствами

$$u_\xi = -\frac{V_\eta}{R_2}, \quad u_\eta = \frac{V_\xi}{R_1}, \quad u_\zeta = \frac{V_\xi}{R_1} \operatorname{tg} \varphi \quad (2.7)$$

Проекция ускорения точки  $O$  относительно инерциальной системы отсчета проще всего вычисляются по формулам [18]

$$w_\xi = \dot{V}_\xi + u_\eta V_\zeta - u_\zeta V_\eta, \quad w_\eta = \dot{V}_\eta + u_\zeta V_\xi - u_\xi V_\zeta \\ w_\zeta = \dot{V}_\zeta + u_\xi V_\eta - u_\eta V_\xi$$

Внося соответствующие величины, получим

$$w_\xi = \dot{v}_E - \frac{v_E v_N}{R_1} \operatorname{tg} \varphi, \quad w_\eta = \dot{v}_N + \frac{v_E^2}{R_1} \operatorname{tg} \varphi, \quad w_\zeta = -\left(\frac{v_E^2}{R_1} + \frac{v_N^2}{R_2}\right) \quad (2.8)$$

Если воспользоваться равенствами (2.4), (2.5), то будем иметь

$$w_\xi = \dot{v}_E - \frac{v_E v_N}{R_1} \operatorname{tg} \varphi - 2U v_N \sin \varphi \\ w_\eta = \dot{v}_N + \frac{v_E^2}{R_1} \operatorname{tg} \varphi + 2U v_E \sin \varphi + U^2 R_1 \sin \varphi \cos \varphi \\ w_\zeta = -\frac{v_E^2}{R_1} - \frac{v_N^2}{R_2} - 2U v_E \cos \varphi - U^2 R_1 \cos^2 \varphi \quad (2.9)$$

В этих выражениях члены, содержащие угловую скорость вращения Земли  $U$  во второй степени, являются проекциями переносного ускорения  $w_e$ , происходящего от вращения Земли, члены, содержащие  $U$  в первой степени, являются проекциями кориолисова ускорения  $w_c$ , наконец, члены, не содержащие  $U$ , являются проекциями ускорения  $w_r$  точки  $O$  в ее движении относительно Земли. Поэтому проекции вектора  $w^*$ , определенного равенством (1.4), на оси координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  будут равны

$$w_\xi^* = \dot{v}_E - \frac{v_E v_N}{R_1} \operatorname{tg} \varphi - 2U v_N \sin \varphi \\ w_\eta^* = \dot{v}_N + \frac{v_E^2}{R_1} \operatorname{tg} \varphi + 2U v_E \sin \varphi \\ w_\zeta^* = -\frac{v_E^2}{R_1} - \frac{v_N^2}{R_2} - 2U v_E \cos \varphi \quad (2.10)$$

Обозначим через  $V_{\xi}^{*2}$  и  $V^{*2}$  значения соответствующих величин  $V_{\xi}^2$  и  $V^2$  без членов, содержащих квадраты угловой скорости вращения Земли

$$V_{\xi}^{*2} = v_E^2 + 2R_1 v_E U \cos \varphi, \quad V^{*2} = V_{\xi}^{*2} + V_{\eta}^2 \quad (2.11)$$

и введем переменный малый параметр

$$\mu = e^2 \cos^2 \varphi \quad (2.12)$$

Тогда с точностью до членов выше первого порядка относительно  $\mu$  будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\xi}^* &= \dot{V}_{\xi} - \frac{V_{\xi} V_{\eta}}{R_1} \operatorname{tg} \varphi, & \dot{w}_{\eta}^* &= \dot{V}_{\eta} + \frac{V_{\xi}^{*2}}{R_1} \operatorname{tg} \varphi \\ \dot{w}_{\zeta}^* &= -\frac{V^{*2}}{R_1} \left( 1 + \mu \frac{V_{\eta}^2}{V^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Приведем две формулы (они справедливы с принятой точностью)

$$\frac{R_1}{R_2} = 1 + \mu, \quad \dot{\mu} = -2\mu \frac{V_{\eta}}{R_1} \operatorname{tg} \varphi \quad (2.14)$$

Заметим, что все формулы этого и последующих разделов легко обобщить на случай, когда точка  $O$  имеет и вертикальные перемещения.

§ 3. В теории гироскопических приборов часто вводят систему координат, в которой плоскость  $x^{\circ}y^{\circ}$  горизонтальна, а ось  $y^{\circ}$  совпадает с горизонтальной составляющей угловой скорости вращения трехгранника  $\xi\eta\zeta$  (фиг. 2). Угол  $\vartheta$  определяется по (2.7)

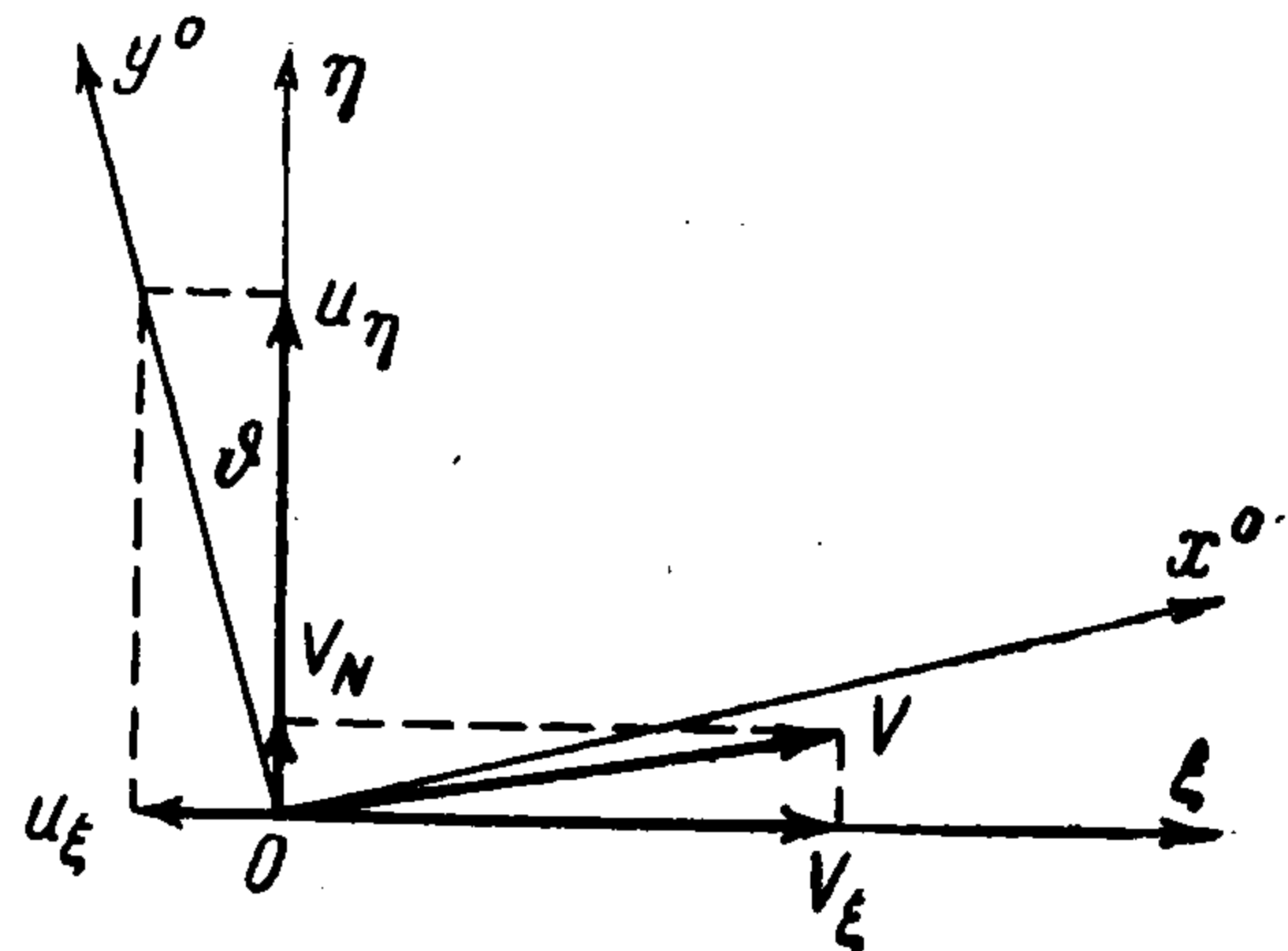
равенством

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{R_1 V_{\eta}}{R_2 V_{\xi}} \quad (3.1)$$

С принятой точностью получим

$$\operatorname{tg} \vartheta = (1 + \mu) \frac{V_{\eta}}{V_{\xi}}, \quad \sin \vartheta = \frac{V_{\eta}}{V} \left( 1 + \mu \frac{V_{\xi}^2}{V^2} \right)$$

$$\cos \vartheta = \frac{V_{\xi}}{V} \left( 1 - \mu \frac{V_{\eta}^2}{V^2} \right) \quad (3.2)$$



Фиг. 2

Составим выражения для проекций скорости  $V$  на оси  $x^{\circ}$ ,  $y^{\circ}$ ,  $z^{\circ}$

$$V_{x^{\circ}} = V_{\xi} \cos \vartheta + V_{\eta} \sin \vartheta, \quad V_{y^{\circ}} = -V_{\xi} \sin \vartheta + V_{\eta} \cos \vartheta, \quad V_{z^{\circ}} = V_{\zeta}$$

С точностью до членов выше первого порядка найдем (полезно отметить, что в отличие от случая сферы вектор скорости  $V$  не совпадает с осью  $x^{\circ}$ )

$$V_{x^{\circ}} = V, \quad V_{y^{\circ}} = -\mu \frac{V_{\xi} V_{\eta}}{V}, \quad V_{z^{\circ}} = 0 \quad (3.3)$$

Аналогично получим проекции ускорения  $w^*$  на оси  $x^{\circ}$ ,  $y^{\circ}$ ,  $z^{\circ}$

$$\begin{aligned} w_{x^{\circ}}^* &= \dot{V} - \frac{V_{\eta}}{R_1 V} (V_{\xi}^2 - V_{\xi}^{*2}) \operatorname{tg} \varphi + \mu \frac{V_{\xi} V_{\eta}}{V} \left( \dot{\vartheta}_0 + \frac{V_{\xi}}{R_1} \frac{V^{*2}}{V^2} \operatorname{tg} \varphi \right) \\ w_{y^{\circ}}^* &= \left( \dot{\vartheta}_0 + \frac{V_{\xi}}{R_1} \frac{V^{*2}}{V^2} \operatorname{tg} \varphi \right) V - \mu \frac{V_{\xi} V_{\eta}}{V^2} \left[ \dot{V} - \frac{V_{\eta}}{R_1 V} (V_{\xi}^2 - V_{\xi}^{*2}) \operatorname{tg} \varphi \right] \\ w_{z^{\circ}}^* &= -\frac{V^{*2}}{R_1} \left( 1 + \mu \frac{V_{\eta}^2}{V^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этих формулах  $\dot{\vartheta}_0$  равно значению производной от угла  $\vartheta$  по времени  $t$  при условии, что отсутствует сжатие Земли

$$\dot{\vartheta}_0 = \frac{V_\xi \dot{V}_\eta - \dot{V}_\xi V_\eta}{V^2} \quad (3.5)$$

Проекция на оси  $x^\circ, y^\circ, z^\circ$  угловой скорости  $\omega_e$  вращения трехгранника  $x^\circ y^\circ z^\circ$  относительно инерциальной системы отсчета имеют вид

$$\omega_{ex^\circ} = 0, \quad \omega_{ey^\circ} = \omega_1, \quad \omega_{ez^\circ} = \omega \quad (3.6)$$

где

$$\omega_1 = \frac{V}{R_1} \left( 1 + \mu \frac{V_\eta^2}{V^2} \right), \quad \omega = \omega_0 + \mu \left( \dot{\vartheta}_0 - 2 \frac{V_\eta^2}{V^2} \omega_0 \right) \quad (3.7)$$

Здесь  $\omega_0$  — значение  $\omega$  при  $\mu = 0$

$$\omega_0 = \dot{\vartheta}_0 + \frac{V_\xi}{R_1} \operatorname{tg} \varphi \quad (3.8)$$

Переменный параметр  $\mu$  мал по сравнению с единицей и он изменяется в пределах  $0 \leq \mu \leq 0.00675$ , причем  $\mu = 0$  на полюсе. Поэтому в некоторых случаях с достаточной для практики точностью проекции ускорения  $w^*$  на оси  $x^\circ, y^\circ, z^\circ$  можно вычислять по формулам

$$\begin{aligned} w_{x^\circ}^* &= \dot{V} - \frac{V_\eta}{R_1 V} (V_\xi^2 - V_\xi^{*2}) \operatorname{tg} \varphi \\ w_{y^\circ}^* &= \left( \dot{\vartheta}_0 + \frac{V_\xi}{R_1} \frac{V^{*2}}{V^2} \operatorname{tg} \varphi \right) V, \quad w_{z^\circ}^* = -\frac{V^{*2}}{R_1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Наконец, если в этих формулах отбросить верхний значок  $*$ , то получим проекции на оси  $x^\circ, y^\circ, z^\circ$  полного ускорения точки, движущейся по поверхности Земли в предположении, что последняя имеет форму правильного шара [2]

$$w_{x^\circ} = \dot{V}, \quad w_{y^\circ} = \omega_0 V, \quad w_{z^\circ} = -\frac{V^2}{R} \quad (3.10)$$

§ 4. Перейдем к вычислению проекций на оси  $x^\circ, y^\circ, z^\circ$  силы  $Q$ , определенной равенством (1.1). Так как сила веса  $P = mg$  направлена по нормали к поверхности Земли, то будем иметь

$$Q_{x^\circ} = -mw_{x^\circ}^*, \quad Q_{y^\circ} = -mw_{y^\circ}^*, \quad Q_{z^\circ} = -m(g + w_{z^\circ}^*) \quad (4.1)$$

где  $w_{x^\circ}^*, w_{y^\circ}^*, w_{z^\circ}^*$  должны вычисляться по формулам (3.4).

Если определить силу  $Q$  равенством (1.2), как это сделано в работах [1-4, 8], то ее проекции на соответствующие оси будут равны (в этом случае ось  $z^\circ$  направлена по псевдовертикали, а оси  $x^\circ$  и  $y^\circ$  находятся в псевдогоризонтальной плоскости)

$$\begin{aligned} Q_{x^\circ}' &= -mw_{x^\circ} = -m\dot{V}, \quad Q_{y^\circ}' = -mw_{y^\circ} = -m\omega_0 V \\ Q_{z^\circ}' &= -(F + mw_{z^\circ}) = -\left( F - m \frac{V^2}{R} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для того чтобы не смешивать проекции (4.1) и (4.2), последние обозначены штрихами.

Легко показать, что горизонтальные составляющие  $Q_{x^\circ}$  и  $Q_{y^\circ}$  силы  $Q$  могут существенным образом отличаться от ее псевдогоризонтальных

составляющих  $Q_{x^{\circ}}$  и  $Q_{y^{\circ}}$ . Так, например, при  $v_E = 0$  и  $v_N = \text{const}$  будем иметь  $Q_{x^{\circ}} : Q_{x^{\circ}'} \approx 2$ . Отличие в проекциях  $Q_{z^{\circ}}$  и  $Q_{z^{\circ}'}$  невелико, так как  $F \approx mg$  и при сравнительно небольших скоростях (например,  $v \leq 50$  узлов)

$$\frac{v^2}{R_1} < \frac{V^2}{R_1} \ll g$$

§ 5. Применим полученные результаты к выводу дифференциальных уравнений прецессионного движения гиросамы, принципиальная схема которой описана в работе А. Ю. Ишлинского [2]. Для того чтобы составить эти уравнения, ориентируя движение относительно истинной горизонтальной плоскости, достаточно в дифференциальных уравнениях (40) работы [2] заменить проекции ускорения  $w$  по формулам (3.10) на проекции ускорения  $w^*$  по формулам (3.4); кроме того, проекции угловой скорости  $\omega_e$  вращения трехгранника  $Ox^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$  относительно инерциальной системы отсчета  $V/R$  и  $\omega_0$  нужно заменить на соответствующие выражения  $\omega_1$  и  $\omega$  по формулам (3.7) и (3.8). Выполнив указанные замены, получим искомые дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} 2B \cos \varepsilon [(\dot{\alpha} + \omega) \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma + \omega_1 (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma)] = \\ = ml [-w_{x^{\circ}}^* \sin \alpha \cos \beta + w_{y^{\circ}}^* \cos \alpha \cos \beta + (g + w_{z^{\circ}}^*) \sin \beta] - M_x' \\ \frac{d}{dt} (2B \cos \varepsilon) = ml [w_{x^{\circ}}^* (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$+ w_{y^{\circ}}^* (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - (g + w_{z^{\circ}}^*) \cos \beta \sin \gamma] + M_y'$$

$$2B \cos \varepsilon [-(\dot{\alpha} + \omega) \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma + \omega_1 (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma)] = M_z'$$

$$2B \sin \varepsilon [(\dot{\alpha} + \omega) \sin \beta + \dot{\gamma} + \omega_1 \cos \alpha \cos \beta] = -N$$

В этих уравнениях  $M_x'$ ,  $M_y'$ ,  $M_z'$  — дополнительные моменты, которые могут быть созданы специальными приспособлениями; остальные обозначения имеют те же значения, что и в работе [2], причем углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  отличаются от соответствующих углов [2], так как они определены в системе координат  $x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$ , в которой ось  $z^{\circ}$  совпадает с истинной, а не псевдовертикалью.

Для того чтобы рассматриваемая гиросама была гиросамой-компасом, нужно подобрать такие моменты  $N$ ,  $M_x'$ ,  $M_y'$ ,  $M_z'$ , при которых может осуществляться движение  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Внося эти выражения в уравнения (5.1), получим

$$2B \omega \cos \varepsilon = ml w_{y^{\circ}}^* - M_x', \quad 0 = M_z' \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} (2B \cos \varepsilon) = ml w_{x^{\circ}}^* + M_y', \quad 2B \omega_1 \sin \varepsilon = -N$$

Отсюда

$$2B \cos \varepsilon = \frac{ml w_{y^{\circ}}^* - M_x'}{\omega}, \quad M_y' = \frac{d}{dt} \left[ \frac{ml w_{y^{\circ}}^* - M_x'}{\omega} \right] - ml w_{x^{\circ}}^* \quad (5.3)$$

$$N = -2B \omega_1 \sin \varepsilon$$

Момент  $M_x'$  произволен, причем, если  $M_x' = M_x'(\varepsilon)$ , то моменты  $M_y'$  и  $N$  можно рассматривать как функции угла  $\varepsilon$ , так как связь между временем  $t$  и углом  $\varepsilon$  устанавливается первым равенством (5.3).

Если условия (5.3) выполняются во все время движения, а в начальный момент  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , то гиросама будет в равновесии относительно системы отсчета  $x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$ ,

указывая все время истинную вертикаль места и плоскость меридиана (с точностью до курсовой поправки, равной  $\theta$ ).

Из равенств (5.3) легко получить условия А. Ю. Ишлинского. Для этого достаточно положить  $M_x' = 0$  и заменить проекции  $w_{x^0}^*$  и  $w_{y^0}^*$  на  $w_{x^0} = \dot{V}$  и  $w_{y^0} = \omega_0 V$ ; кроме того, нужно учесть, что в случае шара  $\omega_1 = V/R$  и  $\omega = \omega_0$  (формулы (3.7) и (3.10)). Внося эти выражения в условия (5.3), найдем (см. [2])

$$M_y' \equiv 0, \quad 2B \cos \varepsilon' = mlV, \quad N = - \frac{4B^2 \sin \varepsilon' \cos \varepsilon'}{Rml} \quad (5.4)$$

Напомним, что переход от проекций ускорения  $w^*$  к проекциям полного ускорения  $w$  равносильен переходу от истинной вертикали к псевдовертикали и, следовательно, при выполнении условий (5.4) гирорама не будет показывать горизонтальную плоскость (для того чтобы не смешивать значения углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  с соответствующими углами работы [2], в условиях (5.4) угол  $\varepsilon$  обозначен штрихом).

Автор благодарен А. И. Лурье и Г. Ю. Джанелидзе за обсуждение данной работы.

Поступила 24 I 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического компаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
4. Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
5. Идельсон Н. И. Теория потенциала. ОНТИ, 1936.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
7. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. Физматгиз, 1961.
8. Ишлинский А. Ю. Об автономном определении местоположения движущегося объекта посредством пространственного гироскопического компаса, гироскопа направления и интегрирующего устройства. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
9. Кошляков В. Н. К теории гироскопов. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
10. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
11. Кошляков В. Н. О приводимости уравнений движения гироскопического компаса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
12. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гирорамы. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
13. Ляшенко В. Ф. О приводимости уравнений движения гироскопического компаса и двухгироскопической вертикали. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
14. Жбанов Ю. К. К теории гироскопического компаса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
15. Зоммерфельд А. Механика. ГИИЛ, 1947.
16. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИИЛ, 1955.
17. Апфель П. Теоретическая механика. Физматгиз, 1960, т. 2.
18. Суслев Г. К. Теоретическая механика. Гостехиздат, 1946.
19. Леви-Чивита Т и Амальди У. Курс теоретической механики. ГИИЛ, 1951, т. 2, ч. I.