

О КОЛЕБАНИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, ИМЕЮЩЕГО ПОЛОСТИ, ЗАПОЛНЕННЫЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

П. С. Краснощеков

(Москва)

В работе [1] был предложен асимптотический метод исследования нестационарных движений вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса N_{Re} , возникающих при колебании различных твердых тел, либо заключающих в себе жидкость, либо погруженных в нее, а также при колебании жидких объемов, имеющих свободную поверхность.

В данной работе идея этого метода используется для исследования малых колебаний физического маятника, имеющего полости, целиком заполненные несжимаемой вязкой жидкостью.

1. Движение жидкости, заключенной в полости колеблющегося маятника (фиг. 1), описывается уравнениями Навье — Стокса и уравнением неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial t'} + (V' \cdot \nabla') V' &= \nabla' \phi' - \nu (\nabla' \times \Omega') \\ \operatorname{div} V' &= 0 \\ (\Omega' &= \nabla' \times V', \quad \phi' = -\frac{p}{\rho} - U) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь U — потенциал массовых сил, действующих на жидкость.

На границе полости должно выполняться условие прилипания частиц жидкости к стенкам полости, что дает следующие краевые условия:

$$u' = -y' \dot{\theta}, \quad v' = x' \dot{\theta}, \quad w' = 0 \quad (\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt'}) \quad (1.2)$$

Здесь θ — угол отклонения маятника от положения равновесия, u', v', w' — компоненты вектора скорости V' .

Положим

$$V' = V'' + V_0',$$

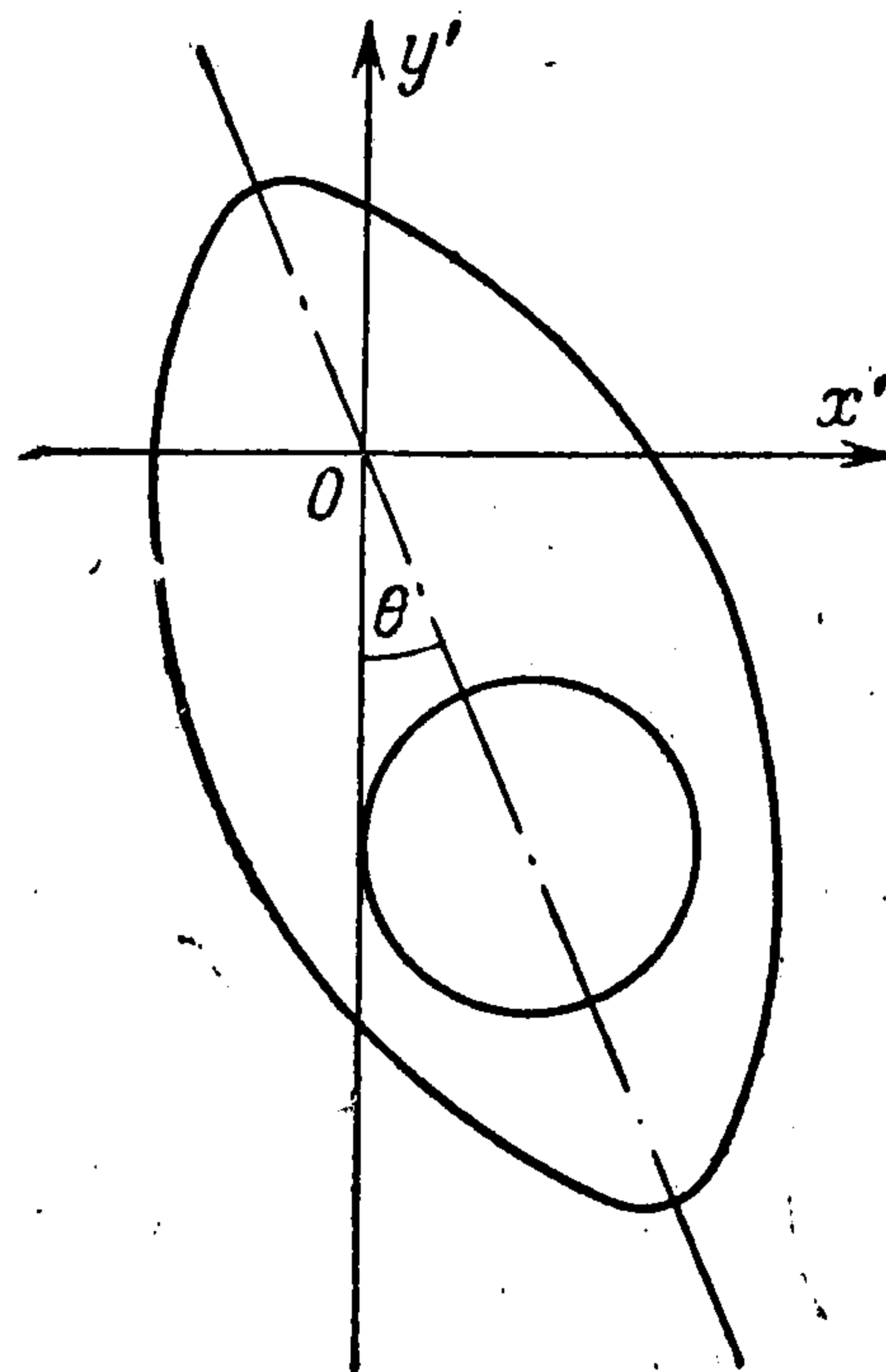
где V_0' — вектор скорости центра масс полости, и перейдем к новой системе координат (x'', y'', z'') с началом, расположенным в центре масс полости, и осями, параллельными осям неподвижной системы координат (x', y', z') .

В новой системе координат будем иметь:

$$\frac{\partial V''}{\partial t'} + (V'' \cdot \nabla'') V'' = \nabla'' \phi'' - \nu (\nabla'' \times \Omega''), \quad \operatorname{div} V'' = 0 \quad (1.3)$$

Здесь

$$\Omega'' = \nabla'' \times V'', \quad \phi'' = -p/\rho - U - (\dot{V}_0' \cdot r')$$



Фиг. 1

Институт механики
Академии наук СССР

На границе полости:

$$u'' = -y''\dot{\theta}, \quad v'' = x''\dot{\theta}, \quad w'' = 0 \quad (1.4)$$

Отнесем все величины к характерным масштабам. Положим:

$$t' = Tt, \quad x'' = Rx, \quad y'' = Ry, \quad z'' = Rz, \quad V'' = \frac{\alpha}{T}RV \quad (1.5)$$

$$\Omega'' = \frac{\alpha}{T}\Omega, \quad \varphi'' = \alpha\frac{R^2}{T^2}\varphi, \quad \theta = \alpha\vartheta, \quad N_{Re} = \frac{R^2}{\nu T}$$

где T — характерное время одного колебания, R — характерный размер полости, α — характерная амплитуда, N_{Re} — число Рейнольдса.

В безразмерных переменных уравнения (1.3) и краевые условия (1.4) запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha (V \cdot \nabla) V = \nabla \varphi - \frac{1}{N_{Re}} (\nabla \times \Omega), \quad \text{div } V = 0 \quad (1.6)$$

На границе полости:

$$u = -y\dot{\vartheta}, \quad v = x\dot{\vartheta}, \quad w = 0 \quad (1.7)$$

В системе уравнений (1.6) при нелинейных членах стоит множителем характерная амплитуда α .

Мы будем рассматривать колебания с малой амплитудой и в дальнейшем линеаризуем уравнения (1.6), пренебрегая величинами порядка α .

Линеаризованная система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla \varphi - \frac{1}{N_{Re}} (\nabla \times \Omega), \quad \text{div } V = 0 \quad (1.8)$$

В данной работе ставится целью исследование таких форм колебаний, при которых решение можно представить в виде:

$$\vartheta(t) = ce^{\sigma t}, \quad V = ce^{\sigma t}U(x, y, z) \quad (1.9)$$

Полагая $\varphi = ce^{\sigma t}\Phi(x, y, z)$, $\Omega = ce^{\sigma t}\Psi(x, y, z)$, имеем для таких движений:

$$\sigma U = \nabla \Phi - \frac{1}{N_{Re}} (\nabla \times \Psi), \quad \text{div } U = 0 \quad (1.10)$$

На границе полости:

$$U_x = -y\sigma, \quad U_y = x\sigma, \quad U_z = 0 \quad (1.11)$$

Соотношение (1.10) показывает, что вектор U представляет собой сумму потенциального и соленоидального векторов. Подобное представление позволяет разделить уравнения, получив для каждой неизвестной функции отдельное уравнение.

Действительно, взяв от обеих частей первого уравнения системы (1.10) операцию div , получим:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (1.12)$$

т. е. функция Φ — гармоническая в объеме, занятом жидкостью. Взяв

от обеих частей того же уравнения операцию rot , имеем:

$$\text{rot} \Psi = \frac{1}{N_{\text{Re}}} \Delta \Psi \quad (1.13)$$

Таким образом, каждая из неизвестных функций Φ , Ψ удовлетворяет отдельному уравнению.

На границе полости эти функции связаны между собой следующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{N_{\text{Re}}} \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) = -y\sigma^2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{N_{\text{Re}}} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) = x\sigma^2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{N_{\text{Re}}} \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) = 0$$

Здесь Ψ_x , Ψ_y , Ψ_z — компоненты вектора Ψ .

Четвертое краевое условие, определяющее на границе проекцию вектора Ψ на нормаль к поверхности полости, будет приведено в дальнейшем в специально выбранной криволинейной системе координат.

Будем рассматривать полости, представляющие собой фигуры вращения, оси которых перпендикулярны плоскости колебаний тела.

Введем криволинейную систему координат, связанную с поверхностью полости. В рассматриваемом случае удобно ввести следующие координаты: n — расстояние по внутренней нормали к поверхности полости, отсчитываемое от поверхности полости внутрь полости, α — угол, определяющий положение меридианной плоскости, β — длина дуги вдоль меридиана (фиг. 2). Переменные в системе координат (x, y, z) связаны с переменными n, α, β в криволинейной системе координат следующими соотношениями:

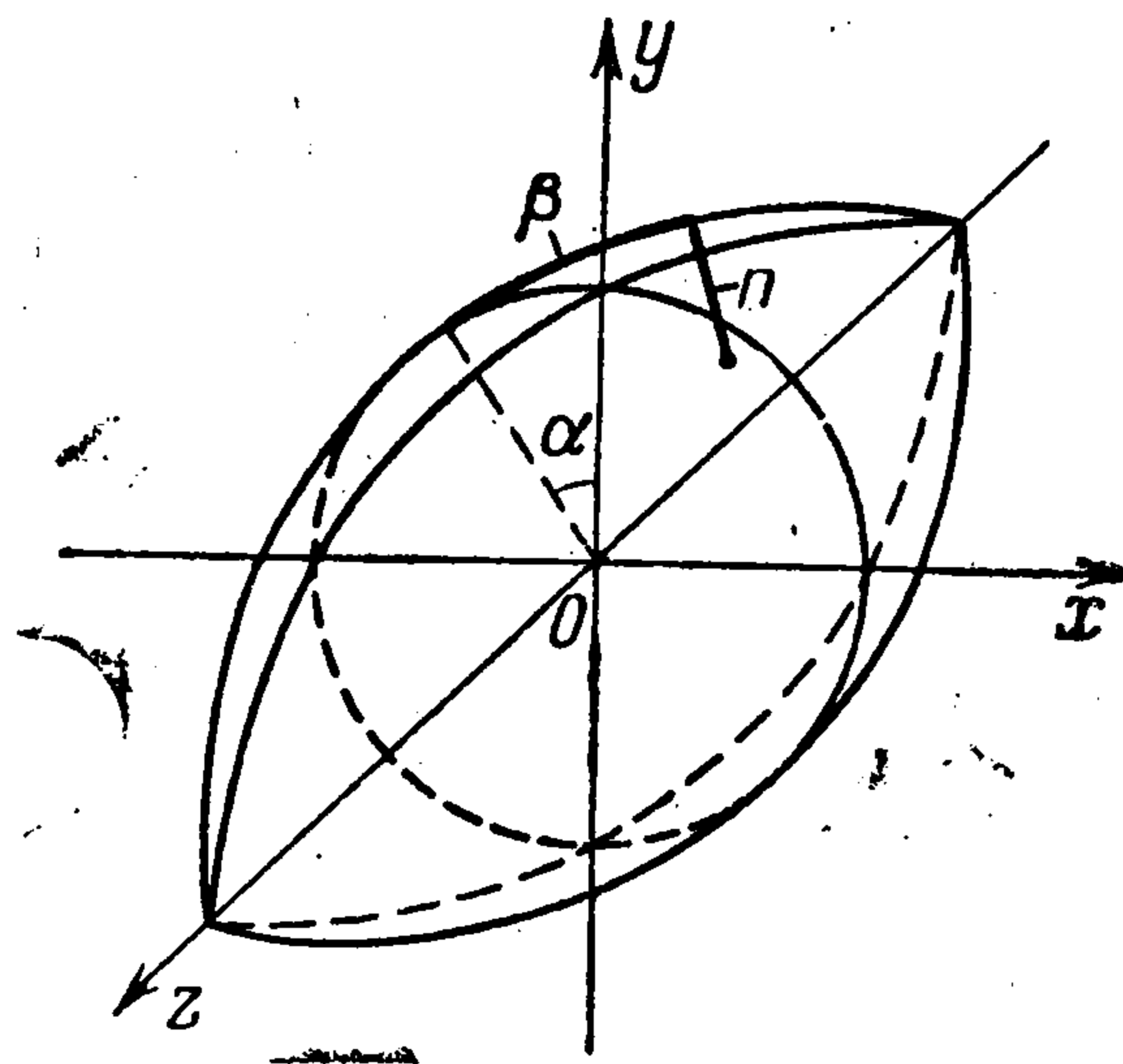
$$x = - \left[r_0 + \int_0^\beta \sin \gamma(\beta) d\beta - n \cos \gamma(\beta) \right] \sin \alpha = - [r(\beta) - n \cos \gamma(\beta)] \sin \alpha$$

$$y = \left[r_0 + \int_0^\beta \sin \gamma(\beta) d\beta - n \cos \gamma(\beta) \right] \cos \alpha = [r(\beta) - n \cos \gamma(\beta)] \cos \alpha$$

$$z = \int_0^\beta \cos \gamma(\beta) d\beta + n \sin \gamma(\beta)$$

Здесь r_0 — радиус круга, полученного в сечении полости плоскостью, перпендикулярной оси симметрии полости и проходящей через центр масс полости; $r(\beta)$ — радиус окружности, образованной точками на поверхности полости полости с одной и той же координатой β ; $\gamma(\beta)$ — угол между касательной к меридиану в точке с координатой β и положительным направлением оси z . Запишем в новой системе координат уравнения (1.13) и краевые условия. Ради краткости записи положим:

$$\Psi_x = \Psi_1, \quad \Psi_y = \Psi_2, \quad \Psi_z = \Psi_3$$



Фиг. 2

Тогда имеем в криволинейной системе координат:

$$\sigma \Psi_i = \frac{1}{N_{\text{Re}} [r(\beta) - n \cos \gamma(\beta)] [1 + n\gamma'(\beta)]} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1 + n\gamma'(\beta)}{r(\beta) - n \cos \gamma(\beta)} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r(\beta) - n \cos \gamma(\beta)}{1 + n\gamma'(\beta)} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left([r(\beta) - n \cos \gamma(\beta)] [1 + n\gamma'(\beta)] \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \right) \right] \\ \left(\gamma'(\beta) = \frac{d\gamma(\beta)}{d\beta} \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.14)$$

На границе полости, при $n = 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{N_{\text{Re}} r(\beta)} \left[\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial r(\beta)}{\partial \beta} \Psi_\alpha \right] = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{r(\beta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{1}{N_{\text{Re}}} \left[\frac{\partial \Psi_n}{\partial \beta} - \frac{\partial (1 + n\gamma'(\beta))}{\partial n} \Psi_\beta \right] = r(\beta) \sigma^2 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{1}{N_{\text{Re}} r(\beta)} \left[\frac{\partial (r(\beta) - n \cos \gamma(\beta))}{\partial n} \Psi_\alpha - \frac{\partial \Psi_n}{\partial \alpha} \right] = 0 \quad (1.17)$$

Приведем четвертое краевое условие. Нормальная компонента Ψ_n вектора вихря Ψ определяется через касательные компоненты U_α и U_β вектора скорости U следующим образом:

$$\Psi_n = \frac{1}{[r(\beta) - n \cos \gamma(\beta)] [1 + n\gamma'(\beta)]} \left[\frac{\partial (1 + n\gamma'(\beta))}{\partial \alpha} U_\beta - \frac{\partial (r(\beta) - n \cos \gamma(\beta))}{\partial \beta} U_\alpha \right]$$

На границе полости вектор U известен, следовательно, известны его компоненты U_α и U_β при $n = 0$. Дифференцирование по α и β при $n = \text{const}$ возможно, поэтому не составляет особого труда вычисление величины Ψ_n при $n = 0$. После несложных выкладок получаем:

$$\Psi_n = -2 \sin \gamma(\beta) \sigma \quad (1.18)$$

Это соотношение замыкает систему граничных условий для неизвестных функций Φ , Ψ_i .

Входящие в соотношения (1.15) — (1.18) величины Ψ_α , Ψ_β , Ψ_n представляют собой компоненты вектора Ψ в криволинейной системе координат. Они связаны с компонентами Ψ_i соотношениями:

$$\Psi_\alpha = -\Psi_1 \cos \alpha - \Psi_2 \sin \alpha \\ \Psi_\beta = -\Psi_1 \sin \gamma(\beta) \sin \alpha + \Psi_2 \sin \gamma(\beta) \cos \alpha + \Psi_3 \cos \gamma(\beta) \quad (1.19) \\ \Psi_n = \Psi_1 \cos \gamma(\beta) \sin \alpha - \Psi_2 \cos \gamma(\beta) \cos \alpha + \Psi_3 \sin \gamma(\beta)$$

Будем предполагать, что параметры маятника обеспечивают достаточно большое число Рейнольдса. Положим:

$$\frac{1}{N_{\text{Re}}} = \varepsilon^2 \quad (1.20)$$

где ε — безразмерный малый параметр.

Идея построения решения при больших числах Рейнольдса, предложенная в работе [1], аналогична идее построения пограничного слоя. Предполагается, что вихри, существующие в колеблющейся жидкости,

заключенной в полости маятника, сосредоточены в основном в тонком слое у стенок полости. Это в свою очередь позволяет считать производные от компонент вектора Ψ по нормали к поверхности полости существенно большими, чем по касательным направлениям. Произведем «растяжение» независимой переменной n . Положим:

$$n = \varepsilon \eta$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \dots, \quad \Psi_i = \frac{1}{\varepsilon} \Psi_{0i} + \Psi_{1i} + \dots \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.21)$$

Подставляя ряды (1.21) в уравнения и краевые условия и приравнявая нулю сумму коэффициентов при нулевой степени параметра ε , получаем следующую задачу для определения функций Φ_0 и Ψ_{0i} :

$$\Delta \Phi_0 = 0, \quad \sigma \Psi_{0i} = \frac{\partial^2 \Psi_{0i}}{\partial \eta^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.22)$$

На границе полости, при $n = 0$:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{1}{r(\beta)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi_{0\beta}}{\partial \eta} = r(\beta) \sigma^2, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \Psi_{0\alpha}}{\partial \eta} = 0, \quad \Psi_{0n} = 0 \quad (1.23)$$

Из первого соотношения условий (1.23) усматриваем, что нормальная производная гармонической функции Φ_0 на границе полости равна нулю. Отсюда без ограничения общности можно считать $\Phi_0 \equiv \text{const}$.

Компоненты вектора Ψ в криволинейной системе координат связаны с компонентами этого вектора в декартовой системе координат соотношениями (1.19). Эти соотношения линейны относительно Ψ_{01} , Ψ_{02} , Ψ_{03} , и коэффициенты, стоящие при Ψ_{01} , Ψ_{02} , Ψ_{03} , не зависят от η , следовательно, функции $\Psi_{0\alpha}$, $\Psi_{0\beta}$ и Ψ_{0n} удовлетворяют тем же уравнениям, что и Ψ_{0i} . Таким образом:

$$\sigma \Psi_{0\alpha} = \frac{\partial^2 \Psi_{0\alpha}}{\partial \eta^2}, \quad \sigma \Psi_{0\beta} = \frac{\partial^2 \Psi_{0\beta}}{\partial \eta^2}, \quad \sigma \Psi_{0n} = \frac{\partial^2 \Psi_{0n}}{\partial \eta^2} \quad (1.24)$$

На границе полости эти функции удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial \Psi_{0\beta}}{\partial \eta} = r(\beta) \sigma^2, \quad \frac{\partial \Psi_{0\alpha}}{\partial \eta} = 0, \quad \Psi_{0n} = 0 \quad (1.25)$$

Общее решение уравнения, которому удовлетворяют $\Psi_{0\alpha}$, $\Psi_{0\beta}$ и Ψ_{0n} , имеет следующий вид:

$$u = c_1 e^{V \sigma \eta} + c_2 e^{-V \sigma \eta}$$

Пусть $\text{Re } V \sigma > 0$. По предположению, вдали от стенок полости вихри отсутствуют. Так же, как это делается в теории пограничного слоя, будем считать значение $\eta = \infty$ соответствующим внутренним точкам полости, достаточно удаленным от границы. Тогда в соответствии с предположением об отсутствии вихрей при $\eta = \infty$ будем иметь $c_1 = 0$.

Произвольная постоянная интегрирования c_2 определяется из условий (1.25). Окончательно для функций $\Psi_{0\alpha}$, $\Psi_{0\beta}$, $\Psi_{0\eta}$ получим

$$\Psi_{0\alpha} = 0, \quad \Psi_{0\beta} = -r(\beta) \sigma \sqrt{\sigma} e^{-V\sigma\eta}, \quad \Psi_{0\eta} = 0 \quad (1.26)$$

Ограничимся определением только первых членов рядов (1.21). В пределах этой точности выпишем компоненты вектора абсолютной скорости V' в неподвижной системе координат с началом в точке подвеса маятника:

$$\begin{aligned} u' &= c \frac{R}{T} [l\sigma - r(\beta) \sigma \cos \alpha e^{-V\sigma\eta} + O(\varepsilon)] e^{\sigma t}, & w' &= 0 \\ v' &= -c \frac{R}{T} [r(\beta) \sigma \sin \alpha e^{-V\sigma\eta} + O(\varepsilon)] e^{\sigma t}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где l — расстояние центра масс полости от оси подвеса, отнесенное к характерному размеру полости. Полученное решение (1.27) будет асимптотическим. Относительно него имеет место следующий результат, доказательство которого здесь не приводится. Модуль разности

$$|V' - V_0'| \leq O(\varepsilon)$$

Здесь V' — точное решение линеаризованной задачи, а V_0' — полученное нами приближенное решение этой же задачи.

Таким образом, если число Рейнольдса достаточно велико, то приближенное решение обеспечивает хорошую точность.

2. Для того чтобы до конца решить поставленную задачу, необходимо определить неизвестную до сих пор постоянную σ . Для этого нужно воспользоваться уравнением колебаний маятника, которое можно получить, используя теорему об изменении момента количества движения системы. Имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_1} (\mathbf{r}' \times \rho_1 \mathbf{V}_1') d\tau + \frac{d}{dt} \int_D (\mathbf{r}' \times \rho \mathbf{V}') d\tau = \int_{D_1} (\mathbf{r}' \times \rho_1 \mathbf{g}) d\tau + \int_D (\mathbf{r}' \times \rho \mathbf{g}) d\tau \quad (2.1)$$

Здесь D_1 — объем твердого тела; D — объем полости; ρ_1 и \mathbf{V}_1' — соответственно плотность и скорость точек тела; ρ и \mathbf{V}' — плотность и скорость частиц жидкости; \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести; \mathbf{r}' — радиус-вектор, идущий от оси вращения в точку тела или жидкости. В нашем случае уравнение моментов (2.1) дает проекцию, отличную от тождественного нуля, лишь на ось z' .

Интегралы, входящие в (2.1) (возвращаясь к размерным переменным по формулам (1.5)), можно привести к следующему виду

$$\left\{ \frac{d}{dt} \int_{D_1} (\mathbf{r}' \times \rho_1 \mathbf{V}_1') d\tau \right\}_{z'} = c M_1 k^2 \sigma'^2 e^{\sigma' t'} \quad \left(\sigma' = \frac{\sigma}{T} \right) \quad (2.2)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \int_D (\mathbf{r}' \times \rho \mathbf{V}') d\tau \right\}_{z'} = c (M l'^2 \sigma'^2 + \sqrt{V} M Q \sigma'^{\frac{3}{2}}) e^{\sigma' t'} \quad \left(M Q = 2\pi \rho \int_{\beta_1'}^{\beta_2'} r'^3(\beta') d\beta' \right) \quad (2.3)$$

$$\left\{ \int_{D_1} (\mathbf{r}' \times \rho_1 \mathbf{g}) d\tau + \int_D (\mathbf{r}' \times \rho \mathbf{g}) d\tau \right\}_{z'} = -c g (M_1 l_1' + M l') e^{\sigma' t'} \quad (2.4)$$

Здесь M_1 — масса твердого тела; M — масса жидкости; k — радиус инерции твердого тела относительно оси подвеса маятника; l' — расстояние от оси подвеса до центра масс полости; l_1' — расстояние от оси подвеса до центра масс твердого тела; β_1', β_2' — координаты полюсов полости.

Подставляя (2.2), (2.3) и (2.4) в (2.1), получаем следующее уравнение для определения σ' :

$$\sigma'^2 + \lambda \sqrt{\nu} \sigma'^{\frac{3}{2}} + \omega^2 = 0 \quad \left(\lambda = \frac{MQ}{M_1 k^2 + M l'^2}, \omega^2 = g \frac{M_1 l_1' + M l'}{M_1 k^2 + M l'^2} \right) \quad (2.5)$$

Положим $\sigma' = \nu \lambda^2 x$. Тогда (2.5) примет вид: (2.6)

$$x^2 + x^{\frac{3}{2}} + \frac{\omega^2}{\nu^2 \lambda^4} = 0 \quad \text{или} \quad y^4 + y^3 + q^2 = 0 \quad \left(\sqrt{x} = y, \frac{\omega^2}{\nu^2 \lambda^4} = q^2 \right)$$

Докажем, что это уравнение имеет всего лишь два корня, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} y > 0$. Положим $y = \alpha + i\beta$.

Для определения α и β , после подстановки в (2.6), получаем систему

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 + \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + q^2 &= 0 \\ 4\alpha^3 - 4\alpha\beta^2 - \beta^2 + 3\alpha^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Определяя β^2 из второго уравнения системы (2.7) и подставляя его в первое уравнение, получаем: (2.8)

$$64\alpha^6 + 96\alpha^5 + 48\alpha^4 + 8\alpha^3 - q^2(16\alpha^2 + 8\alpha + 1) = 0, \quad \beta_{1,2} = \pm \alpha \sqrt{\frac{4\alpha + 3}{4\alpha + 1}}$$

В первом уравнении (2.8) имеется всего лишь одна переменная знака в ряду коэффициентов. По правилу Декарта этот многочлен имеет один положительный корень. Отрицательные корни нас не интересуют, т. к. в этом случае нарушается условие $\operatorname{Re} \sqrt{x} > 0$. Из второго соотношения системы (2.8) определяются два значения β , отличающиеся только знаком. Таким образом, уравнение (2.6) при условии $\operatorname{Re} y > 0$ имеет только два корня.

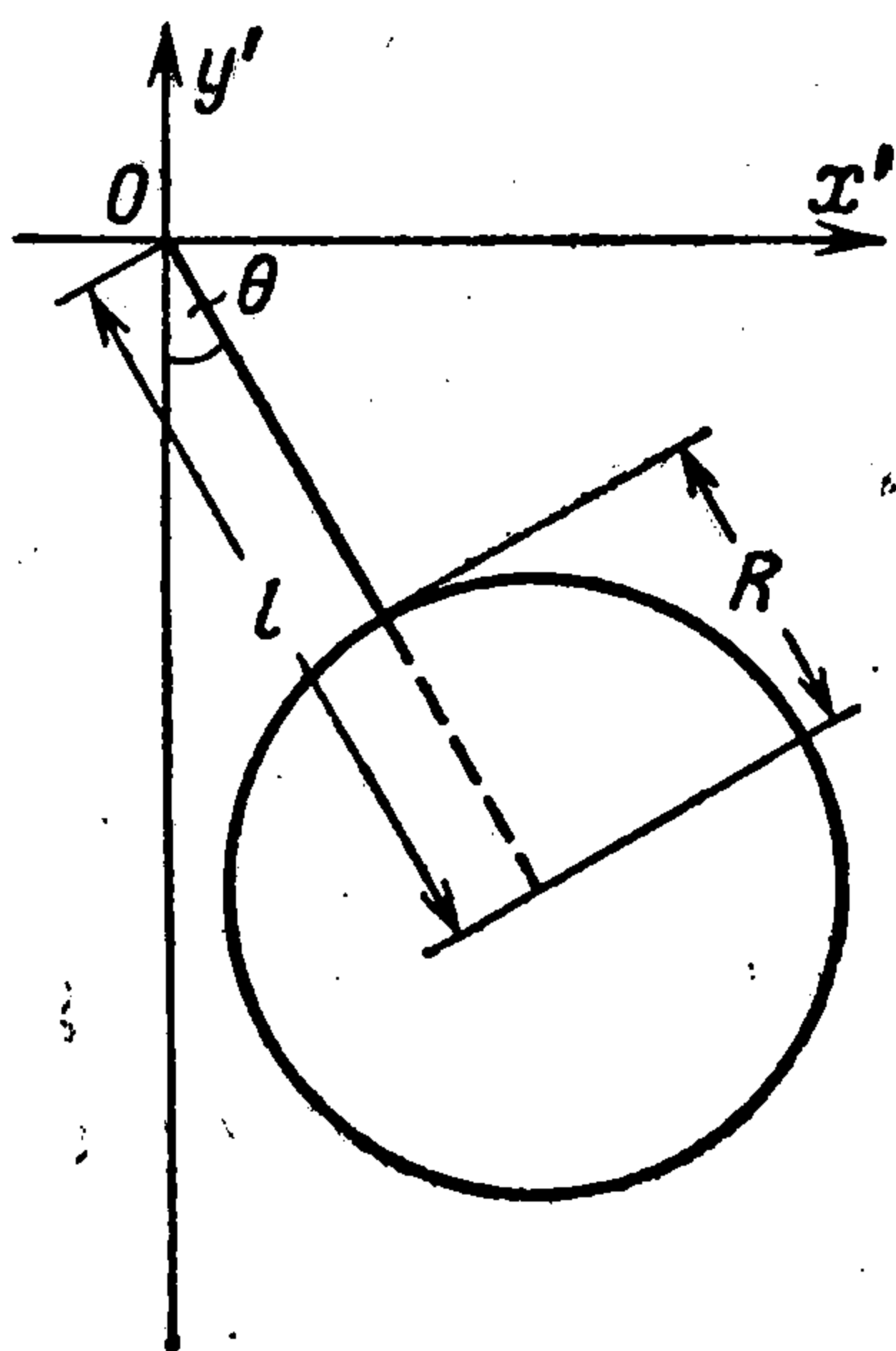
Будем разыскивать решение уравнения (2.6) в двух предельных случаях, когда q — велико и когда q — мало.

Напомним, что решение задачи о движении жидкости в полости маятника было получено при большом числе Рейнольдса. В свою очередь величина числа Рейнольдса существенно зависит от величины характерного времени одного колебания $\pi / |\operatorname{Im} \sigma'|$, которое определится только после решения уравнения (2.6). Следовательно, из всех возможных решений уравнения (2.6), соответствующих различным параметрам маятника, можно пользоваться лишь теми, которые обеспечивают достаточно большое число Рейнольдса. В дальнейшем мы увидим, что в рассматриваемых нами предельных случаях больших и малых q всегда можно подобрать такие параметры маятника, чтобы число Рейнольдса оставалось большим.

Рассмотрим случай больших q . Решение уравнения (2.6) будем разыскивать в виде ряда по степеням $1 / \sqrt{q}$

$$y = \sqrt{q} \left(y_0 + \frac{1}{\sqrt{q}} y_1 + \dots \right) \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.6) и приравнявая нулю суммы коэффициентов при одинаковых степенях величины $1/\sqrt{q}$, получаем уравнения для определения неизвестных y_0, y_1 и т. д.



Фиг. 3

Для y_0 имеем:

$$y_0^4 + 1 = 0, \quad \operatorname{Re} y_0 > 0.$$

Откуда находим:

$$y_{01} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad y_{02} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

Для определения y_1 имеем

$$4y_1 + 1 = 0 \quad \text{или} \quad y_1 = -1/4$$

С точностью до величин порядка $1/\sqrt{q}$ включительно найдем

$$y = \frac{\sqrt{2q}}{2} - \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{2q}}{2}$$

или

$$\sigma' = -\sqrt{v} \frac{\lambda \sqrt{\omega}}{2 \sqrt{2}} \pm i \left(\omega - \sqrt{v} \frac{\lambda \sqrt{\omega}}{2 \sqrt{2}} \right) \quad (\sigma' = v \lambda^2 y^2) \quad (2.10)$$

Таким образом, в рассмотренном случае частота n и амплитуда A колебаний маятника соответственно будут

$$n = \omega - \sqrt{v} \frac{\lambda \sqrt{\omega}}{2 \sqrt{2}}, \quad A = \exp \left(-\sqrt{v} \frac{\lambda \sqrt{\omega}}{2 \sqrt{2}} t' \right)$$

При $v \rightarrow 0$ коэффициент затухания стремится к нулю, а частота колебаний к частоте ω , соответствующей колебаниям маятника с идеальной жидкостью. Подсчитаем, на какую часть убывает амплитуда за время $T = \pi / |\operatorname{Im} \sigma'|$. Обозначим эту часть через Δ . Имеем:

$$\Delta = 1 - \frac{\exp \operatorname{Re}(\sigma' t_2')}{\exp \operatorname{Re}(\sigma' t_1')} = 1 - \exp \frac{\pi \operatorname{Re} \sigma'}{|\operatorname{Im} \sigma'|} \quad (2.11)$$

Определяя $\operatorname{Re} \sigma'$ и $|\operatorname{Im} \sigma'|$ из (2.10) и подставляя в (2.11), получаем:

$$\Delta = 1 - \exp \left(-\frac{\pi}{2 \sqrt{2q} - 1} \right) \approx \frac{\pi}{2 \sqrt{2q}} \quad (\Delta \rightarrow 0 \text{ при } q \rightarrow \infty)$$

Легко видеть, что рассмотренный случай больших q соответствует колебаниям, близким к колебаниям маятника с идеальной жидкостью.

Рассмотрим простейший пример. Пусть маятник представляет собой невесомую сферическую оболочку, заполненную вязкой жидкостью и при помощи невесомого стержня соединенную с осью подвеса (фиг. 3). Для такого маятника будем иметь:

$$\lambda = \frac{2R}{l^2}, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad q = \frac{\sqrt{g l^3}}{4\nu} \frac{l^2}{R^2} \quad (2.12)$$

$$\sigma' = -\sqrt{v} \frac{R \sqrt[4]{g}}{l^2 \sqrt[4]{4l}} \pm i \left(\sqrt{\frac{g}{l}} - \sqrt{v} \frac{R \sqrt[4]{g}}{l^2 \sqrt[4]{4l}} \right)$$

Характерное время одного колебания с точностью до величин порядка $1/\sqrt{q}$ определится следующим образом:

$$T \approx \pi \sqrt{l/g} \quad (2.13)$$

С ростом длины маятника l величина T растет. В этом случае появляется опасность недопустимого уменьшения числа Рейнольдса. Зададимся значением числа $N_{Re} \geq 10^4$ и оценим допустимое значение длины маятника l для различных значений радиуса R . По определению $N_{Re} = R^2/\nu T$. Чтобы сохранить $N_{Re} \geq 10^4$, необходимо потребовать

$$T \leq \frac{R^2}{\nu 10^4} \quad \text{или} \quad \frac{l}{R} \leq \frac{R^3 g}{\nu^2 \pi^2 10^8}$$

Пусть маятник заполнен водой при $t = 20^\circ \text{C}$ ($\nu = 1.01 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$). При $R = 0.1 \text{ м}$ имеем $l/R \leq 10$, т. е. $l \leq 1 \text{ м}$. При $R = 1 \text{ м}$ получаем $l/R \leq 10^4$, т. е. $l \leq 10 \text{ км}$. С ростом R допустимое значение величины l/R растет пропорционально R^3 . Таким образом, диапазон применимости решения (2.12) достаточно широк.

Рассмотрим теперь случай предельно малых q . Заметим, что реализовать малые q можно не только увеличением кинематического коэффициента вязкости ν , что может привести к уменьшению числа N_{Re} . Действительно, на примере только что рассмотренного маятника видно, что этого можно добиться уменьшением длины маятника l или увеличением радиуса полости R .

Представим уравнение (2.6) в следующем виде:

$$y^3 (y + 1) = -q^2 \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что

$$|y^3| |y + 1| = |-q^2| = q^2$$

С уменьшением q произведение $|y^3| |y + 1|$ убывает. Причем в этом процессе сомножитель $|y + 1|$ не может стремиться к нулю, т. к. в противном случае нарушится условие $\text{Re } y > 0$. Следовательно, модуль искомого корня имеет порядок малости $q^{2/3}$. Исходя из этого, будем искать решение уравнения (2.6) в виде следующего ряда:

$$y = q^{2/3} (y_0 + q^{1/3} y_1 + \dots)$$

Для определения неизвестных y_0 и y_1 получаем

$$y_0^3 + 1 = 0, \quad y_0^2 + 3y_1 = 0$$

Откуда находим:

$$y_{01} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_{02} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_{11} = \frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad y_{12} = \frac{1}{6} + i \frac{\sqrt{3}}{6}$$

С точностью до величин порядка $q^{1/3}$ включительно имеем:

$$y = \frac{1}{2} q^{2/3} \left[\left(1 + \frac{1}{3} q^{1/3}\right) \pm i \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3} q^{1/3}\right) \right]$$

Для σ' получаем выражение:

$$\sigma' = \frac{\omega^{4/3}}{2\nu^{1/3}\lambda^{2/3}} \left[- \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\omega^{2/3}}{\nu^{2/3}\lambda^{4/3}} \right) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad (2.15)$$

Или, ограничиваясь величинами порядка $q^{1/3}$:

$$\sigma' = \left(\frac{\omega^4}{\nu\lambda^2} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3} \right)$$

Так же, как и в предыдущем случае, определим, на какую часть убывает амплитуда от своего первоначального значения за характерное время T .

Имеем

$$\Delta = 1 - \exp \pi \operatorname{Re} \sigma' / |\operatorname{Im} \sigma'|$$

Используя для определения $\operatorname{Re} \sigma'$ и $|\operatorname{Im} \sigma'|$ выражение (2.15), получаем:

$$\Delta = 1 - \exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{4}{3} q^{2/3} \right) \right] \\ \left(\Delta \rightarrow 1 - \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \approx 0.84 \text{ при } q \rightarrow 0 \right) \quad (2.16)$$

Очевидно, что рассмотренный случай резко отличается от случая колебаний маятника с идеальной жидкостью. Оказывается, что можно выбрать полость маятника настолько большой или длину маятника настолько малой, что влиянием вязкости на движение маятника нельзя будет пренебрегать, несмотря на наличие больших чисел Рейнольдса. В случае предельно малых q за один размах амплитуда может уменьшиться на величину порядка 84% от первоначального значения.

Покажем на примере с маятником, изображенным на фиг. 3, что увеличением радиуса полости R при постоянных l и ν можно достичь как угодно больших чисел N_{Re} и как угодно малых q . Для рассматриваемого маятника имеем:

$$\sigma' = \left(\frac{g^2 l^2}{4R^2 \nu} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.17)$$

$$q = \frac{\sqrt{g l^3}}{4\nu} \frac{l^2}{R^2}, \quad N_{\operatorname{Re}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{R^{4/3}}{\nu} \left(g^2 \frac{l^2}{4\nu} \right)^{1/3} \quad (2.18)$$

Из (2.18) легко видеть, что $N_{\operatorname{Re}} \rightarrow \infty$, а $q \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Колебания маятника в этом случае резко отличаются от колебаний аналогичного маятника с идеальной жидкостью. Так маятник, залитый водой при $t = 20^\circ \text{C}$ ($\nu = 1.01 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$) с радиусом полости $R = 0.1 \text{ м}$ и длиной $l = 0.00016 \text{ м}$, совершит 5 колебаний в секунду, а такой же маятник с идеальной жидкостью 25 колебаний в секунду. При указанных выше параметрах маятника будем иметь:

$$q \approx 0.0012, \quad N_{\operatorname{Re}} \approx 10^4$$

что вполне оправдывает использование в этом случае решения (2.17).

Поступила 29 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье — Стокса в случае, когда вязкость мала. Журнал вычислит. математ. и математ. физики, 1961, т. 1, № 3.