

ОТРАЖЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ОТ ПРЕГРАДЫ

Н. В. Зволинский, Г. В. Рыков

(Москва)

Распространение плоской волны и взаимодействие ее с преградой в упруго-пластических средах рассматривались Б. А. Олисовым, С. Калиским и Ж. Осиецким [1], П. Пежиной [2], Г. М. Ляховым и Н. И. Поляковой [3]. В этих исследованиях закон нагружения аппроксимировался линейной или кусочно-линейной диаграммами сжатия. В работах [1, 2], кроме того, принималась гипотеза о постоянстве плотности при разгрузке.

В настоящей работе показано, что задача о взаимодействии плоской волны с преградой решается сравнительно просто, если принять степенную зависимость между напряжением и деформацией при нагрузке, при разгрузке плотность в частице предполагается постоянной. Такая аппроксимация хорошо описывает результаты эксперимента в большом диапазоне напряжений.

Изучаются параметры падающей волны в зависимости от заданного внешнего воздействия и параметры волны, отраженной от абсолютно жесткого или массивного подвижного препятствия.

Результаты настоящей работы могут найти применение при изучении волновых явлений в мягких грунтах.

§ 1. Описание среды. В качестве модели среды принимаем модель, предложенную С. С. Григоряном [5] для грунтов. В случае плоской волны условия коаксиальности тензоров напряжения и скоростей деформаций выполняются в силу симметрии и для описания среды остаются два условия:

а) закон объемного сжатия

$$\sigma = \sigma(\theta) \quad (1.1)$$

б) условие пластичности [6]

$$|\sigma_x - \sigma_y| = -m\sigma + m' \quad (1.2)$$

Здесь σ_x , σ_y — компоненты напряжения, σ — среднее напряжение, θ — объемное сжатие, m и m' — положительные константы.

В этой работе будем рассматривать явления только в условиях пластического деформирования.

Закон объемного сжатия предполагается различным при нагружении и разгрузении (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) = f_1(\theta) \quad \text{при } d\sigma/dt > 0 \text{ (линия } ABC) \\ \theta = \text{const}, \quad \sigma \text{ — неопределенно при } d\sigma/dt < 0 \text{ (прямая } BD) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если ограничиться рассмотрением только плоской волны, то достаточно иметь в своем распоряжении закон одноосного сжатия, который может быть получен из условий (1.2) и (1.3).

Пусть направление оси x совпадает с направлением распространения волны. Предполагая напряжение сжимающим, имеем:

$$\sigma_y - \sigma_x = -m\sigma + m' \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{3}{3+2m}\sigma_x + \frac{2m'}{3+2m}$$

Поэтому из (1.3) получим (для режима нагружения)

$$\sigma_x = \left(1 + \frac{2m}{3}\right) f_1(\theta) - \frac{2m'}{3} \equiv f(\theta)$$

При одноосной деформации $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, $\theta = \varepsilon_x$. Окончательно

$$\sigma_x = f(\varepsilon_x) \quad (1.4)$$

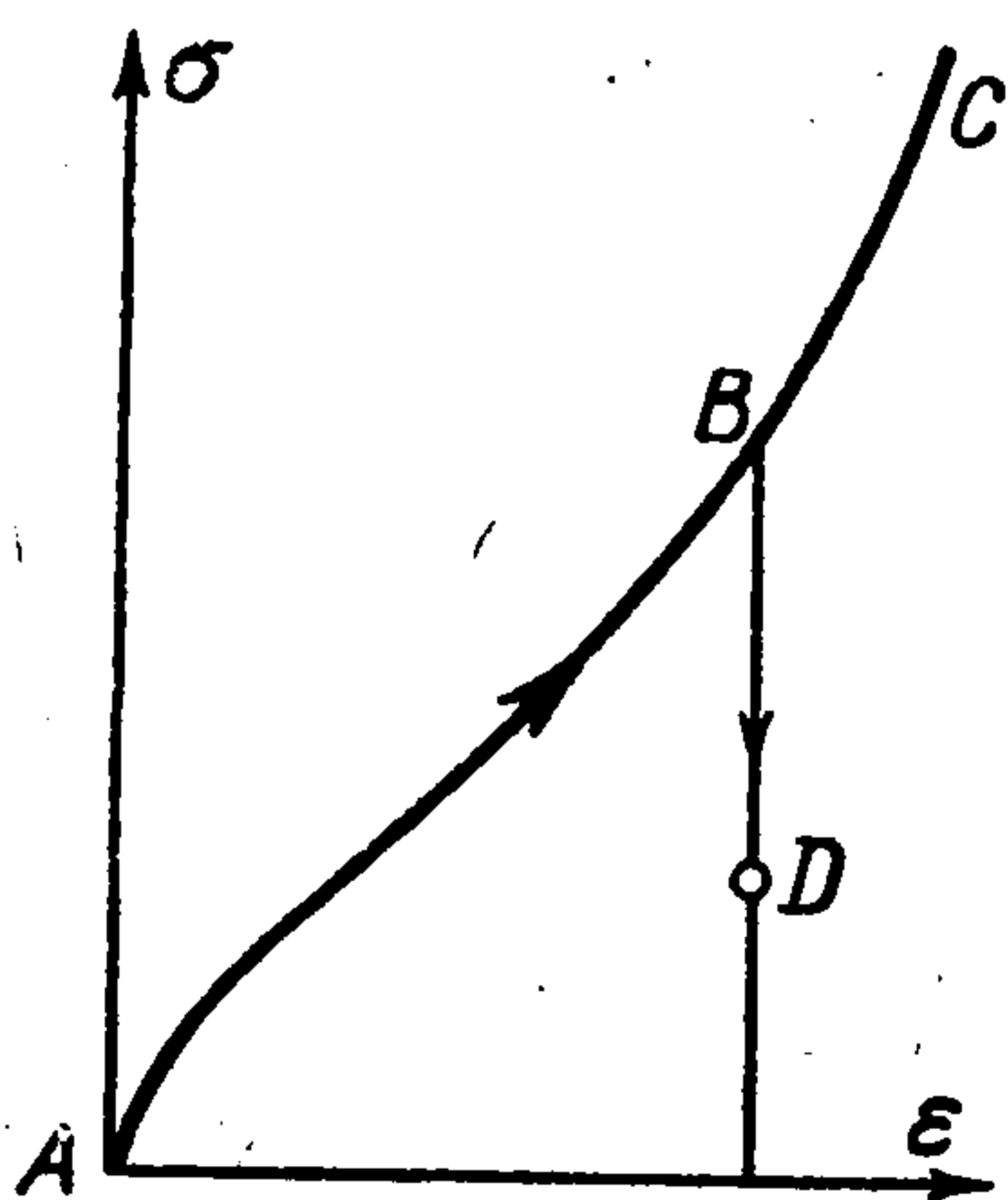
§ 2. Распространение плоской волны, возбуждаемой внешним воздействием. Пусть в точках некоторой плоскости задано, как функция времени, однородное сжимающее напряжение. В результате от точек плоскости начнут распространяться волны по обе ее стороны. Будем следить за одной из этих волн. Ось x совместим с направлением распространения. Описание явления будем вести в лагранжевых координатах (h, t) полагая

$$x(h, t) = h + u(h, t), \quad u(h, 0) = 0 \quad (2.1)$$

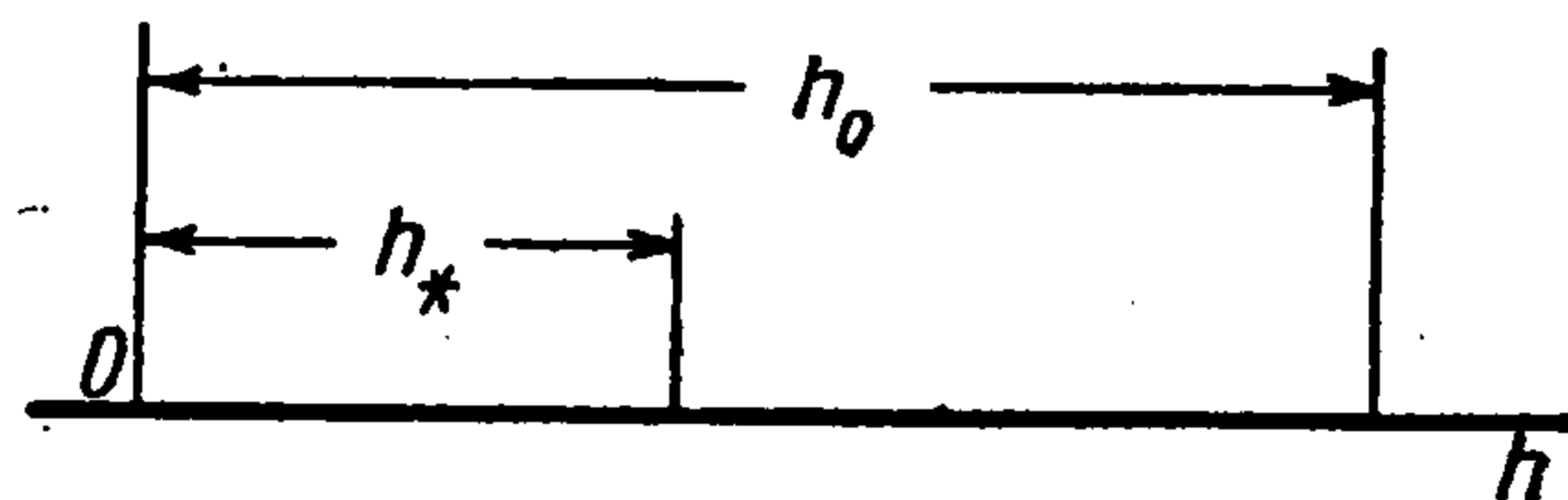
Здесь $x(h, t)$ — эйлерова координата, $u(h, t)$ — смещение частицы.

Закон одноосного деформирования будем предполагать в виде (1.4) для нагружения. При разгрузке будем считать $\varepsilon_x = \text{const}$. В соответствии

с известными опытными фактами предполагаем, что при повторном нагружении напряжение в частице растет без изменения плотности («по вертикали», фиг. 1), пока не будет вновь достигнуто прежнее максимальное



Фиг. 1



Фиг. 2

напряжение (точка B). Дальнейшее возрастание напряжения происходит по нагрузочной ветви диаграммы сжатия (участок BC). В дальнейшем, для простоты будем писать σ вместо σ_x и ε вместо ε_x . Так как будет рассматриваться только пластическое состояние, то можно пользоваться указанным законом, исключая некоторый начальный участок кривой, соответствующий упругой стадии.

До приложения внешней нагрузки среда находилась в невозмущенном состоянии. Предполагаем, что внешнее напряжение приложено мгновенно, и что затем с течением времени оно убывает по абсолютной величине. Эти предположения о характере внешней нагрузки существенны для того метода решения, который предполагается здесь. Вместе с тем указанный характер нагружения типичен для явления взрыва. Естественно ожидать, что ударная нагрузка вызовет волну с ударным фронтом. Координату

фронта (фиг. 2) обозначим через h_* , а координату плоскости с заданным напряжением — h_0 . Частицы с координатами h , для которых $h_* < h < h_0$, испытывают состояние разгрузки. В этой области имеем уравнение движения и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h} - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\rho_0}{\rho(h)} = 1 + \varepsilon(h) \quad (2.2)$$

Здесь $v(h, t)$ — скорость частицы, ρ_0 и $\rho(h)$ — значения плотности начальной и последующей, возникшей после прохождения ударной волны. Из второго уравнения (2.2) получаем

$$x(h, t) = \int_{h_0}^h \frac{\rho_0 d\eta}{\rho(\eta)} + x_0(t) \quad (2.3)$$

Далее

$$v(h, t) = \frac{\partial x}{\partial t} = x_0'(t) \quad (2.4)$$

и, следовательно, скорость частицы не зависит от координаты, а зависит только от времени. Пользуясь (2.4), из первого уравнения (2.2) имеем

$$\sigma(h, t) = \rho_0 x_0''(t)(h - h_0) + C(t) \quad (2.5)$$

Для полного описания образовавшейся волны надо знать функции $x(h, t)$, $v(h, t)$, $\sigma(h, t)$, $\rho(h)$, $\varepsilon(h)$, $h_*(t)$. Из предыдущего видно, что достаточно найти функции $x_0(t)$, $C(t)$, $h_*(t)$, $\rho(h)$ и тогда остальные будут известны. Для определения четырех функций имеются четыре условия:

а) напряжение в плоскости $h = h_0$ задано, б) зависимость между деформацией и напряжением на фронте (диаграмма сжатия), в), г) два механических условия на ударном фронте.

Покажем, что эти условия достаточны для решения задачи и найдем решение. Внешнее напряжение в сечении $h = h_0$ естественно задавать в функции времени. Так как расстояние $h_*(t)$ есть также функция времени, притом монотонная, то будем предполагать, что напряжение $\sigma_0 = \sigma_0(h_*)$ есть известная функция от h_* .

Когда задача будет решена и будут найдены все элементы движения, в том числе функция $h_*(t)$, то станет известна σ_0 в функции времени и станет ясно, для какого закона нагрузки решена задача.

Четыре упомянутые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma(h_0, t) &= \sigma_0(h_*), & \sigma(h_*, t) &= f(\varepsilon_*), & \sigma(h_*, t) &= \rho_0 \varepsilon_* h_*'^2 \\ v(h_*, t) &= -\varepsilon_* h_*' \end{aligned} \quad (2.6)$$

Звездочками отмечены величины, относящиеся к фронту волны.

Заметим, что из третьего и второго уравнений (2.6) следует

$$f(\varepsilon_*) = \rho_0 \varepsilon_* h_*'^2 \quad (2.7)$$

Это соотношение определяет $\varepsilon_* = \varphi(\rho_0 h_*'^2)$ как однозначную функцию от $\rho_0 h_*'^2$, если функция $f(\varepsilon_*)/\varepsilon_*$ монотонна. Исключая функции

x_0, C, ρ , получим вообще нелинейное уравнение первого порядка относительно функции $h_*'^2$

$$\rho_0 [\varphi(\rho_0 h_*'^2) + 2\rho_0 h_*'^2 \varphi'(\rho_0 h_*'^2)] \frac{dh_*'^2}{dh_*} + \frac{2\rho_0 h_*'^2 \varphi(\rho_0 h_*'^2)}{h_* - h_0} + \frac{2\sigma_0(h_*)}{h_* - h_0} = 0 \quad (2.8)$$

Интегрируя его, получим

$$\left(\frac{dh_*}{dt}\right)^2 = F(h_*), \quad \text{или} \quad t = \int_{h_0}^{h_*} \frac{dh}{\sqrt{F(h)}}$$

Уравнение (2.8) достаточно просто интегрируется в случае, когда его можно свести к линейному уравнению. Посмотрим, когда это можно сделать. Введем обозначение $\rho_0 h_*'^2 = \zeta$. Уравнение (2.8) примет вид

$$[\varphi(\zeta) + 2\zeta\varphi'(\zeta)] \frac{d\zeta}{dh_*} + \frac{2\zeta\varphi(\zeta)}{h_* - h_0} + \frac{2\sigma_0(h_*)}{h_* - h_0} = 0$$

Предположим, что существует функция $\omega(\zeta)$ такая, что предыдущее уравнение записывается в виде

$$\frac{d\omega(\zeta)}{dh_*} + \frac{\lambda\omega(\zeta)}{h_* - h_0} + \frac{2\sigma_0(h_*)}{h_* - h_0} = 0$$

где λ — произвольная константа.

Тогда должно быть

$$\lambda\omega(\zeta) = 2\zeta\varphi(\zeta), \quad \omega'(\zeta) = \varphi(\zeta) + 2\zeta\varphi'(\zeta)$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение для функции $\varphi(\zeta)$

$$\zeta \frac{d\varphi}{d\zeta} + \frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)} \varphi = 0$$

Интеграл этого уравнения есть

$$\varphi(\zeta) = C\zeta^{n_1}, \quad n_1 = \frac{\lambda-2}{2(1-\lambda)}$$

Для закона одноосного сжатия отсюда получаем

$$\sigma = f(\varepsilon) = C\varepsilon^{-\frac{\lambda}{\lambda-2}}$$

Итак, уравнение (2.8) заменой искомой функции приводится к линейному уравнению первого порядка в том только случае, когда диаграмма одноосного сжатия выражается степенным законом. В дальнейшем будем предполагать, что закон одноосного сжатия описывается функцией

$$f(\varepsilon) = \sigma^\circ |\varepsilon|^n \quad (\sigma^\circ, n = \text{const}, \sigma^\circ < 0, n > 1) \quad (2.9)$$

Аппроксимация диаграммы сжатия степенным законом будет справедлива, вообще говоря, для не слишком малых значений ε и следует помнить, что применять выводы развиваемой теории можно только в условиях, когда явление управляется тем именно участком диаграммы, для которой сделана аппроксимация.

Для функции, заданной в виде (2.9), уравнение (2.8) принимает вид:

$$\frac{dZ}{dh_*} + \frac{2n}{n+1} \frac{Z}{h_* - h_0} + \frac{2n}{n+1} \frac{\sigma_0(h_*)}{\sigma^\circ (h_* - h_0)} = 0, \quad Z = \left(\frac{\rho_0 h_*'^2}{-\sigma^\circ}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (2.10)$$

Будучи линейным, оно легко интегрируется. Общий интеграл этого линейного уравнения

$$Z = C (h_0 - h_*)^{-\frac{2n}{n+1}} + \frac{2n}{n+1} (h_0 - h_*)^{-\frac{2n}{n+1}} \int_{h_*}^{h_0} \frac{\sigma_0(\xi)}{\sigma^0} (h_0 - \xi)^{\frac{n-1}{n+1}} d\xi$$

При $h_* \rightarrow h_0$ первое слагаемое правой части неограниченно возрастает, в то время как второе остается ограниченным. Скорость частиц (в том числе в начальный момент) конечна и потому константу интегрирования надо положить равной нулю. В результате получим

$$-h_*' = \left(\frac{-\sigma^0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \Phi(h_*) (h_0 - h_*)^{\frac{1-n}{1+n}} \quad (2.11)$$

где

$$\Phi(h) = \left\{ \int_h^{h_0} \frac{\sigma_0(\xi)}{\sigma^0} (h_0 - \xi)^{\frac{n-1}{n+1}} d\xi \right\}^{\frac{n-1}{2n}}$$

Закон движения фронта во времени получается в виде

$$t = \left(\frac{\rho_0}{-\sigma^0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \int_{h_*}^{h_0} (h_0 - \xi)^{\frac{n-1}{n+1}} \Phi^{-1}(\xi) d\xi \quad (2.12)$$

Для деформации на фронте волны, согласно (2.7), имеем

$$-\varepsilon_* = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} [\Phi(h_*)]^{n-1} (h_0 - h_*)^{-\frac{2}{n+1}} \quad (2.13)$$

Знание функции $\varepsilon(h)$ позволяет найти $\rho(h)$ по формуле $\rho_0/\rho(h) = 1 + \varepsilon(h)$ и эйлерову координату частицы в произвольный момент времени

$$x(h, t) = h + \int_{h_*}^h \varepsilon(\eta) d\eta \quad (2.14)$$

Скорость $v(h, t)$ частицы и напряжение $\sigma(h, t)$ определяются по формулам (2.5), (2.6). Для напряжения получаем:

$$\sigma(h, t) = \frac{1}{h_* - h_0} [\sigma_0(h_*) (h_* - h) - \rho_0 \varepsilon_* h_*'^2 (h - h_0)] \quad (2.15)$$

Формулы (2.11) — (2.15) дают полное описание волны, возбуждаемой напряжением, приложенным в сечении h_0 . Формула (2.12) позволяет выразить функцию $\sigma_0(h_*)$ как функцию времени. Из найденных результатов можно сделать следующие качественные выводы.

1. Если внешнее напряжение действовало даже конечное время, фронт волны все равно продолжает распространяться неограниченно далеко и бесконечно долго, со скоростью монотонно убывающей и асимптотически стремящейся к нулю (явление может рассматриваться лишь для достаточно больших напряжений на фронте).

2. Напряжение $\sigma(h, t)$ изменяется линейно по координате h между фронтом и начальным сечением.

3. Скорость частиц в этом промежутке постоянна.

§ 3. Отражение от абсолютно неподвижной преграды. Волновое движение, описанное в § 2, будем называть в дальнейшем «падающей волной» и отмечать относящиеся к нему величины индексом 1. Поставим задачу определить новое волновое движение, возникающее при столкновении падающей волны с преградой. Это новое движение будем называть «отраженной волной» и отмечать параметры отраженной волны индексом 2.

Задачи о нелинейном отражении приходится решать, заранее предполагая некоторые свойства решения. В данном случае будем предполагать, что при отражении напряжение увеличивается, и отраженная волна обладает ударным фронтом (фиг. 3). Область между преградой и ударным фронтом будем отмечать цифрой (2). Согласно сделанным предположениям, частица, к которой подходит фронт отраженной волны, испытывает скачкообразное повышение напряжения (управляемое диаграммой сжатия), за которым следует режим разгрузки. В области (2), следовательно, имеют место следующие уравнения

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial h} - \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial h} = \frac{\rho_0}{\rho_2(h)} = 1 + \varepsilon_2(h) \quad (3.1)$$

Условия на неподвижной преграде, которую предполагаем в начале координат, означают

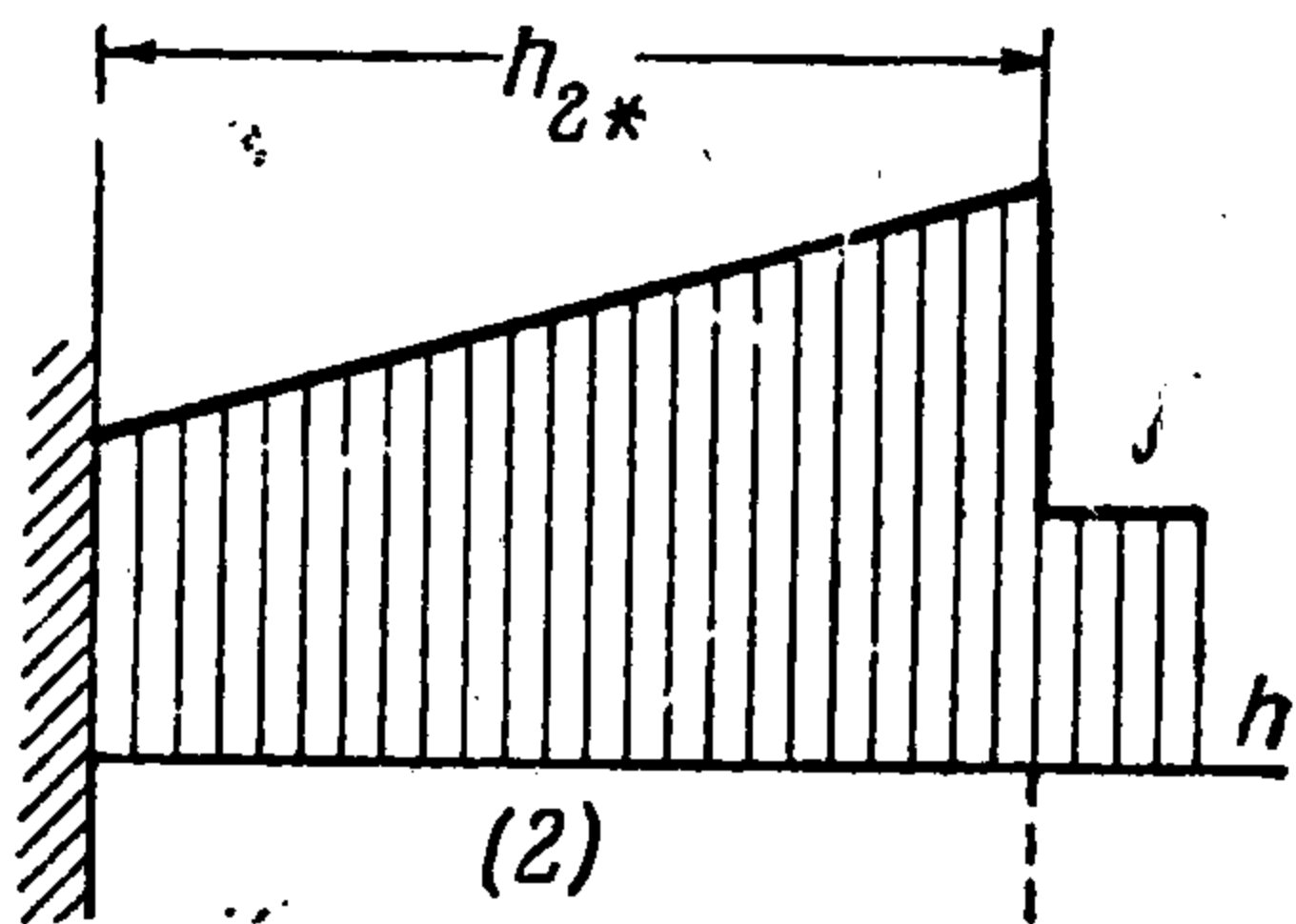
$$x_2(0, t) = 0, \quad v_2(0, t) = 0 \quad (3.2)$$

Из второго уравнения (3.1) получаем:

$$x_2(h, t) = \int_0^h \frac{\rho_0 d\eta}{\rho_2(\eta)} + x_{20}(t), \quad v_2(h, t) = x'_{20}(t) \quad (3.3)$$

и на основании (3.2) имеем

$$x_{20}(t) \equiv 0, \quad v_2(h, t) \equiv 0$$



Фиг. 3

Таким образом, частицы в области (2) неподвижны; это есть область остановки, в которой плотность распределена по частицам вообще неравномерно, а напряжение для всех частиц одно и то же, но со временем изменяется. Последний вывод следует из первого уравнения (3.1), из которого

$$\sigma_2(h, t) = \sigma_2(t) \quad (3.4)$$

Остается определить функции $\sigma_2(t)$, $\rho_2(h)$, $h_{2*}(t)$; для этого послужат два условия на ударном фронте и диаграмма сжатия. Общий вид механических условий на ударном фронте следующий

$$(D - v') \rho' = (D - v_2) \rho_2, \quad \sigma' - \sigma_2 = (D - v_2) \rho_2 (v_2 - v')$$

Здесь штрихами обозначены значения функций перед фронтом отраженной волны; ниже приводятся соображения об их определении. Через D обозначена скорость распространения ударного фронта. В рассматриваемом случае

$$D = \frac{dx_2(h_{2*})}{dt} = \frac{\rho_0}{\rho_2(h_{2*})} h_{2*}', \quad v_2 = 0$$

Поэтому условия на ударном фронте можно представить так:

$$v' = \frac{\rho_0}{\rho'} \left(\frac{\rho'}{\rho_{2*}} - 1 \right) h'_{2*}, \quad \sigma' - \sigma_2 = -\rho_0 \frac{\rho_0}{\rho'} \left(\frac{\rho'}{\rho_{2*}} - 1 \right) h'_{2*}{}^2 \quad (3.5)$$

Сюда надо присоединить закон сжатия

$$\sigma_2 = \sigma^0 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{2*}} \right)^n \quad (3.6)$$

Переходим к обсуждению явления, которое разыгрывается впереди фронта отраженной волны. В момент столкновения фронта падающей волны с преградой перед фронтом вновь образовавшейся отраженной волны простирается область, по которой прошла падающая волна. Отраженная волна распространяется по уже возмущенному состоянию. Спрашивается, будет ли она посылать впереди себя какое-либо возмущение или будет идти по такому состоянию, которое оставила падающая волна? Решение этого вопроса связано с законом деформирования частицы, претерпевшей стадию разгрузки. Согласно предположению (см. начало § 2), частица, претерпевшая разгрузку в отраженной волне, при повторном нагружении будет сохранять плотность пока не будет достигнуто то максимальное напряжение σ_b , которое она испытала во фронте падающей волны (точка B на фиг. 2). В этом режиме возмущения распространяются с бесконечно большой скоростью. Поэтому впереди фронта отраженной волны должна проходить еще одна волна, притом с бесконечной (практически очень большой) скоростью.

Область впереди фронта отраженной волны будем обозначать цифрой (3), а величины, к ней относящиеся, — индексом 3. По существу это движение также следует причислять к отраженной волне. Определим движение в области (3). При этом сделаем дополнительное предположение и приравняем напряжение σ' перед ударным фронтом отраженной волны максимальному¹ для данной частицы напряжению σ_b . В области (3) частица не испытывает изменения плотности, поэтому $\rho_3 = \rho_1$. Следовательно,

$$x_3(h, t) = \int_{h_0}^h \frac{\rho_0 d\eta}{\rho_1(\eta)} + x_{30}(t)$$

В то время как для падающей волны

$$x_1(h, t) = \int_{h_0}^h \frac{\rho_0 d\eta}{\rho_1(\eta)} + x_{10}(t)$$

Так как смещение непрерывно, то, в частности,

$$x_3(h_{2*}, t) = \hat{x}_1(h_{2*}, t)$$

Это — тождество относительно t и из него следует, что $x_{30}(t) = x_{10}(t)$, т. е. поле смещений в состоянии (3) совпадает с полем смещений в состоянии (1). Другими словами, состояние впереди фронта ударной

¹ Предположение $\sigma' = \sigma_b$ представляет собой самостоятельную гипотезу в том смысле, что всем ранее поставленным условиям можно было бы удовлетворить при другом выборе σ' . При этом ударная волна была бы заведомо неустойчивой.

волны не связано с появлением новых смещений. Так как среда несжимаема, это не значит, что не возникает новых напряжений. Уравнение движения для состояния (3)

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial h} - \rho_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} = 0$$

Пусть $\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_3'$, где σ_1 — напряжение в падающей волне, σ_3' — добавочное напряжение.

Так как $v_3 = v_1$, а v_1 и σ_1 удовлетворяют уравнению (2.2), то очевидно

$$\frac{\partial \sigma_3'}{\partial h} = 0, \quad \sigma_3' = \sigma_3'(t)$$

Отсюда следует вывод: впереди фронта отраженной волны возникает постоянное по координате и переменное по времени (вообще) напряжение. Его величина определяется тем условием, чтобы перед фронтом отраженной волны выработывалось напряжение σ_b .

Чтобы определить параметры отраженной волны, в равенствах (3.5) положим

$$\rho' = \rho_1(h), \quad v' = v_1(t), \quad \sigma' = \sigma_b(h)$$

В результате получим

$$v_1 = \left(\frac{\rho_0}{\rho_2} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)_{h=h_{2*}} h'_{2*}, \quad \sigma_b - \sigma_2 = -\rho_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_0}{\rho_2} \right)_{h=h_{2*}} h'^2_{2*} \quad (3.7)$$

Исключая из (3.6) и (3.7) функции $\rho_2(h)$ и $\sigma_2(t)$, получим

$$\sigma^0 \left[-\varepsilon_1(h_{2*}) - \frac{v_1}{h'_{2*}} \right]^n = \sigma_b + \rho_0 v_1 h'_{2*} \quad (3.8)$$

Из третьего и четвертого уравнений (2.6) следует

$$v_1 = -\varepsilon_1(h_{1*}) h'_{1*} = -\frac{\sigma_1(h_{1*})}{\rho_0 h'_{1*}}$$

Поэтому уравнение (3.10) можно привести к виду

$$\left[1 - \frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \frac{h'_{1*}}{h'_{2*}} \right]^n = 1 - \left[\frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \right]^n \frac{h'_{2*}}{h'_{1*}} \quad (3.9)$$

Интегрируя это нелинейное уравнение первого порядка при начальном условии $h_{2*}(0) = 0$, найдем функцию h_{2*} . Напряжение и плотность определяются после этого по формулам:

$$\rho_2(h) = \rho_1(h) \left[1 + \frac{\rho_1(h)}{\rho_0} \frac{v_1(t)}{h'_{2*}(t)} \right]^{-1}, \quad t = t(h) \equiv t(h_{2*}) \quad (3.10)$$

$$\sigma_2(t) = \sigma_b(h) + \rho_0 v_1(t) h'_{2*}(t), \quad h = h(t) \equiv h_{2*}(t) \quad (3.11)$$

Чтобы упростить интегрирование уравнения (3.9), можно заменить его приближенно другим уравнением. Из физических соображений можно ожидать, что

$$\frac{\varepsilon_1(h_1)}{\varepsilon_1(h_2)} < 1, \quad \left| \frac{h'_{1*}}{h'_{2*}} \right| < 1$$

и, опираясь на эти неравенства, разложить левую часть уравнения в ряд, сохранив только первые два члена разложения; тогда получим:

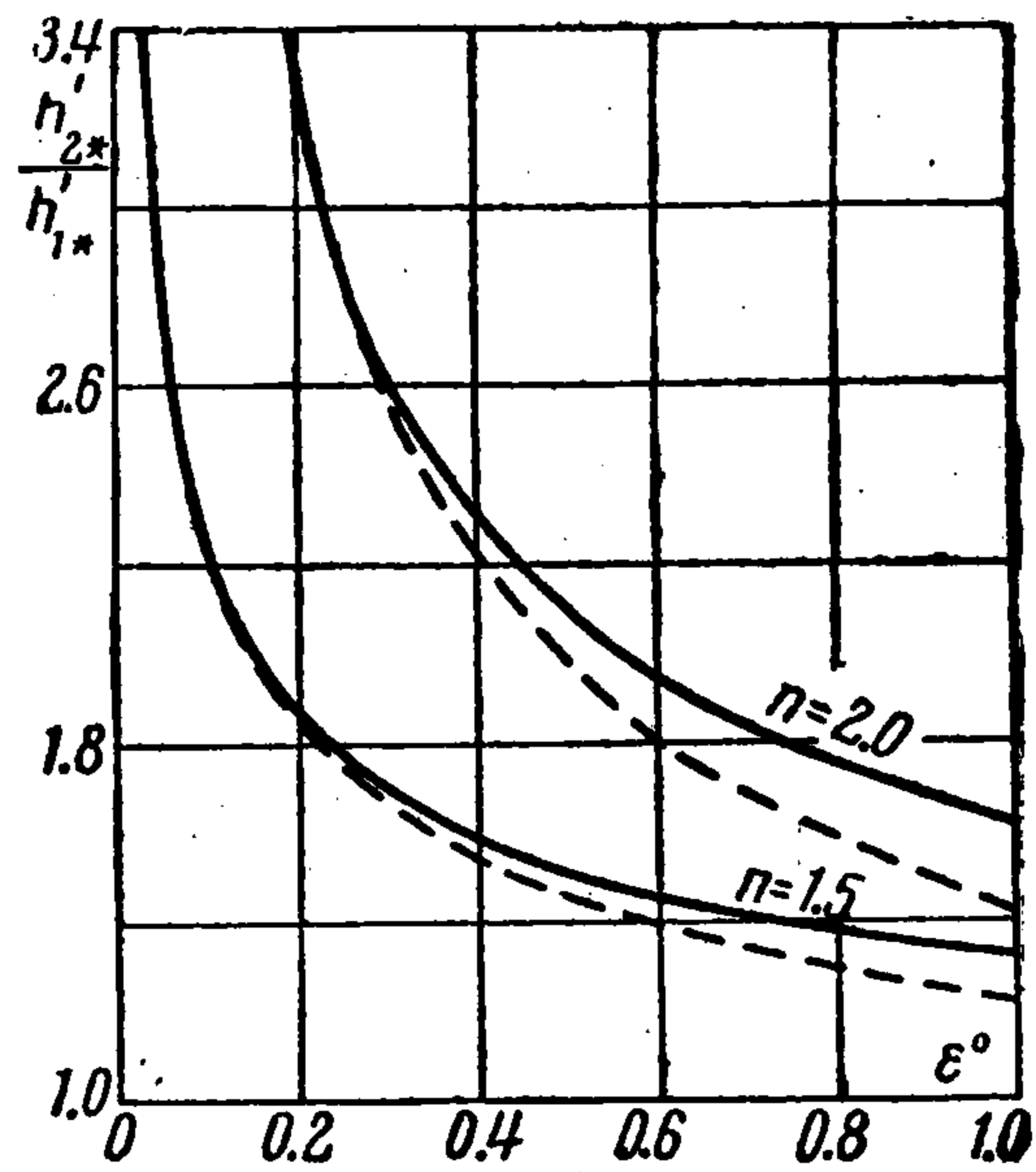
$$\frac{h'_{2*}}{h'_{1*}} = -\sqrt{n} \left[\frac{\varepsilon_1(h_{2*})}{\varepsilon_1(h_{1*})} \right]^{\frac{n-1}{2}} + \dots \quad (3.12)$$

или

$$|\varepsilon_1(h_{2*})|^{-\frac{n-1}{2}} dh_{2*} + \sqrt{n} |\varepsilon_1(h_{1*})|^{-\frac{n-1}{2}} dh_{1*} = 0$$

Интегрирование этого уравнения дает в неявном виде зависимость между h_{2*} и h_{1*}

$$\int_0^{h_{2*}} |\varepsilon_1(h)|^{-\frac{n-1}{2}} dh + \sqrt{n} \int_0^{h_{1*}} |\varepsilon_1(h)|^{-\frac{n-1}{2}} dh = 0 \quad (3.13)$$



Фиг. 4

Представление о величине погрешности, проистекающей от замены (3.9) на (3.12), дается на фиг. 4, где сплошной линией показана зависимость $h^{\circ} = h'_{2*}/h'_{1*}$ от $\varepsilon_1^{\circ} = \varepsilon_1(h_{1*})/\varepsilon_1(h_{2*})$, вычисленная по точной формуле (3.9), а пунктирной — та же зависимость, найденная по формуле (3.12).

Вычисления проведены для двух значений n . Величины, входящие в уравнение (3.9) (и в последующие уравнения), могут быть наглядно интерпретированы введением фиктивной падающей волны, распространяющейся за преграду.

Изобразим на фиг. 5 эпюры напряжений в отраженной волне для некоторого фиксированного момента времени и для этого же момента времени эпюру напряжений в падающей волне, в предположении, что преграды нет (фиг. 5, пунктир).

Фронт этой фиктивной падающей волны определяет величины h_{1*} и $\varepsilon_1(h_{1*})$, в то время как фронт отраженной волны отмечает частицу с координатой h_{2*} и соответствующее этой частице значение $\varepsilon_1(h_{2*})$.

Из полученных общих результатов можно сделать следующие выводы:

- а) скорость фронта отраженной волны в каждый момент больше скорости фронта фиктивной падающей волны;
- б) в соответствии со сделанными гипотезами

$$\rho_2 > \rho_1, \quad |\sigma_2| > |\sigma_1|$$

в) в момент отражения $h_{1*} = h_{2*} = 0$, поэтому для данного момента времени отношение $h'_{2*}/h'_{1*} = q$ находится из уравнения

$$(1 + q^{-1})^n = 1 + q \quad (3.14)$$

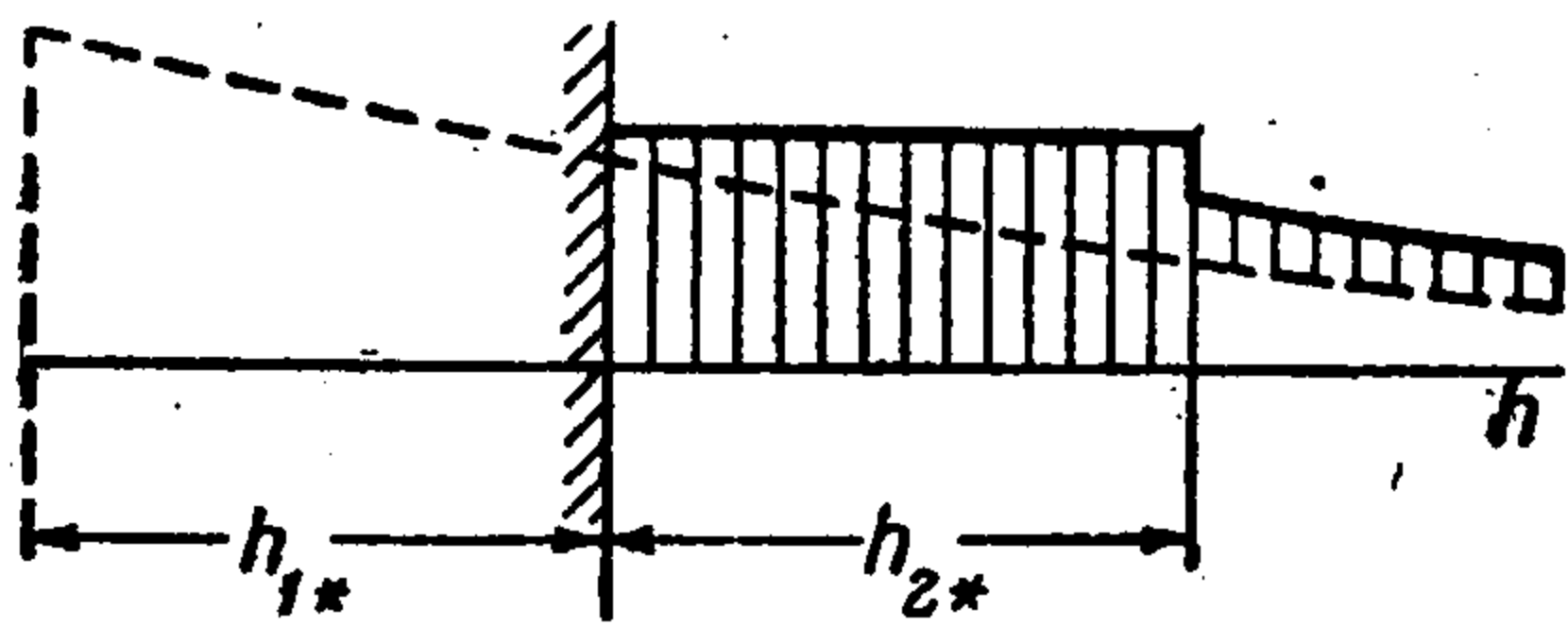
Приводим значения q , вычисленные для некоторых значений n

| | | | | |
|-----------|--------|--------|--------|--------|
| $q = 1.0$ | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
| $n = 1.0$ | 1.32 | 1.62 | 1.84 | 2.15 |

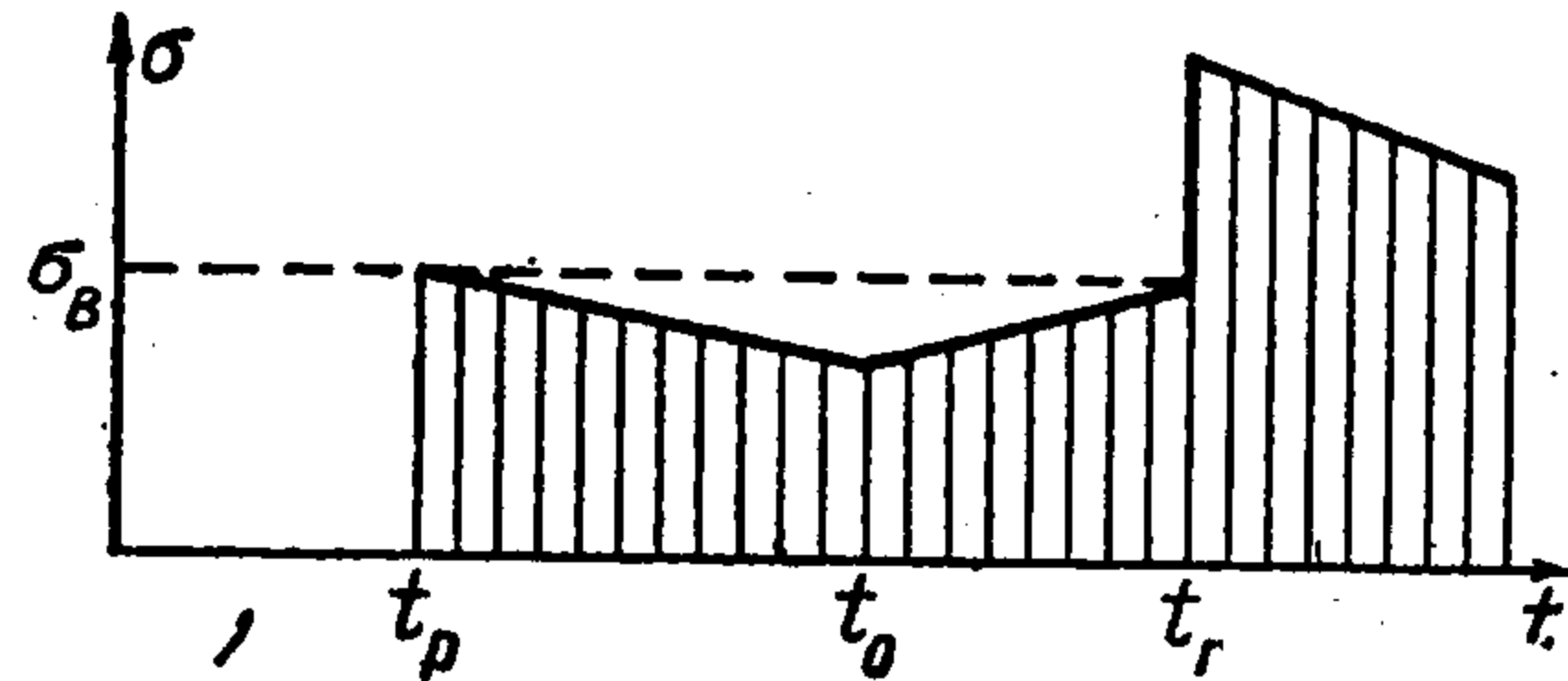
Так как в момент отражения $\sigma_{1*} = \sigma_b$, то из (3.11) найдем

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_b}\right)_{t=t_0} = 1 + q \quad (3.15)$$

Это отношение можно назвать коэффициентом отражения, в принятой постановке этот коэффициент зависит только от свойства среды (показателя n) и не зависит от интенсивности падающей волны. Так как $q > 1$, то коэффициент отражения больше двух;



Фиг. 5



Фиг. 6

г) можно связать наблюдателя с фиксированной частицей и проследить за изменением ее напряженного состояния во времени.

Предыдущий анализ приводит к результату, представленному на фиг. 6, где по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат — напряжение в избранной частице.

До момента $t = t_p$ частица находится в состоянии покоя, в момент $t = t_p$ к ней подходит фронт падающей волны.

Напряжение скачком возрастает до σ_b и затем наступает стадия разгрузки, которая длится до момента $t = t_0$ — момента столкновения падающей волны с преградой.

В этот же момент к частице подходит «предвестник» отраженной волны (скорость его распространения бесконечна). Интенсивность его возрастает от нуля (так как на преграде $\sigma_b = \sigma_{1*}$).

Напряжение в частице продолжает возрастать и к моменту $t = t_r$ подхода к ней фронта отраженной волны достигает снова значения σ_b .

При прохождении фронта напряжение еще раз скачком возрастает. Начиная с этого момента, частица делается неподвижной, а напряжение со временем убывает.

§ 4. Частные случаи нагрузки. а) Пусть внешнее напряжение $\sigma_0(h_{1*})$ мгновенно достигает значения σ_0 и в дальнейшем остается постоянным; другими словами, закон действия заданной нагрузки имеет ступенчатый характер. В этом случае функции, описывающие падающую и отраженную волны, также имеют ступенчатый характер. Постоянные значения этих функций легко находятся по предыдущим формулам. Для падающей волны в этом случае имеем:

$$h'_{1*} = - \left(\frac{-\sigma_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0}\right)^{\frac{n-1}{2n}}, \quad h_0 - h_{1*} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(\frac{\rho_0}{-\sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}} t$$

$$\varepsilon_{1*} = - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \left[1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{-1}, \quad \sigma_1(h, t) = \sigma_0$$

Для отраженной волны

$$h_{2*}' = -qh_{1*}', \quad h_{2*} = -qh_{1*}$$

$$\rho_2'(h) = \rho_0 \left[1 - \frac{q+1}{q} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^\circ} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{-1}, \quad \sigma_2(t) = (1+q)\sigma_0$$

где q есть положительный корень уравнения (3.14).

б) Пусть заданное напряжение мгновенно принимает постоянное значение σ_0 и через конечный промежуток времени (для конечного расстояния l фронта от начального сечения) мгновенно делается снова равным нулю, так что

$$\sigma_0(h_{1*}) = \begin{cases} 0 & (h_{1*} > h_0) \\ \sigma_0 & (h_0 - l < h_{1*} < h_0) \\ 0 & (h_{1*} < h_0 - l) \end{cases}$$

Падающая волна при этом описывается следующими функциями:

$$-h_{1*}' = \left(\frac{-\sigma^\circ}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^\circ} \right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(\frac{l}{h_0 - h_{1*}} \right)^{\frac{n-1}{n+1}}, \quad \varepsilon_1(h_{1*}) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^\circ} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{l}{h_0 - h_{1*}} \right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$t = \left(\frac{\rho_0}{-\sigma^\circ} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma^\circ}{\sigma_0} \right)^{\frac{n-1}{2n}} l \left\{ 1 + \frac{n+1}{2n} \left[\left(\frac{h_0 - h_{1*}}{l} \right)^{\frac{2n}{n+1}} - 1 \right] \right\}$$

$$\frac{\rho_1(h_{1*})}{\rho_0} = \left[1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^\circ} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{l}{h_0 - h_{1*}} \right)^{\frac{2}{n+1}} \right]^{-1}, \quad \sigma_1(h, t) = \sigma_0 \frac{h - h_0}{h_{1*} - h_0} \left(\frac{l}{h_0 - h_{1*}} \right)^{\frac{2n}{n+1}}$$

Последние пять формул имеют место для $h_{1*} < h_0 - l$. При $h_0 - l < h_{1*} < h_0$ заданное напряжение остается постоянным и образовавшаяся волна не отличается от волны примера (а) (обладает постоянными параметрами). Приведенные формулы показывают, что скорость фронта, деформация, плотность, напряжение во фронте монотонно убывают по мере распространения.

Переходим к описанию отраженной волны.

На основании (3.12) получим:

$$h_{2*}' = -\sqrt{n} \left(\frac{h_0 - h_{1*}}{h_0 - h_{2*}} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} h_{1*}' = H \left(\frac{l}{h_0 - h_{2*}} \right)^\theta$$

$$H = \sqrt{n} \left(\frac{-\sigma^\circ}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^\circ} \right)^{\frac{n-1}{2n}}, \quad \theta = \frac{n-1}{n+1} \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что скорость фронта отраженной волны возрастает по мере удаления этого фронта от преграды. Это объясняется тем, что при своем распространении отраженная волна идет по среде все более и более уплотненной.

При этом скорость фронта отраженной волны изменяется от значения $H(l/h_0)^\theta$ на преграде до значения H при $h_{2*} = h_0 - l$.

Плотность $\rho_2(h)$ также возрастает вместе с h . Действительно

$$\frac{\rho_2(h)}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0 + \rho_1 v_1 / h_{2*}'}$$

Наконец, для скачка напряжения на фронте отраженной волны имеем:

$$\sigma_2 - \sigma_b = \frac{\sigma_0 \sqrt{n}}{h_0 - h_{1*}} l^{\frac{2n}{n+1}} (h_0 - h_{2*})^{-\frac{n-1}{n+1}} \quad (4.2)$$

§ 5. Отражение плоской волны от массивной преграды. В соответствии с условиями плоской волны будем считать, что преграда ограничена двумя параллельными плоскостями. Не уменьшая общности, можно считать, что преграда — бесконечно тонкая пластина, наделенная конечной поверхностной плотностью. Это и будем предполагать в дальнейшем.

Пусть волна падает на пластину нормально. В результате столкновения с падающей волной пластина приходит в движение и по другую сторону от себя порождает новое волновое движение — проходящую волну.

Поставим перед собой ограниченную задачу и рассмотрим явление для такого достаточно малого промежутка времени, когда можно считать, что:

1) напряжение в отраженной волне больше, чем в падающей (существует ударный фронт в отраженной волне);

2) пластина движется в одном направлении (в направлении распространения волны);

3) в результате своего движения пластина генерирует волну сжатия, создавая монотонно возрастающее напряжение на граничной плоскости.

Эти предположения суть гипотезы, справедливость которых проверяется фактическим построением решения.

В зависимости от параметров падающей волны и массы преграды за преградой может возникать проходящая волна различной интенсивности.

Сначала рассмотрим случай, когда проходящая волна слабая и описывается линейной теорией. Это будет иметь место при достаточной массивности преграды.

Для области проходящей волны, которую отметим цифрой (4), запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= k\varepsilon_4, & k &= \lambda + 2\mu & (\lambda, \mu & \text{— коэффициенты Лямэ}) \\ \frac{\partial \sigma_4}{\partial h} - \rho_0 \frac{\partial v_4}{\partial t} &= 0, & v_4 &= \frac{\partial u_4}{\partial t}, & \varepsilon &= \frac{\partial u_4}{\partial h} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Следовательно, смещение u_4 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial h^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{k}{\rho_0}$$

Для проходящей волны, распространяющейся в сторону отрицательной оси, имеем:

$$u_4(h, t) = f(h + at)$$

Требуется определить отраженную и проходящую волны и движение преграды.

Для определения искомых функций имеем условия:
на отраженной ударной волне

$$(D - v_2) \rho_2 = (D - v_1) \rho_1, \quad \sigma_b - \sigma_2 = (D - v_2) \rho_2 (v_2 - v_1)$$

на преграде ($h = 0$)

$$x_4(0, t) = x_{20}(0, t) = U(t), \quad v_2(h, t) = x_{20}'(t) = U'(t)$$

Движение преграды подчинено уравнению

$$\sigma_2(0, t) = \sigma_4(0, t) = MU''(t)$$

Здесь M , U — масса и смещение преграды. Для отраженной волны имеем, как и прежде,

$$x_2(h, t) = \int_0^h \frac{\rho_0 d\eta}{\rho_2(\eta)} + x_{20}(t), \quad \sigma_2(h, t) = \rho_0 x_{20}''(t) h + \sigma_2(0, t)$$

Скорость D перемещения ударной отраженной волны определяется соотношением

$$D = \frac{dx_{2*}}{dt} = \frac{\rho_0}{\rho_2(h_{2*})} h_{2*}' + v_2$$

Выписанные девять уравнений служат для определения функций $U(t)$, $\sigma_2(0, t)$, $\rho_2(h)$, $h_{2*}(t)$, $x_4(h + at)$, $v_2(t)$, $x_{20}(t)$, $D(t)$, $\sigma_2(h, t)$

Условия на ударной волне могут быть записаны в виде

$$v_1 - v_2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho_2} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) h_{2*}', \quad \sigma_b - \sigma_2 = -\rho_0 h_{2*}' (v_2 - v_1) \quad (5.2)$$

Так как $\rho_0/\rho_2 - \rho_0/\rho_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ и на ударном фронте $\sigma_2 = \sigma^\circ |\varepsilon_2|^n$, то из (5.2) получим

$$\sigma^\circ \left[-\varepsilon_1(h_{2*}) - \frac{v_1 - v_2}{h_{2*}'} \right]^n + \sigma_b = \rho_0 h_{2*}' (v_2 - v_1)$$

Для скорости частицы в падающей волне имеем

$$v_1 = -\varepsilon_1(h_{1*}) h_{1*}' = -\frac{\sigma_1(h_{1*})}{\rho_0 h_{1*}'}$$

Поэтому

$$\sigma^\circ [-\varepsilon_1(h_{2*})]^n \left[1 - \frac{\varepsilon_1(h_{1*}) h_{1*}' + v_2}{\varepsilon_1(h_{2*}) h_{2*}'} \right]^n + \sigma_b = \rho_0 h_{2*}' \left(v_2 + \frac{\sigma_{1*}}{\rho_0 h_{1*}'} \right)$$

или, имея в виду, что

$$\begin{aligned} \sigma^\circ [-\varepsilon_1(h_{2*})]^n &= \sigma_b \\ \left[1 - \frac{\varepsilon_1(h_{1*}) h_{1*}'}{\varepsilon_1(h_{2*}) h_{2*}'} - \frac{v_2}{\varepsilon_1(h_{2*}) h_{2*}'} \right]^n &= 1 - \frac{\sigma_{1*} h_{2*}'}{\sigma_b h_{1*}'} - \frac{\rho_0 h_{2*}' v_2}{\sigma_b} \end{aligned}$$

Выражая отношение напряжений σ_{1*}/σ_b через отношение соответствующих деформаций и выполняя еще некоторые простые преобразования, получим окончательно

$$\left[1 - \beta \frac{\varepsilon_1(h_{1*}) h_{1*}'}{\varepsilon_1(h_{2*}) h_{2*}'} \right]^n = 1 - \left[\frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \right]^n \beta \frac{h_{2*}'}{h_{1*}'} \quad \left(\beta = 1 + \frac{v_2}{\varepsilon_1(h_{1*}) h_{1*}'} = 1 - \frac{v_2}{v_1} \right) \quad (5.3)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции h_{2*} ; оно сходно с уравнением (3.9) и отличается от него наличием множителя β , который зависит от неизвестной скорости частиц в отраженной волне. Таким образом, уравнение (5.3) содержит две неизвестные функции, и для решения задачи к (5.3) надо присоединить еще одно уравнение. Им будет не использованное пока уравнение движения преграды.

Чтобы определить функцию $\sigma_2(0, t)$ используем (5.3), имея в виду, что $U' = v_2$, тогда

$$\sigma_2(0, t) = \sigma_b - \rho_0 h_{2*}' (v_2 - v_1) - \rho_0 h_{2*} v_2'$$

Напряжение $\sigma_4(h, t)$ на основании (5.1)

$$\sigma_4(h, t) = k f'(h + at)$$

Это напряжение на преграде выразится так:

$$\sigma_4(0, t) = k f'(at) = \frac{k}{a} v_2$$

В результате уравнение движения преграды в развернутом виде превращается в следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно v_2 :

$$\frac{dv_2}{dt} + P(t)v_2 = Q(t) \quad \left(P(t) = \frac{k/a + \rho_0 h_{2*}'}{M + \rho_0 h_{2*}}, Q(t) = \frac{\sigma_b + \rho_0 h_{2*}' v_1}{M + \rho_0 h_{2*}} \right)$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль в момент столкновения падающей волны с преградой (при $t = t_0$), есть:

$$v_2(t) = \frac{1}{M + \rho_0 h_{2*}} \int_{t_0}^t (\sigma_b + \rho_0 h_{2*}' v_1) \exp\left(-\frac{k}{aM} \int_{\tau}^t \frac{d\tau'}{1 + \rho_0 h_{2*}' / M}\right) d\tau$$

Эту формулу легко представить в следующем виде:

$$v_2(t) = \frac{\sigma_b}{M + \rho_0 h_{2*}} \int_{t_0}^t \left[1 - \left[\frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \right]^n \frac{h_{2*}'}{h_{1*}'} \right] \exp\left(-\frac{k}{aM} \int_{\tau}^t \frac{d\tau'}{1 + \rho_0 h_{2*}' / M}\right) d\tau \quad (5.4)$$

Уравнения (5.3) и (5.4) в совокупности определяют обе искомые функции h_{2*} и v_2 . Исключение v_2 приводит к одному интегро-дифференциальному уравнению относительно h_{2*} / h_{1*} . После того как известны h_{2*} и v_2 через них легко выражаются остальные искомые функции.

Так для давления отраженной волны на преграду получим:

$$\begin{aligned} \sigma_2(0, t) = & \frac{\rho_0 \sigma_b k h_{2*}' / aM - h_{2*}'}{M (1 + \rho_0 h_{2*}' / M)^2} \int_{t_0}^t \left(1 - \left| \frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \right|^n \frac{h_{2*}'}{h_{1*}'} \right) \exp\left(-\frac{k}{aM} \int_{\tau}^t \frac{d\tau'}{1 + \rho_0 h_{2*}' / M}\right) d\tau + \\ & + \sigma_b \left(1 - \left| \frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \right|^n \frac{h_{2*}'}{h_{1*}'} \right) \left(1 + \frac{\rho_0 h_{2*}'}{M} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Значения искомых функций для момента отражения (при $t = t_0$) могут быть найдены просто. Для $t = t_0$ имеем $h_{1*} = h_{2*} = 0$, $v_2 = 0$,

$\beta = 1$. Поэтому из (5.3) получим $h_{2*}' / h_{1*}' = q$, где q — корень уравнения (3.14), при этом $q > 1$.

Для коэффициента отражения получим из (5.5), полагая $t = t_0$

$$\sigma_2(0, t) / \sigma_b = 1 + q$$

Это — то же значение, что и для неподвижной преграды. Объяснение заключается в том, что в момент $t = t_0$ преграда неподвижна. Напряжение $\sigma_4(0, t)$ на обратной стороне преграды изменяется подобно изменению скорости преграды, что следует из формулы

$$\sigma_4(0, t) = kv_2 / a$$

Формулы (5.3) — (5.5) показывают, что гипотезы, сделанные относительно характера явления, оправдываются для некоторого конечного промежутка времени после момента отражения. Решение уравнений (5.3), (5.4) в их точном виде требует привлечения численных методов.

Здесь, как и в § 4, можно применить приближенный способ замены уравнения (5.3) более простым приближенным. Из физических соображений ясно, что $0 \leq \beta \leq 1$ и

$$0 < \frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \leq 1, \quad \frac{h_{1*}'}{h_{2*}'} < 1$$

Предполагая поэтому, что

$$\left| \beta \frac{\varepsilon_1(h_{1*}) h_{2*}'}{\varepsilon_1(h_{2*}) h_{1*}'} \right| < 1$$

разложим левую часть уравнения (5.3) в степенной ряд и сохраним два члена ряда. В результате получим

$$\frac{h_{2*}'}{h_{1*}'} = -\sqrt{n} \left| \frac{\varepsilon_1(h_{1*})}{\varepsilon_1(h_{2*})} \right|^{\frac{n-1}{2}} + \dots$$

В принятом приближении, как оказывается, значение определяется таким же законом, как и для неподвижной преграды.

В заключение рассмотрим более подробно тот частный случай, когда падающая волна имеет вид «ступени» (§ 4, пример (а)). При этом основные формулы значительно упрощаются, а ценой дополнительного приближенного предположения задача может быть доведена до конца в явном и простом виде. Мы получаем возможность на конкретном и типичном примере проследить за влиянием массивной преграды на показания связанных с ней датчиков напряжения или скорости. Тем самым полученные результаты могут быть использованы в теории приборов, измеряющих напряжения и скорости частиц при распространении волн в грунтах. Разумеется, постановка задачи для плоских волн не учитывает явление «обтекания» волной препятствия, что имеет место в действительности.

Пусть на преграду падает волна в виде ступени; для нее

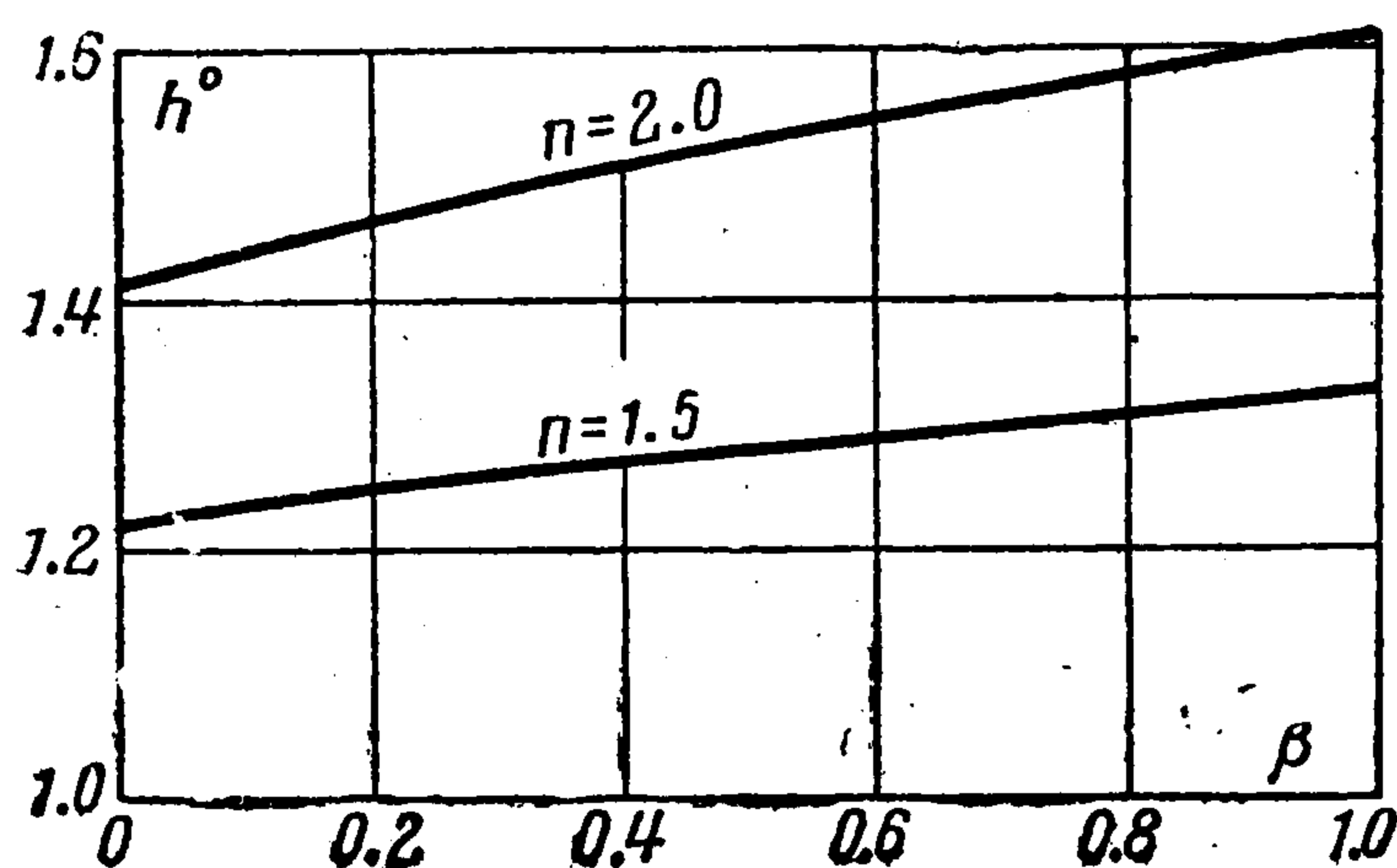
$$\sigma_1(h, t) = \sigma_0, \quad \sigma_b = \sigma_0$$

$$h_{1*}' = -\sqrt{\frac{-\sigma_0}{\rho_0}} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0} \right)^{\frac{n-1}{2n}}, \quad \varepsilon_{1*}(h) = -\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Так как $\varepsilon_1(h_{1*}) / \varepsilon_1(h_{2*}) = 1$, то уравнение (5.3) упрощается и принимает вид

$$\left(1 - \beta \frac{h_{1*}'}{h_{2*}'}\right)^n = 1 - \beta \frac{h_{2*}'}{h_{1*}'} \quad \left(\beta = 1 - \frac{v_2}{v_1}, \quad v_1 = \text{const}\right)$$

Зависимость h_{2*}' / h_{1*}' от β может быть представлена в параметрическом виде, который удобен для графического решения уравнения



Фиг. 7

$$\frac{h_{2*}'}{h_{1*}'} = \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{(z^n - 1)(z - 1)}$$

На фиг. 7 эта зависимость представлена графически для $n = 1.5$ и $n = 2.0$. Видим, что при $0 \leq \beta \leq 1$ отношение h_{2*}' / h_{1*}' изменяется очень немного (примерно в пределах 10%). Поэтому это отношение можно

принять приближенно постоянным и равным q (значению, которому оно имеет при $t = t_0$). Это предположение позволяет в конечном и простом виде получить выражение для напряжения $\sigma_2(0, t)$ и скорости v_2 . Введем безразмерные величины

$$\tau = \frac{(t - t_0)k}{aM}, \quad V_2 = \frac{v_2}{a}, \quad V_1 = \frac{v_1}{a}, \quad C = \frac{h_{1*}' \rho_0 a}{k} = \frac{h_{1*}'}{a}$$

Формула (5.4) приводит к такому результату:

$$V_2 = + \frac{\sigma_0}{k} \frac{1+q}{1+qC} \left[1 - (1 + qC\tau)^{-\left(1 + \frac{1}{qC}\right)} \right] \quad (5.6)$$

В то время как в падающей волне для скорости V_1 получим

$$V_1 = \frac{\sigma_0}{k} \frac{1}{C}$$

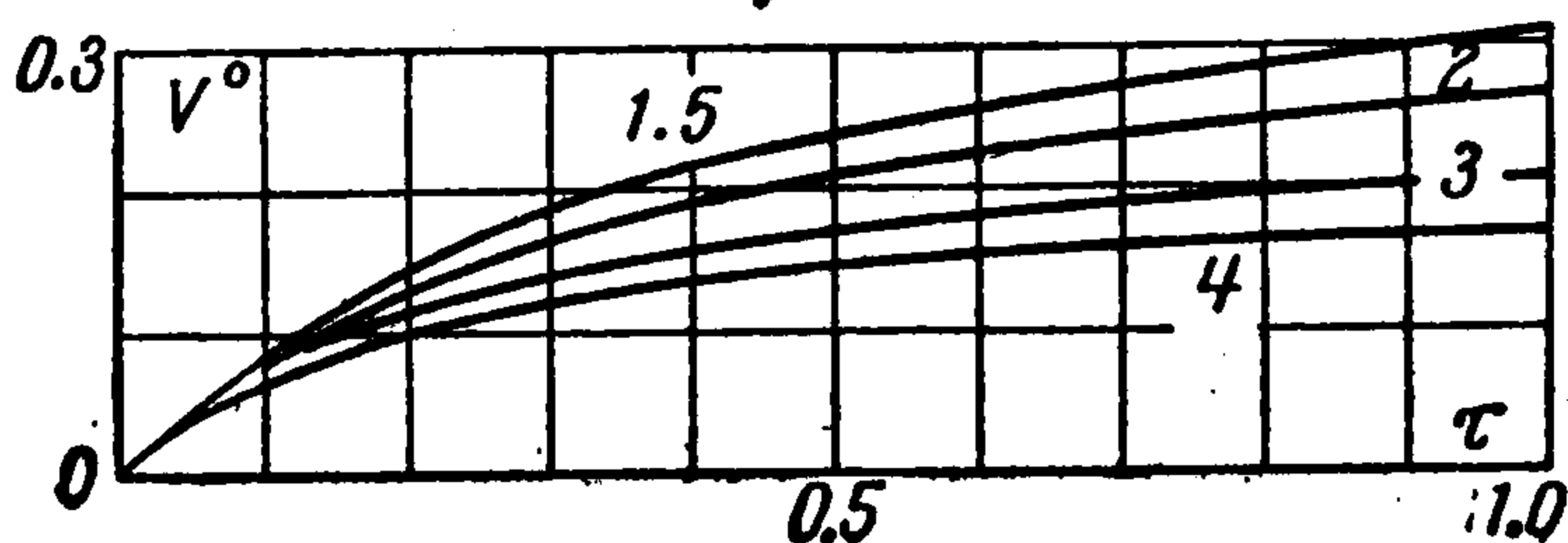
Преграда приходит в движение с монотонно нарастающей от нуля скоростью, которая стремится со временем к предельному значению

$$\frac{\sigma_0}{k} \frac{1+q}{1+qC}$$

При $C > 1$ это предельное значение больше v_1 при $C < 1$ — меньше. Формула (5.6) для значений $qC = 1.5, 2, 3, 4$ интерпретирована графически на фиг. 8, где $V^\circ = kV_2 / \sigma_0 (1+q)$.

Для давления падающей волны на преграду согласно (5.5) получим:

$$\frac{\sigma_2(0, t)}{\sigma_0} = \frac{1+q}{1+qC\tau} \left\{ 1 - \frac{qC(1-\tau)}{1+qC} \left[1 - (1 + qC\tau)^{-\left(1 + \frac{1}{qC}\right)} \right] \right\} \quad (5.7)$$

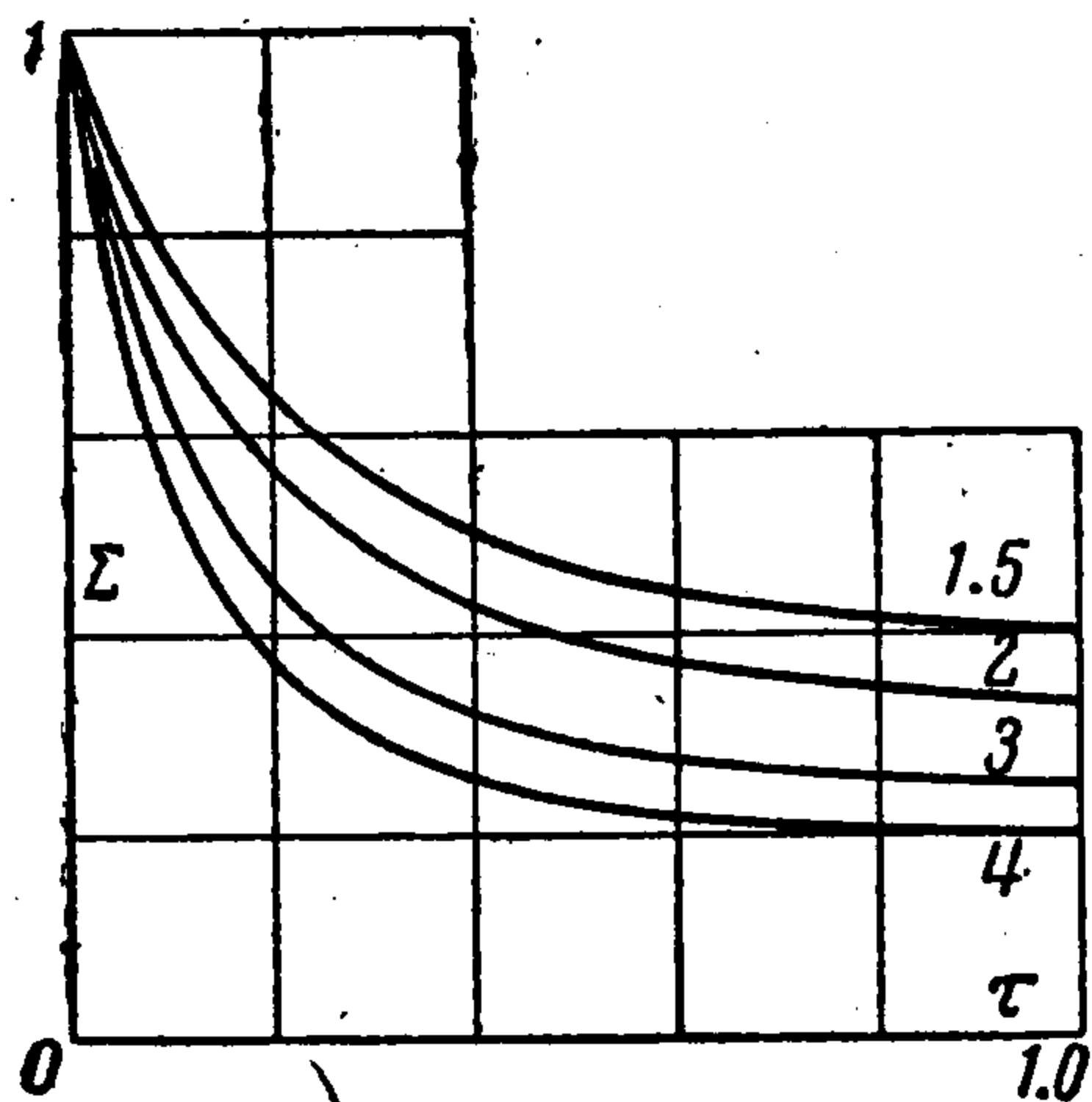


Фиг. 8

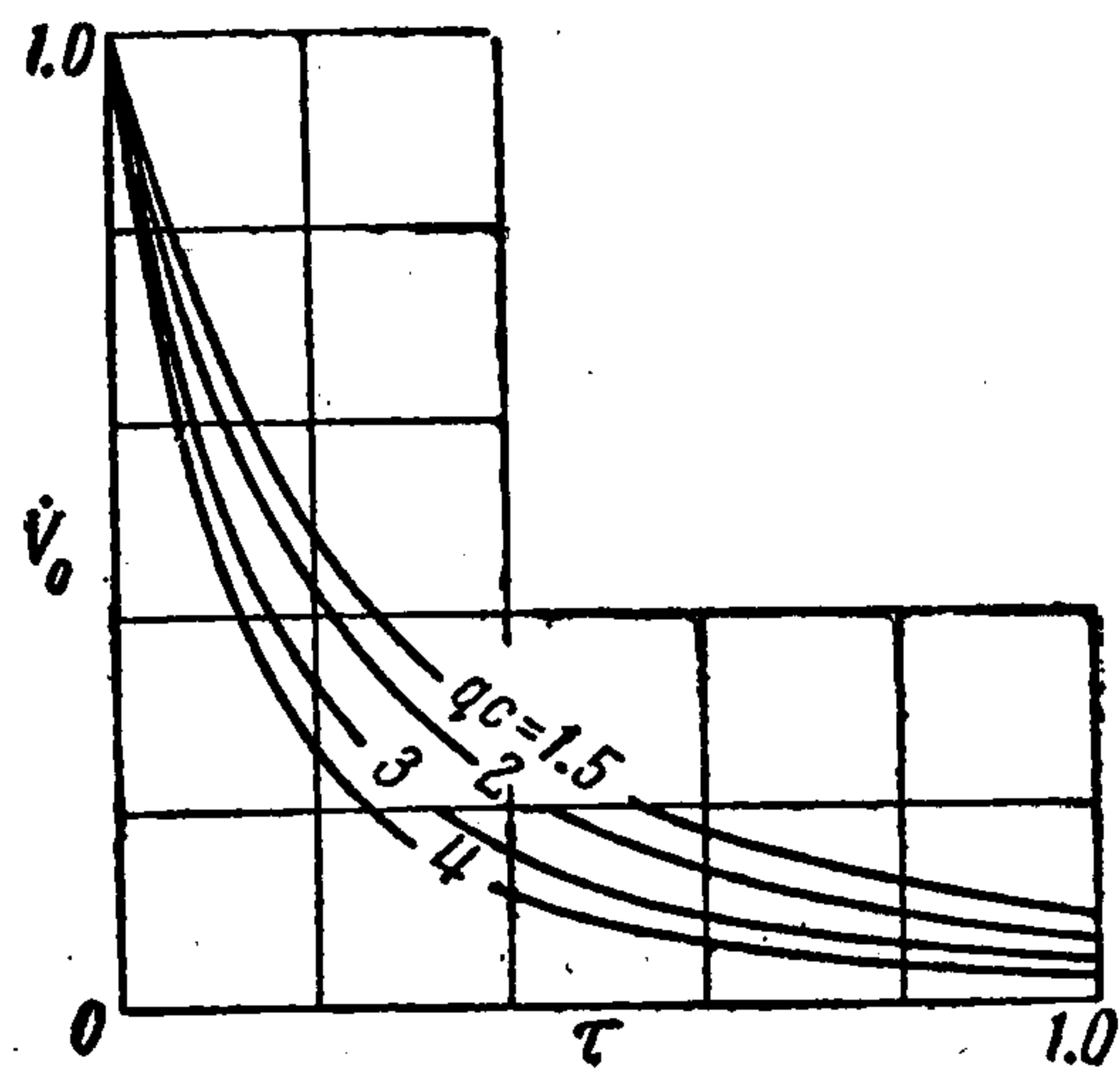
Отсюда видно, что в момент столкновения падающей волны с преградой напряжение мгновенно достигает значения $\sigma_0(1+q)$, как и в случае неподвижной стенки, затем оно убывает. При этом

$$\sigma_2(0, t) \rightarrow \sigma_0 \frac{1+q}{1+qC} \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty$$

Это предельное значение меньше σ_0 , если $C > 1$, если же $C < 1$, то предельное значение больше σ_0 . Результаты вычислений по формуле



Фиг. 9



Фиг. 10

(5.7) для значений $qC = 1.5, 2, 3, 4$ показаны на фиг. 9, где

$$\Sigma = \sigma_2(0, t) / \sigma_0(1+q)$$

Пользуясь формулой (5.7) и соотношением

$$\sigma_2(h, t) = \sigma_2(0, t) + \rho_0 \frac{dv_2}{dt} h$$

можно определить напряжение на фронте отраженной волны:

$$\frac{\sigma(h_{2*}, t)}{\sigma_0} = \frac{1+q}{1+qC} \left[1 + (1+qC\tau)^{-\left(1+\frac{1}{qC}\right)} \right] \quad (5.8)$$

Дифференцированием равенства (5.6) получим ускорение, которое испытывает преграда при своем движении. Для безразмерной производной получим

$$\frac{dV_2}{d\tau} = - \frac{\sigma_0(1+q)}{k} [1+qC\tau]^{-\left(2+\frac{1}{qC}\right)}$$

Результаты вычисления по этой формуле даны на фиг. 10, где

$$V^\circ = Mv_2 / \sigma_0(1+q)$$

Эта производная связана с истинным ускорением зависимостью

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{k}{M} \frac{dV_2^\circ}{d\tau}$$

Максимальное ускорение возникает в момент столкновения падающей волны с преградой; в этот момент оно равно (по абсолютной величине)

$$W = \frac{\sigma_0(1+q)}{M}$$

Это ускорение целесообразно выразить в долях ускорения g силы тяжести:

$$\frac{W}{g} = \frac{\sigma_0}{Q} (1 + q)$$

где Q — вес преграды, отнесенный к единице ее площади.

Нельзя забывать о том, что формулы (5.6), (5.7), (5.8) выведены в предположении, что среда линейно деформируема (при нагружении), что напряжение на фронте отраженной волны больше напряжения падающей волны, и что в проходящей волне разгрузка еще не наступила. В частности, условие $\sigma_2(h_{2*}, t) > \sigma_0$ может быть записано при помощи формулы (5.8), которая требует, чтобы

$$\tau < \tau_0 = \frac{1}{qC} \left[\left(\frac{C(1+q)}{C-1} \right)^{\frac{qC}{1+qC}} - 1 \right]$$

Значение τ_0 соответствует моменту времени, в который исчезает ударная отраженная волна. Отметим, что в этот же момент времени скорость преграды v_2 делается равной скорости v_1 частиц в падающей волне.

Режим движения, когда $C < 1$ не может рассматриваться в данной работе, так как предполагалось, что падающая волна идет по невозмущенной среде. Если $C < 1$, то впереди пластической волны должна распространяться упругая волна. Этот случай требует особого исследования. Другие условия применимости теории должны проверяться в каждой конкретной задаче.

Поступила 24 X 1962

Ин-т физики земли АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S., Osiecki G. Unloading wave in a body with the rigid characteristic of unloading. Proc. of vibration problems. Warszawa, 1959, № 1.
2. Perzyna P. The problem of propagation of elasto-plastic waves in a non-homogeneous medium. Bulletin de l'Academie polionaise des sciences. Serie des sciences techniques, 1960, V, VIII, № 2.
3. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Приближенный метод расчета ударных волн и их взаимодействий. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
4. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Распространение и взаимодействие волн сжатия и разрежения в упруго-пластических средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
5. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
6. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6.