

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. Д. Патарая

(Тбилиси)

Римановские решения в магнитной гидродинамике впервые были рассмотрены в работах [1-3]. Найти подобное решение для двухкомпонентной квазинейтральной плазмы пока не удалось.

Имеется ряд исследований [4,5] нелинейных колебаний в плазме поперек внешнего магнитного поля, в которых предполагается зависимость всех величин от переменной $\xi = z - vt$, где v — постоянная скорость распространения волны. Такие исследования были проведены в работах [6-8] для волн распространяющегося в плазме вдоль магнитного поля H_0 . В работах [6,7] было показано, что в холодной плазме существует уединенная волна сжатия, движущаяся со скоростью

$$\left[\frac{n_* (m_i + m_e) H_0^2}{8\pi (n_0 + n_*) n_0 m_i m_e} \right]^{1/2}$$

Здесь m_e , m_i — масса соответственно электрона и иона, n_* — плотность плазмы в точке $\xi = 0$, а n_0 — на бесконечности ($\xi = \pm \infty$). Кроме того, в работе [7] получены следующие условия квазинейтральности холодной плазмы: $v^2 \ll (m_e / m_i) c^2$.

Ниже рассматриваются некоторые вопросы, связанные с распространением уединенной волны вдоль магнитного поля в двухкомпонентной квазинейтральной плазме, в котором отсутствуют парные соударения; исследуется существование магнитозвуковых уединенных волн. В случае холодной плазмы получено, что в уединенной волне сжатия положительный заряд задерживается около максимума плотности плазмы, и в этой области плазма положительно заряжена, а дальше от максимума отрицательно. Для слабых волн получено значение полуширины и скорости волн, а также условие квазинейтральности горячей плазмы. Кроме того, показано, что при движении магнитозвуковой волны ее профиль деформируется.

1. Основные уравнения. Предположим, что волна движется по оси z , вдоль которой направлено магнитное поле H_0 . Уравнения движения соответственно для ионов и электронов, движущихся со скоростью v_i , v_e и плотностью n_i , n_e , имеет вид

$$m_i n_i (v - u_i) \frac{dv_i}{dz} = \text{grad } p_i - e n_i \left[E + \frac{v_i \times H}{c} \right] \quad (1.1)$$

$$m_e n_e (v - u_e) \frac{dv_e}{dz} = \text{grad } p_e + e n_e \left[E + \frac{v_e \times H}{c} \right] \quad (1.2)$$

Здесь u_i и u_e — скорости иона и электрона вдоль оси z ; p_i и p_e — порционные давления соответственно ионного и электронного газа; E и H — напряженности электрического и магнитного полей соответственно; e — величина заряда электрона (иона); c — скорость света.

Уравнение непрерывности берем в следующем виде:

$$\frac{d}{dz} [n_i (v - u_i)] = 0, \quad \frac{d}{dz} [n_e (v - u_e)] = 0 \quad (1.3)$$

а уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = \frac{v}{c} \frac{d\mathbf{H}}{dz}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e) \quad (1.5)$$

$$(\mathbf{j} = e (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \text{ — ток в плазме})$$

В работе плазма предполагается квазинейтральной, т. е. $n_e = n_i = n$. Разностью $(n_i - n_e)$ пренебрегаем везде, кроме уравнения (1.5). Эта малая разность обуславливает появление электростатического поля E_z , являющегося причиной движения тяжелых положительных ионов. Кроме того, уравнение (1.5) позволяет оценить пределы справедливости допущения о квазинейтральности плазмы.

Введем обозначения (1.6)

$$\psi = \frac{H_x + iH_y}{[8\pi n_0 (m_i + m_e) v^2]^{1/2}} \exp \left[\frac{ia v_{\parallel} h}{2v} \right], \quad a^2 = \frac{(m_i - m_e)^2}{m_i m_e}, \quad n' = \frac{n_0}{n}, \quad \eta = \frac{\xi}{l}$$

$$v_{\parallel}^2 = \frac{H_0^2}{4\pi n_0 (m_i + m_e)}, \quad \frac{d\eta}{dh} = n', \quad l = \left[\frac{m_i m_e c^2}{(m_i + m_e) 4\pi n_0 e^2} \right]^{1/2}$$

Здесь H_x и H_y — составляющие магнитного поля \mathbf{H} по осям x и y . В переменных ξ задача является установившейся. Решение ищем для уединенной волны симметричной относительно точки $\xi = 0$. Поэтому граничные условия будут следующие: при $\xi = \pm \infty$ скорости v_e, v_i , составляющие полей E_x, E_y, E_z, H_x, H_y и их производные по ξ стремятся к нулю. Кроме того, величина плотности и давление электронного и ионного газа стремятся к невозмущенному значению (т. е. при $\xi = \pm \infty$).

Проведя несложные преобразования уравнений (1.1), (1.4) и используя формулу (1.6), можно написать следующие равенства: (1.7)

$$\frac{d^2\psi}{dh^2} = \left[n' - \frac{(a^2 + 4)v_{\parallel}^2}{4v^2} \right] \psi, \quad \psi^2 = (1 - n') + \frac{v_0^2}{v^2} [1 - (n')^{-\gamma}] \quad \left(v_0^2 = \frac{T_i + T_e}{m_i + m_e} \right)$$

$$E_z = \frac{(m_e - m_i)^2}{el} \left[\frac{\gamma (m_i T_i - m_e T_e)}{(m_i^2 - m_e^2) v^2} (n')^{-\gamma-1} - 1 \right] \frac{dn'}{dh} \quad (1.8)$$

Здесь T_e и T_i — невозмущенные температуры соответственно для электронного и ионного газа; γ — показатель адиабаты, которая считается для электронного и ионного газа одним и тем же ($\gamma = 1, 5/3, 2$).

Согласно уравнению (1.7), функцию ψ можно выбрать вещественной. Последнее свойство было использовано при получении второго уравнения (1.7). В системе волны переменная h соответствует времени в лагранжевых координатах. Тогда вещественность ψ означает, что частота прецессии магнитного поля \mathbf{H} вокруг \mathbf{H}_0 не зависит от температуры плазмы. Последнее вызвано изотропностью температуры.

Ниже предполагается, что плазма равновесная, т. е. $T_e = T_i$. Интегрируя уравнение (1.7), используя при этом указанное в (1.7) соотношение для ψ^2 , получим

$$\frac{d\psi}{dh} = \pm \frac{(1 - (n')^2)^{1/2}}{v^2 2^{1/2}} \{ [v^2 - v_+^2(n')] [v^2 - v_-^2(n')] \}^{1/2}. \quad (1.9)$$

Здесь

$$v_{\pm}^2(n') = \frac{\gamma v_0^2}{(1 + n')} \{ [I + (I_+(n') I_-(n'))^{1/2}] \pm [(I - I_+(n')) (I - I_-(n'))]^{1/2} \}$$

$$I = \frac{(a^2 + 4) v_{\parallel}^2}{4\gamma v_0^2} \quad (1.10)$$

$$I_{\pm}(n') = \frac{(1 + n') [(n')^{-\gamma} - 1]}{\gamma(1 - n')} - \frac{[(n')^{-\gamma+1} - 1]}{(\gamma - 1)(1 - n')} \pm$$

$$\pm \left\{ \frac{(1 + n') [(n')^{-\gamma} - 1]}{\gamma(1 - n')} \left[\frac{(1 + n') ((n')^{-\gamma} - 1)}{\gamma(1 - n')} - \frac{2((n')^{-\gamma+1} - 1)}{(\gamma - 1)(1 - n')} \right] \right\}^{1/2} \quad (1.11)$$

Легко установить следующие свойства функции $I_{\pm}(n')$:

$$I_+(1) = I_-(1) = 1 \quad \text{при } n' = 1, \quad I_+(n') \geq 1, \quad I_-(n') \leq 1 \quad \text{при } n' \neq 1$$

Здесь знак равенства соответствует для $I_+(n')$ случаю $\gamma = 2, n' > 1$, а для $I_-(n')$ — случаю $\gamma = 2, n' < 1$.

2. Уединенная волна. Для получения решений в виде уединенной волны в формуле (1.9) знак перед корнем выбирается таким образом, чтобы: если отрицательному значению h соответствует определенный знак перед корнем, то положительному значению h соответствовал бы противоположный знак. Так как решение ищется всюду непрерывное (до вторых производных включительно), то в точке $h = 0$ производная должна обращаться в нуль (в работе всюду $n' \neq 0, n' \neq \infty$)

$$d\psi/dh = 0. \quad (2.1)$$

Если исключить из рассмотрения случай $\psi = 0$, то производные $d\psi/dh$ и dn'/dh обращаются в нуль одновременно. Условие (2.1) дает следующее значение для скорости быстрых $v_+^2(n'_*)$ и медленных $v_-(n'_*)$ магнитозвуковых волн ($n'_* \neq 1$):

$$v_{\pm}^2 = v_{\pm}(n'_*) \quad (2.2)$$

Здесь n'_* — экстремальное значение n' . Особенно простой вид выражение для v_{\pm} принимает при $\gamma = 2, I = 1$

$$v_+^2 = v_-^2 = \frac{(a^2 + 4) v_{\parallel}^2}{4n'_*} \quad (2.3)$$

В предельных случаях

$$v_+^2 = \frac{(a^2 + 4) v_{\parallel}^2}{2(1 + n'_*)}, \quad v_-^2 = 0 \quad \text{при } T_e = T_i = 0 \quad (2.4)$$

$$v_+^2 = \frac{2\gamma v_0^2}{(\gamma - 1)(1 - n'_*)} [(n'_*)^{-\gamma+1} - 1], \quad v_-^2 = 0 \quad \text{при } v_{\parallel} = 0 \quad (2.5)$$

Разлагая выражение для $v_{\pm}^2(n')$ по степеням $(1 - n')$ и сохраняя члены, содержащие коэффициенты $1, (1 - n'), (1 - n')^2$, получим следующие результаты.

При $I - 1 \gg |1 - n_*'|$

$$I \gg I_+(n_*') = 1 + \left[\frac{\gamma}{2} + \left(\frac{\gamma+1}{3} \right)^{1/2} \operatorname{sgn}(1 - n_*') \right] (1 - n_*') + \frac{(\gamma+1)}{3!} \{ (\gamma+1) + [3(\gamma+1)]^{1/2} \operatorname{sgn}(1 - n_*') \} (1 - n_*')^2 \quad (2.6)$$

имеем

$$v_+^2 = \frac{(a^2 + 4)v_{\parallel}^2}{4} \left\{ 1 + \frac{1 - n_*'}{2!} + \left[\frac{1}{4} - \frac{(\gamma+1)}{12(I-1)} \right] (1 - n_*')^2 \right\} \quad (2.7)$$

$$v_-^2 = \gamma v_0^2 \left\{ 1 + \frac{(\gamma+1)}{2} (1 - n_*') + \frac{(\gamma+1)}{3!} \left[(\gamma+2) + \frac{1}{2(I-1)} \right] (1 - n_*')^2 \right\} \quad (2.8)$$

При $(1 - I) \gg |1 - n_*'|$

$$I \ll I(n_*') = 1 + \left[\frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\gamma+1}{3} \right)^{1/2} \operatorname{sgn}(1 - n_*') \right] (1 - n_*') + \frac{(\gamma+1)}{3!} \{ (\gamma+1) - [3(\gamma+1)]^{1/2} \operatorname{sgn}(1 - n_*') \} (1 - n_*')^2 \quad (2.9)$$

имеем

$$v_+^2 = \gamma v_0^2 \left\{ 1 + \frac{(\gamma+1)}{2} (1 - n_*') + \frac{(\gamma+1)}{3!} \left[(\gamma+2) - \frac{1}{2(1-I)} \right] (1 - n_*')^2 \right\} \quad (2.10)$$

$$v_-^2 = \frac{(a^2 + 4)v_{\parallel}^2}{4} \left\{ 1 + \frac{1 - n_*'}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{(\gamma+1)}{12(1-I)} \right] (1 - n_*')^2 \right\} \quad (2.11)$$

Для существования уединенной волны, описывающей характер изменения плотности плазмы и магнитного поля, которое определяется величиной

$$\psi^2 \geq \frac{H_x^2 + H_y^2}{8\pi n_0 (m_i + m_e) v^2}$$

необходимо одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\psi^2 \geq 0, \quad (d\psi/dh)^2 \geq 0, \quad (dn'/dh)^2 \geq 0 \quad (2.12)$$

Если выполняются два первых неравенства (2.12) при $dn'/dh = \infty$ в точке $h \neq 0$, то существует уединенная волна только для изменения магнитного поля. Из формул (2.3) — (2.5), (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) следует: при $I \gg 1$ существует быстрая уединенная волна сжатия; при $I \ll 1$ — быстрая уединенная волна разрежения только для магнитного поля; при $I = 1$ уединенная волна не существует.

Граничные условия и формула (1.3) приводят к равенству

$$u = u_i = u_e = (1 - n')v \quad (2.13)$$

Из равенств (2.4), (2.5), (2.7), (2.10) и (2.13) получаем

$$\frac{d}{dn_*'} [u + v_+(n_*')] < 0 \quad (2.14)$$

Неравенство (2.14) показывает, что при движении магнитозвуковой волны ее профиль деформируется.

3. Распределение зарядов и энергии частиц внутри уединенной волны.
В условиях квазинейтральности плазмы кинетическая энергия электрона и иона определяется соответственно формулой (в системе волны)

$$W_e = m_i \left\{ \frac{(1 - (n')^2)v^2}{2} - \frac{\gamma v_0^2}{(\gamma - 1)} [(n')^{-\gamma+1} - 1] \right\} + \frac{m_e (n')^2}{2} \quad (3.1)$$

$$W_i = m_e \left\{ \frac{(1 - (n')^2)v^2}{2} - \frac{\gamma v_0^2}{(\gamma - 1)} [(n')^{-\gamma+1} - 1] \right\} + \frac{m_i (n')^2}{2} \quad (3.2)$$

Кинетическая энергия иона растет с ростом n' , а электрона — убывает. Это доказывает, что ион задерживается в окрестности пика уединенной волны. Для холодной плазмы ($T_e = T_i = 0$) в области $1 > n' > \sqrt{2}/2$ кинетическая энергия иона больше кинетической энергии электрона, а в области $0 < n' < \sqrt{2}/2$, — наоборот.

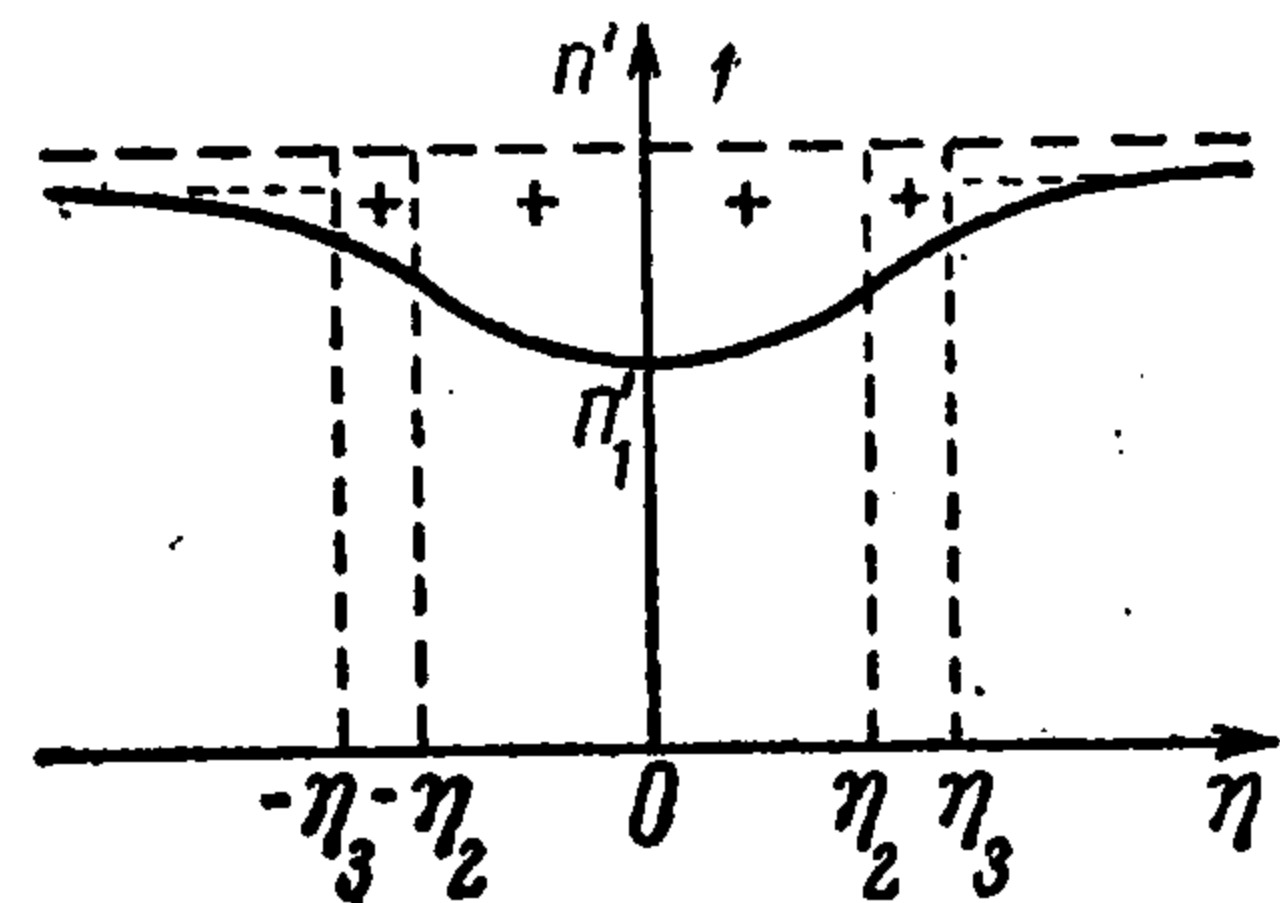
Ниже предполагается, что плазма холодная. Вторая формула (1.7 и (1.9) приводят к следующему виду для профиля уединенной волны сжатия:

$$\left[\frac{2}{(1 - n_*')} \right]^{1/2} \left\{ \operatorname{ar ch} \left[\frac{1 - n_*'}{1 - n'} \right]^{1/2} - [(1 - n_*) (n' - n_*)]^{1/2} \right\} = \pm \eta \quad (3.3)$$

где знаки плюс и минус соответствуют положительным и отрицательным η .

Для установления распределения зарядов внутри уединенной волны напишем выражение для заряда плазмы ($n_i - n_e$) при помощи уравнений (1.5), (1.7) — (1.9)

$$\frac{n_i - n_e}{n_0} = \frac{3(m_i^2 - m_e^2)v^2(1 - n')}{m_i m_e c^2 n'} \left[\frac{(1 + 2n_*')}{3} - n' \right] \quad (3.4)$$



На фигуре дана качественная картина профиля и распределения зарядов внутри уединенной волны. Точки с координатами η_3 и $-\eta_3$ отделяют положительно заряженную область от отрицательной.

Значение η_3 определяется равенством

$$\eta_3 = \left(\frac{2}{1 - n_*'} \right)^{1/2} \left[\operatorname{ar ch} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} - \frac{(1 - n_*) 3^{1/2}}{2} \right] \quad (3.5)$$

Координаты η_2 и $-\eta_2$ соответствуют точкам перегиба кривой уединенной волны. Для всех n_* выполняется неравенство $\eta_2 < \eta_3$.

Интегрируя выражение (3.4) в области $(0, \eta_3)$ и $(\eta_3, +\infty)$, убеждаемся, что полученные выражения равны по величине, но противоположны по знаку; это указывает на полную электрическую нейтральность плазмы на правой ветви уединенной волны. Аналогично проводится вычисление и для левой ветви уединенной волны.

4. **Ширина уединенной волны.** Формулы (1.7), (1.9) дают выражение для dn'/dh ; разложив последнее по степеням $(1 - n')$ и сохранив члены с коэффициентами $(1 - n')$, $(1 - n')^2$, после интегрирования полученного результата находим

$$1 - n' = \frac{1}{a_1^2} \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{1}{2a_1} \right)^{1/2} \eta \right] \quad (4.1)$$

$$\left(a_1^2 = \frac{1}{2(1 - M_{\parallel}^{-2})} - \frac{(\gamma + 1)}{6(M_0^2 - 1)} > 1, M_{\parallel}^2 = \frac{(a^2 + 4)v^2}{v_{\parallel}^2}, M_0^2 = \frac{v^2}{\gamma v_0^2} \right)$$

Таким образом, полуширина слабых уединенных волн и величина амплитуд зависят как от магнитного поля H_0 , так и от температуры плазмы.

5. **Квазинейтральность плазмы.** Используя формулы (1.5), (1.7) — (1.9) и сохраняя в выражении $(n_i - n_e)$ члены, содержащие $(1 - n')$ и $(1 - n')^2$, получим

$$\frac{(n_i - n_e)}{n_0} = \frac{4v^2(m_i^2 - m_e^2)(1 - E_1)(1 - M_{\parallel}^2)(1 - n')}{m_i m_e c^2} \left[1 - \frac{2E_1(\gamma + 1)}{(1 - E_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{3a_1^2}{2} - \frac{5(\gamma + 1)}{4(\mu_0^2 - 1)} - 1 \right] \quad (5.1)$$

$$\left(E_1 = \frac{\gamma T_i}{(m_i + m_e)v^2} \right)$$

Для квазинейтральности необходимо условие

$$|n_i - n_e| \ll n_0$$

Это приводит к неравенствам

$$v^2 \ll \frac{m_e}{m_i} c^2, \quad T_i \ll m_e c^2 \quad (5.2)$$

Поступила 20 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Каплан С. А., Станюкович К. П. Решение уравнений магнитогидродинамики для одномерного движения. ДАН СССР, 1954, т. 95, № 4.
2. Куликовский А. Г. О волнах Римана в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, 1958, т. 121, № 6.
3. Ахизер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Простые волны в магнитной гидродинамике. ЖТФ, 1959, т. 29, № 8.
4. Adlam J. H., Allen J. E. The structure of strong collision free hydromagnetic. Waves. Phil. Mag., 1958, vol. 3, No. 29.
5. Hain K., Lüst R., Schlüter A. Hydromagnetic Waves of fine Amplitude in a Plasma with Isotropic and Nonisotropic Pressure Perpendicular to a Magnetic Field. Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, No. 4.
6. Saffman P. G. Propagation of a Solitary wave along a magnetic field in a cold collision free plasma. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, No. 1.
7. Патарая А. Д. Распространение нелинейных колебаний плазмы вдоль магнитного поля. I. ЖТФ, 1962, т. 32, № 2.
8. Патарая А. Д. Распространение нелинейных колебаний плазмы вдоль магнитного поля. II. ЖТФ, 1962, т. 32, № 5.