

## К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН ОКОЛО КОНТУРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

И. Г. Филиппов

(Москва)

Рассматривается классическая задача дифракции плоской слабой ударной волны на контурах произвольной формы. Предлагается иной подход к постановке и решению данных задач. Сущность метода заключается в том, что плоская нестационарная задача дифракции сводится к вспомогательной трехмерной установившейся задаче, где третья координата пропорциональна времени.

При решении задач дифракции пространственно-временная система координат применялась и ранее. Например, в статье [1] таким образом решалась задача дифракции слабой плоской ударной волны на тонких профилях произвольной формы, когда фронт падающей ударной волны распространяется вдоль хорды профиля. Но по существу методы, рассматриваемые в данной работе и в работе [1], различны.

В настоящей работе задачи дифракции решаются в линейной постановке, что, вообще говоря, допустимо не во всей области дифракции. В работе С. А. Христиановича и его учеников [2] показывается, что когда фронт падающей ударной волны составляет малый угол с нормалью к контуру, отражение слабого скачка является маховским, нерегулярным. Поэтому в окрестности маховского отражения решение линейной задачи дает качественно неверную картину дифракции.

В нашей задаче данное явление также будет иметь место в некоторых точках контура в первые моменты времени. Но мы будем линеаризовать задачу во всей области дифрагированного поля по той причине, что линеаризация исходных уравнений задачи не имеет места лишь в небольших областях дифрагированного поля и для весьма малых отрезков времени. Поэтому введение нелинейных членов в этих малых областях сильно усложнит и без того сложную математическую постановку задачи и мало изменит общую картину дифракции для произвольных отрезков времени.

В первых параграфах контуры предполагаются жесткими. В дальнейшем метод распространяется и на контуры деформируемые. В случае пластинки показано, что задача дифракции данным методом может быть решена и во втором приближении.

**§ 1. Постановка общей задачи дифракции ударных волн на недеформируемых контурах.** 1. Пусть на замкнутый контур  $C$  произвольной формы в плоскости  $xu$  падает слабая стационарная ударная волна (фиг. 1). Будем предполагать, что обтекание контура  $C$  ударной волной является изэнтропическим и безвихревым; вязкостью и теплопроводностью пренебрегаем.

При данных предположениях задача дифракции ударной волны на недеформируемом контуре  $C$  сводится к решению волнового уравнения для потенциала  $\Phi$

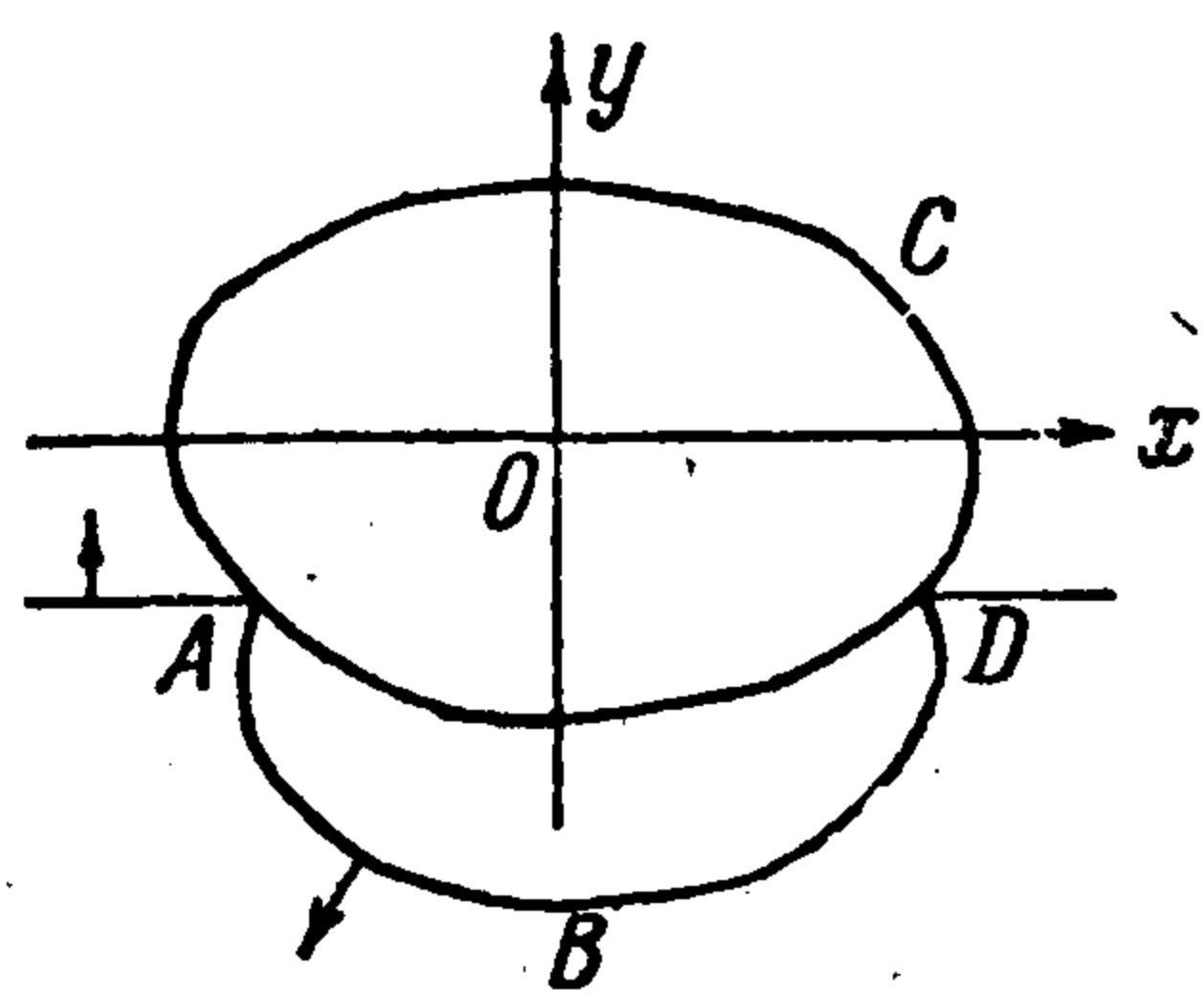
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \quad \tau = \frac{at}{l}, \quad x = \frac{x'}{l}, \quad y = \frac{y'}{l} \quad (1.1)$$

с граничными условиями на  $C$  и на фронте  $ABD$  отраженной волны

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C, \quad \Phi(x, y, \tau) = \Phi_0(x, y, \tau) \quad \text{на } ABD$$

$$\Phi(x, y, \tau) = \Phi_0(x, y, \tau) \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $x, y, \tau$  — безразмерные координаты и время соответственно;  $\Phi$  — безразмерный потенциал скорости;  $a$  — скорость звука;  $l$  — характерная длина задачи;  $n$  — внешняя нормаль к контуру;  $\Phi_0$  — безразмерный потенциал течения среды за фронтом падающей ударной волны.



Фиг. 1

За начало дифракции ударной волны на контуре  $C$  примем момент времени  $\tau = 0$ . Для простоты будем предполагать, что параметры течения газа за фронтом падающей ударной волны постоянны, т. е.

$$\Phi_0(x, y, \tau) = (\Delta p / \rho a^2) (y - \tau) \quad (1.3)$$

Здесь  $\Delta p$  — перепад давления на фронте падающей ударной волны;  $\rho$  — плотность газа. При  $\tau > 0$  потенциал  $\Phi$  будем искать в виде

$$\Phi(x, y, \tau) = \Phi_0(x, y, \tau) + \varphi(x, y, \tau) \quad (1.4)$$

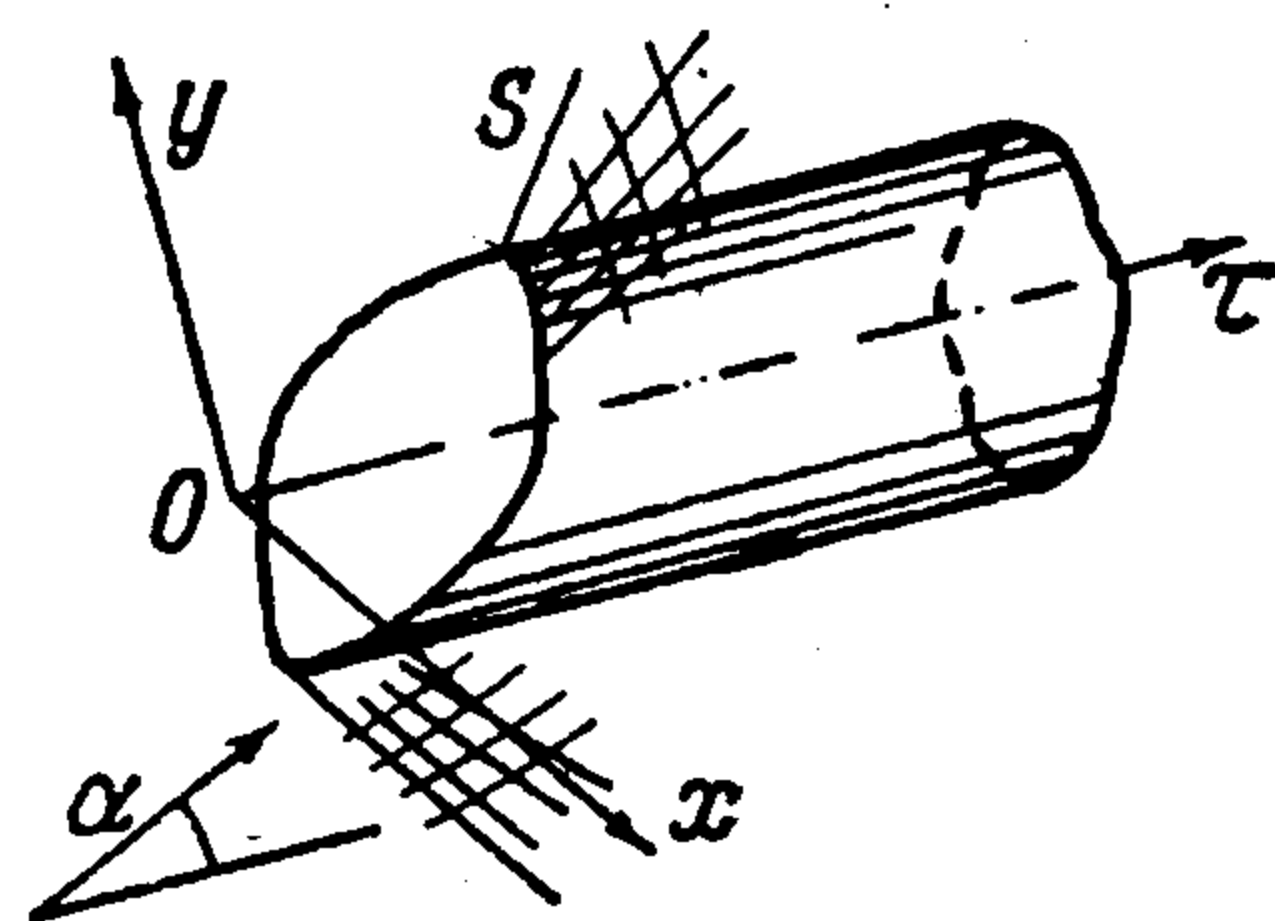
Нетрудно видеть, что потенциал возмущенных скоростей  $\varphi(x, y, \tau)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (1.5)$$

в области между отраженной ударной волной  $ABD$  и контуром  $C$  и условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\alpha_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad \text{на } C$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } ABD \quad (1.6)$$



Фиг. 2

2. Рассмотрим вспомогательную задачу об обтекании пространственно-установившимся сверхзвуковым потоком идеального газа полубесконечного полого цилиндра (фиг. 2) с образующими параллельными оси  $\tau$  под малым углом атаки  $\alpha$ . Пусть кривая, образованная пересечением данного полого цилиндра произвольной плоскостью  $\tau = \text{const}$ , соответствует части контура  $C$ , составляющего часть границы возмущенной области обтекания контура  $C$  (фиг. 1), падающей ударной волной, или соответствует всему контуру  $C$  при  $\tau \geq \tau_2$ , где  $\tau_2 = 2$  — время, за которое падающая ударная волна полностью охватит контур  $C$ .

Потенциал  $\varphi(x, y, \tau)$  обтекания полого цилиндра удовлетворяет уравнению

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

и условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad \text{на поверхности цилиндра}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на волновой поверхности} \quad (1.8)$$

В данной вспомогательной задаче будем рассматривать лишь внешнюю задачу, а возмущения от внутренней поверхности учитывать не будем, что возможно в силу линейности уравнений (1.7), (1.8).

Сравним систему уравнений (1.5), (1.6) с системой (1.7), (1.8). Нетрудно видеть, что уравнения (1.5) и (1.7) совпадают при значении  $M = \sqrt{2}$ , условия (1.6) и (1.8), кроме последнего, совпадают при  $\alpha = \alpha_0$ .

Покажем, что условия  $\varphi = 0$  на фронте отраженной ударной волны в (1.6) и  $\varphi = 0$  на волновой поверхности в (1.8) эквивалентны.

Для этого рассмотрим картину дифракции в задаче (1.5), (1.6) в момент времени  $\tau = \tau_1$ . При  $\tau = \tau_1$  ( $\tau_1 < \tau_2$ ) граница возмущенной области состоит из части контура  $C$  (или всего контура  $C$  при  $\tau_1 > \tau_2$ ) и фронта отраженной ударной волны. В свою очередь пересечение цилиндра плоскостью  $\tau = \tau_1$  во вспомогательной задаче соответствует контуру  $C$  в задаче (1.5) — (1.7). Но так как волновая поверхность во вспомогательной внешней задаче является огибающей характеристических конусов, начинающихся в точках срезанного края полого цилиндра с углом полураствора, равного  $\pi/4$  то, как нетрудно видеть кривая пересечения данной волновой поверхности плоскостью  $\tau = \tau_1$  также соответствует кривой, образующей фронт отраженной ударной волны в задаче (1.5), (1.6). Следовательно, совпадают и последние условия в (1.6) и (1.8), соответственно.

Таким образом, система (1.5), (1.6) полностью совпадает с системой (1.7), (1.8) и решение вспомогательной задачи при  $\alpha = \alpha_0$  и  $M = \sqrt{2}$  дает решение задачи о дифракции слабой ударной волны на контуре  $C$ . Рассмотрим частные случаи, когда контур  $C$  будет вполне определен.

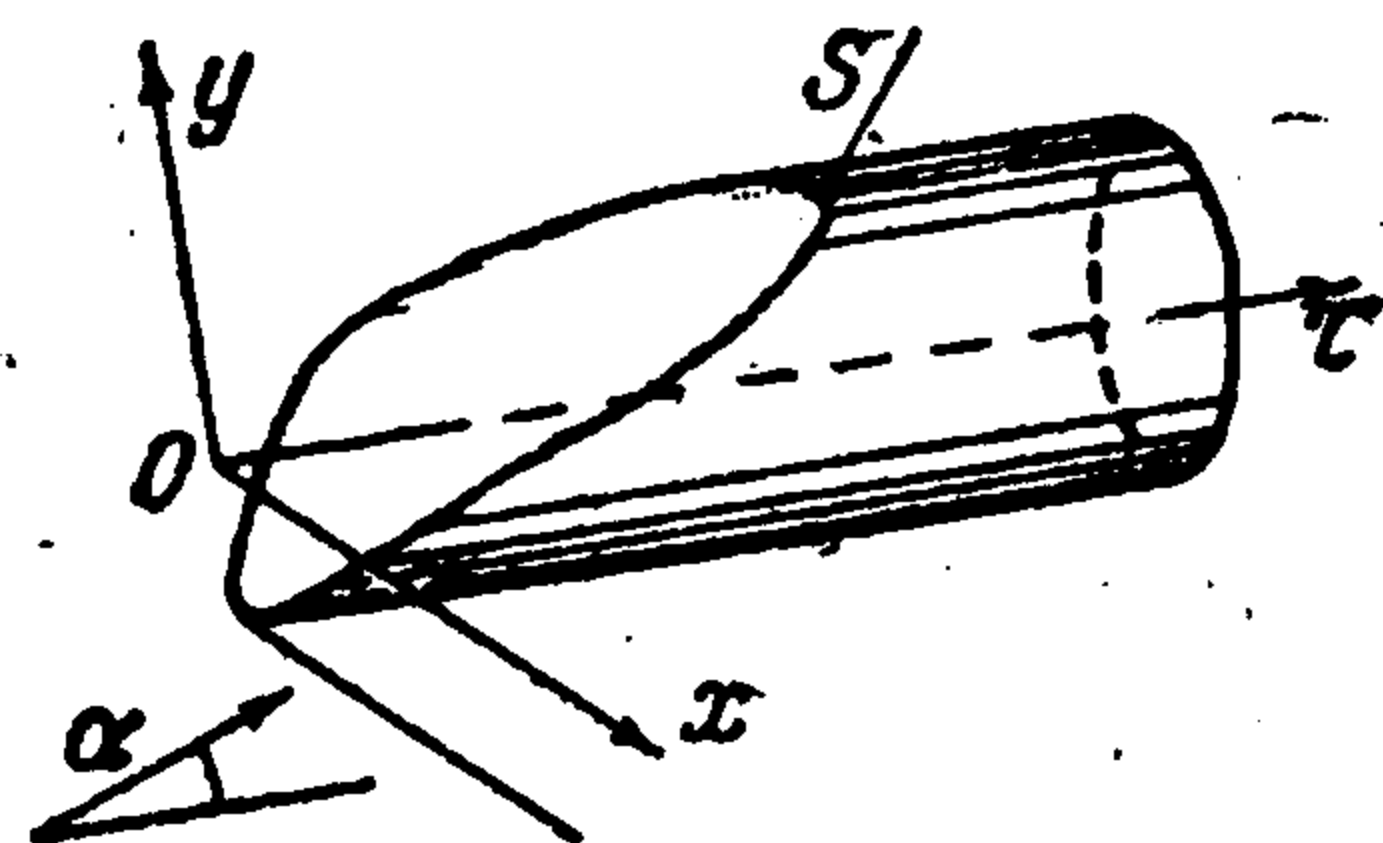
§ 2. Дифракция ударной волны на окружности. Перейдем от прямоугольных координат  $x, y$  к полярным  $r, \theta$ , в которых система (1.5), (1.6) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\alpha_0 \sin \theta \quad \text{при } r = 1$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.2)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на фронте отраженной ударной волны} \quad (2.3)$$



Фиг. 3

В силу § 1 данная задача эквивалентна внешней задаче обтекания срезанного полубесконечного полого кругового цилиндра (фиг. 3) пространственным установившимся сверхзвуковым  $M = \sqrt{2}$  потоком идеального газа под малым углом атаки  $\alpha_0 = \Delta p / \rho a^2$ .

Для решения системы (2.1) — (2.3), описывающей также решение вспомогательной задачи, применим метод Вольтерра [8].

Тогда при  $\tau > 0$  решение вспомогательной задачи сводится к определению потенциала  $\varphi(1, \theta, \tau)$  на поверхности соответствующего цилиндра  $r = 1$ , удовлетворяющего следующему интегральному уравнению Вольтерра II рода:

$$\varphi(1, \theta_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[ \varphi(1, \theta, \tau) \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} V \right] d\sigma \right\} \quad (2.4)$$

Здесь функция Вольтерра

$$V = \ln \frac{(\tau_0 - \tau) + \sqrt{(\tau_0 - \tau)^2 - (r_0 - r)^2 - 4r_0 r \sin^2[(\theta_0 - \theta)/2]}}{\sqrt{(r_0 - r)^2 + 4r_0 r \sin^2[(\theta_0 - \theta)/2]}}$$

Область интегрирования  $\Sigma$  — часть поверхности цилиндра (фиг. 3), отсекаемая конусом влияния из точки  $(r_0 = 1, \theta_0, \tau_0)$ .

В силу эквивалентности задач потенциал  $\varphi(1, \theta, \tau)$  на контуре  $C$  (фиг. 1) при любом значении  $\tau$  также будет удовлетворять интегральному уравнению (2.4).

Уравнение (2.4) всегда можно решать, например, численно. При больших  $\tau$  можно построить асимптотическое решение задачи (2.1) — (2.3).

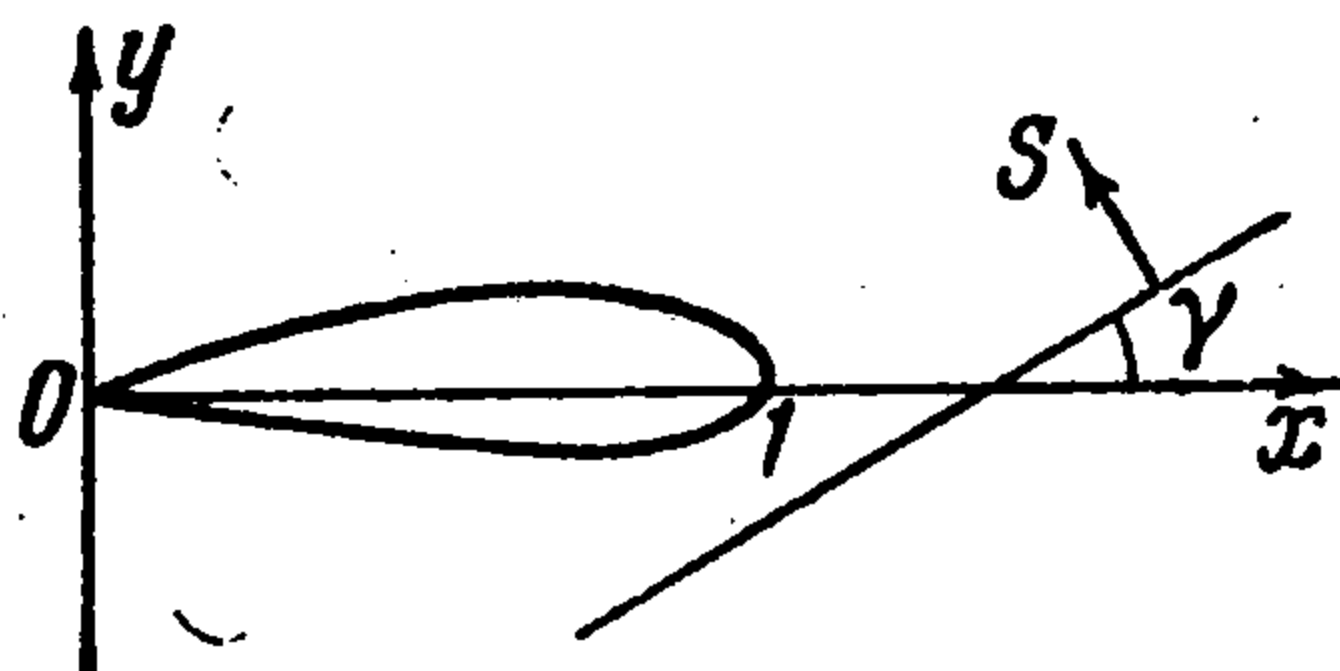
На самом деле при больших  $\tau$  радиус  $r$  волновой поверхности (фиг. 3) слабо зависит от  $\theta$  и тогда функцию  $\varphi(x, y, \tau)$  можно искать в виде

$$\varphi(x, y, \tau) = -\alpha_0 \sin \theta f(r, \tau) \quad (2.5)$$

Подставим (2.5) в (2.1) — (2.3) и к полученной новой системе применим преобразование Лапласа. Тогда имеем

$$f(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{K_1(r, q)}{K_1(q) q^2} e^{q\tau} dq \quad (2.6)$$

где  $K_1(q)$  — функция Бесселя мнимого аргумента;  $M$  — контур в плоскости  $q$ , по которому происходит интегрирование при применении обратного преобразования Лапласа. Определив  $\varphi(r, \theta, \tau)$  из уравнений (2.4) или (2.5) при больших  $\tau$ , можно найти, например, распределение давления  $p$  вдоль  $C$  при любом значении  $\tau$



Фиг. 4

$$p(1, \theta, \tau) = p_0 - \rho a^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{r=1} \quad (2.7)$$

При больших значениях  $\tau$  имеем [4] (2.8)

$$p(1, \theta, \tau) = p_0 - \rho a^2 \sin \theta \left\{ e^{-0.6435\tau} [1.212 \cos(0.5012\tau) + 0.1898 \sin(0.5012\tau)] - \int_0^{\infty} \frac{e^{-q\tau}}{K_1'^2(q) + \pi^2 I_1'^2(q)} \frac{dq}{q^2} \right\}$$

где  $I_1(q)$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

Из вида решения (2.6) и (2.8) следует, что отраженные волны ведут себя как расходящиеся, что и должно быть, исходя из физических соображений.

§ 3. Случай, когда контур  $C$  — тонкий профиль. Будем считать, что тонкий профиль  $C$  движется (фиг. 4) с некоторой скоростью  $U$  под нулевым углом атаки вдоль оси  $x$  и что ударная волна перемещается под некоторым углом  $\gamma$  к оси  $x$ .

Кроме того, будем решать задачу слабонелинейную, т. е. будем учитывать также члены второго порядка малости в уравнении для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi(x, y, \tau)$ , и взаимодействием ударной волны с возмущениями, вызванными движущимся профилем, будем пренебрегать.

Считая обтекание профиля  $C$  ударной волной безвихревым и изэнтропическим ( $k$  — показатель адиабаты), задачу сводим к определению потенциала  $\varphi(x, y, \tau)$  возмущенных скоростей, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = (k-1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + 2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \tau} \right) \quad (3.1)$$

с точностью до членов третьего порядка малости относительно  $\varphi(x, y, \tau)$  и условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha_0 \cos \gamma + (-\alpha_0 \sin \gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial x}) f'(x) \quad \text{на } C \quad (3.2)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на фронте отраженной волны} \quad (3.3)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{y \rightarrow -0} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{y \rightarrow +0} \quad \text{при } u < a \quad (3.4)$$

В последнем условии Жуковского на задней кромке и вихревой пелене,  $y = f(x)$  — уравнение профиля  $C$ . Положим  $\varphi(x, y, \tau) = \varphi_1(x, y, \tau) + \varphi_2(x, y, \tau) + \dots$ ; тогда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} = (k-1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + 2 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial \tau} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial \tau} \right) \quad (3.6)$$

и условиям

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad (3.7)$$

вне отраженной ударной волны

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\alpha_0 \cos \gamma, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \left( -\alpha_0 \sin \gamma + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) f'(x) \quad \text{при } y = 0 \quad (3.8)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} \right)_{y \rightarrow -0} = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} \right)_{y \rightarrow +0} \quad \text{при } u < a \quad (3.9)$$

Следуя методу § 1, можно показать, что плоская задача обтекания движущегося тонкого профиля слабой ударной волной эквивалентна задаче обтекания установившимся сверхзвуковым  $M = \sqrt{2}$  пространственным потоком идеального газа соответствующего тонкого крыла под малым углом атаки  $\alpha_0 \cos \gamma$  в двух случаях.

1) Обтекание движущейся пластинки

$$f'(x) = 0, \quad 2k_1 = k - 1, \quad M_0 = \frac{u}{a} \neq 0 \quad (\gamma \text{ — произвольный угол})$$

2) Обтекание неподвижного тонкого профиля ударной волной точно снизу

$$f'(x) \neq 0, \quad M_0 = 0, \quad 2k_1 = k - 1, \quad \gamma = 0$$

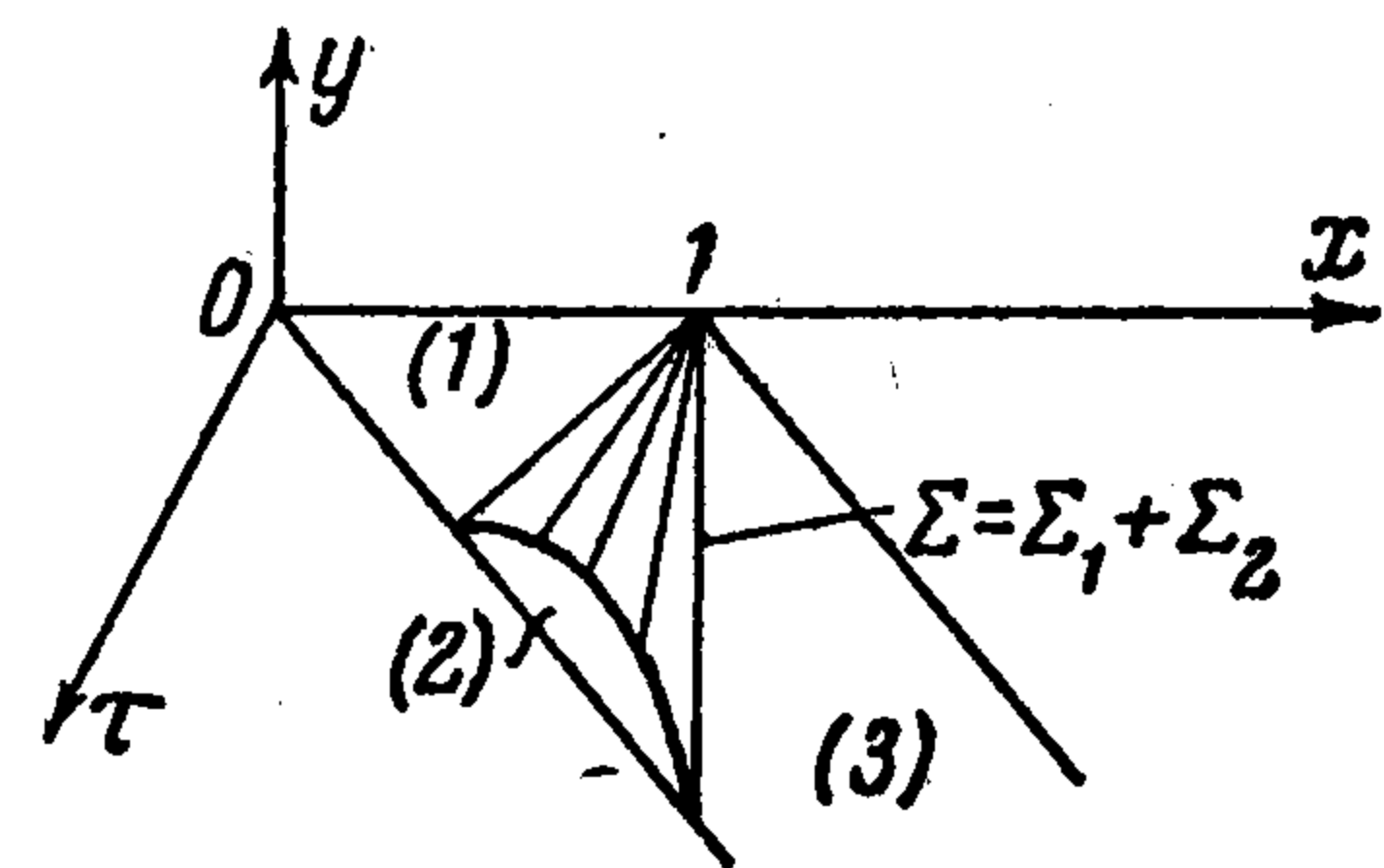
( $k_1$  — показатель адиабаты вспомогательной задачи)

Решение линейной задачи для пластинки при  $M_0 > 1$  дал А. И. Голубинский [5].

Приведем решение задачи об обтекании движущейся пластинки  $M_0 > 1$  слабой ударной волной при  $\gamma = 0$  во втором приближении, считая  $\varphi_1(x, y, \tau)$  известной [5].

Так как данная задача эквивалентна обтеканию трехмерным установившимся сверхзвуковым потоком  $M = \sqrt{2}$  соответствующего крыла (в виде полубесконечной пластинки) (фиг. 5), то будем решать соответствующую вспомогательную задачу. Уравнения боковых кромок крыла (фиг. 5) имеют вид:

$$x = M_0 \tau (AC), \quad x = 1 + M_0 \tau (BD) \quad (3.10)$$



Фиг. 5

Всю поверхность пластинки разобьем на три области, как показано на фиг. 5. Функцию  $\varphi_2(x, y, \tau)$  будем определять в каждой из данных областей. Тогда к условиям (3.7), (3.8) необходимо добавить условие непрерывности потенциала при переходе через поверхность  $\Sigma$ . На одной части поверхности  $\Sigma$  (обозначим ее через  $\Sigma_1$ ) решение в области (2) будем сопрягать с решением в области (1), а на другой  $\Sigma_2$  — с решением в области (3). Линия раздела поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  будет соответствовать линии нулевого потенциала, так как она будет образующей и для общей волновой поверхности пластинки, на которой потенциал принимается равным нулю.

Обозначим решения в областях (1) и (3) через  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{23}$  соответственно. Легко видеть, что решения в областях (1) и (3) соответствуют решениям обтекания пластинки без скольжения и со скольжением, соответственно, и тогда  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{23}$  имеют вид:

$$\varphi_{21}(x, y, \tau) = \alpha_0 [\tau - (2\alpha_0 + 1)y] - \alpha_0^2 (k_1 \tau + y) \quad (3.11)$$

$$\varphi_{23}(x, y, \tau) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\cos 2\chi}} [(\tau - 2\alpha_0 y) \cos \chi - x \sin \chi - \sqrt{\cos 2\chi} y] - \left( \operatorname{tg} \chi = \frac{1}{M_0} \right) - \frac{2\alpha_0^2}{\cos 2\chi} \left[ \frac{(k_1 + 1) \cos^2 \chi}{2 \cos 2\chi} (\tau \cos \chi - x \sin \chi) - \frac{(\tau \cos \chi - x \sin \chi)}{2 \cos^2 \chi} - \sqrt{\cos 2\chi} y \right] \quad (3.12)$$

При решении уравнения (3.6) в области (2) с граничными условиями (3.7), (3.8) и условием непрерывности потенциала на поверхности  $\Sigma$  применим видоизмененный метод Вольтерра. Тогда для  $\Phi_{22}(x, y, \tau)$  получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{22}(x, y, \tau) = & \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma_1} \left( \Phi_{21} \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial N} \right) d\sigma + \right. \\ & \left. + \iint_{\Sigma_2} \left( \Phi_{23} \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial N} \right) d\sigma + \iiint_Q V F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь  $Q$  — объем, ограниченный плоскостью  $y = 0$ , поверхностью конуса влияния в точке  $(x, 0, \tau)$  и частью поверхности  $\Sigma$ , вырезаемой данным конусом влияния;  $F(\tau, x, y)$  — правая часть уравнения (3.6);  $N$  — кономаль к поверхности  $\Sigma$ ; функция Вольтерра имеет вид

$$V = \ln \frac{(\tau - \varepsilon) + \sqrt{(\tau - \varepsilon)^2 - (x - \eta)^2 - (y - \zeta)^2}}{\sqrt{(x - \eta)^2 + (y - \zeta)^2}} \quad (3.14)$$

Так как поверхность  $\Sigma$  характеристическая, то кономаль  $N$  лежит на поверхности  $\Sigma$  и  $\partial / \partial N = \partial / \partial s$ , где  $s = \sqrt{x^2 + y^2} / \tau$ . Следовательно, на  $\Sigma$  достаточно знать потенциалы  $\Phi_{21}$  и  $\Phi_{23}$ , а их производные по кономали  $N$  легко определяются.

Зная потенциал  $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} + \Phi_{23}$  можно найти распределение давления  $p$  по поверхности пластинки по формуле

$$p = p_0 - \rho a^2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} \right) \quad (3.15)$$

Линия раздела поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  (фиг. 5) легко определяется из двух уравнений (3.12), (3.13), если положить  $\Phi_{21} = \Phi_{23} = 0$ .

*Примечание.* Выше было показано, что задача дифракции ударной волны на контуре произвольной формы эквивалентна внешней задаче обтекания соответствующего цилиндра сверхзвуковым  $M = \sqrt{2}$  установившимся потоком идеального газа.

Можно показать также, что внутренней задаче обтекания цилиндра соответствует задача распространения возмущений (фиг. 1) внутри контура  $C$ , для которой при больших  $\tau$  можно построить асимптотическое решение. Для  $\varphi(r, \theta, \tau)$  нетрудно получить [6] при больших  $\tau$

$$\varphi(r, \theta, \tau) = \frac{\alpha_0 \sin \theta}{2\pi i} \int_M \frac{I_1(rq)}{I_1'(q)} e^{q\tau} \frac{dq}{q^2} \quad (3.16)$$

Для давления  $p$  при больших  $\tau$  на контуре имеем

$$p - p_0 = -2\alpha_0 \sin \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 - 1} \sin(\alpha_k \tau) \quad (3.17)$$

где  $\alpha_k$  — положительные нули функции  $I_1'(q)$ .

Дифракция слабых ударных волн на решетке профилей также может быть исследована вышеизложенным методом.

**§ 4. Постановка общей задачи дифракции в случае деформируемого контура.** Будем предполагать, что зависимость между давлением  $p$  на контуре  $C$  и безразмерной деформацией  $\varepsilon(s, \tau)$  контура задана:

$$p(s, \tau) = \Psi[\varepsilon(s, \tau)] \quad (4.1)$$

Здесь  $\tau$  — безразмерное время,  $s$  — длина дуги контура  $C$ .

Предварительно рассмотрим случай зависимости ( $k$  — коэффициент пропорциональности)

$$p(s, \tau) = k^{-1} \varepsilon(s, \tau) \quad (4.2)$$

В силу того, что  $p(s, \tau) \sim \partial\varphi / \partial\tau$  (где  $\varphi$  — потенциал возмущенных скоростей) имеем:

$$\varepsilon(s, \tau) = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \quad (\lambda = -\rho a^2 k) \quad (4.3)$$

Кроме того, будем предполагать, что смещение  $\varepsilon$  мало вместе со своей производной по  $\tau$ . Тогда можно показать, как и в случае недеформируемого контура (§ 1), что задача дифракции слабой ударной волны (фиг. 1) на произвольном деформируемом контуре  $C$  сводится к определению потенциала возмущенных скоростей  $\varphi(x, y, \tau)$ , удовлетворяющего волновому уравнению (1.5) при граничных и начальном условиях

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\alpha_0 \frac{\partial y}{\partial n} + \varepsilon_\tau'(s, \tau) \quad \text{на } C \quad (4.4)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на фронте отраженной волны} \quad (4.5)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad (4.6)$$

и что данная задача, описываемая системой (1.5), (4.4)—(4.6), эквивалентна задаче внешнего обтекания соответствующего полубесконечного полого цилиндра (фиг. 2) пространственно-установившимся сверхзвуковым  $M = \sqrt{2}$  потоком идеального газа под малым углом атаки  $\alpha_0$ . Следовательно, будем решать данную вспомогательную задачу обтекания полого цилиндра. Аналогично § 1, к системе (1.5), (4.4)—(4.6) применим метод Вольтерра [3]. Тогда при  $\tau > 0$  решение задачи сводится к определению потенциала  $\varphi(s, \tau)$  на поверхности соответствующего цилиндра, удовлетворяющего интегро-дифференциальному уравнению:

$$\varphi(s_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial\tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[ \varphi(s, \tau) \frac{\partial V}{\partial n} - \lambda \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} V \right] ds d\tau + \alpha_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial n} V ds d\tau \right\} \quad (4.7)$$

где  $\Sigma$  — часть поверхности цилиндра, отсекаемая конусом влияния из точки  $(s_0, \tau_0)$ , причем поверхность цилиндра берется соответствующей недеформируемому контуру  $C$  в силу малости  $\varepsilon$ ,  $V$  — функция Вольтерра и имеет вид (3.15). Определив потенциал  $\varphi$ , можно вычислить остальные параметры потока. Например, давление  $p$  на контуре  $C$  равно:

$$p = p_0 - \rho a^2 (\partial\varphi / \partial\tau)C \quad (4.8)$$

Отсюда, подставляя (4.8) в (4.2), найдем

$$\varepsilon(s, \tau) = -\lambda (\partial\varphi / \partial\tau)C \quad (4.9)$$

### § 5. Дифракция ударной волны в случае деформируемой окружности.

1°. В полярных координатах  $r, \theta$  система (1.4) — (1.6) примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\alpha_0 \sin\theta + \lambda \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} \quad \text{при } r = 1 \quad (5.2)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на } ABD, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad (5.3)$$

В силу § 1 данная задача также эквивалентна задаче обтекания соответствующего срезанного полубесконечного полого цилиндра  $r = 1 + \varepsilon(\theta, \tau)$  (фиг. 3) пространственным установившимся сверхзвуковым  $M = \sqrt{2}$  потоком идеального газа под малым углом  $\alpha_0 = \Delta p / \rho a^2$ .

Как и в случае произвольного контура  $C$  решение данной задачи можно свести методом Вальтерра к решению интегро-дифференциального уравнения типа (4.7), где  $\Sigma$  будет частью поверхности соответствующего цилиндра  $r = 1$ , отсекаемой конусом влияния из точки  $(r_0 = 1, \theta_0, \tau_0)$ .

Приближенное выражение для  $\varepsilon(\theta, \tau)$  дано в работе [7].

При больших значениях  $\tau$  можно построить асимптотическое решение задачи (5.1)—(5.3). Действительно, при больших значениях  $\tau$  радиус общей волновой поверхности обтекания цилиндра слабо зависит от угла  $\theta$  и при больших  $\tau$  можно считать, что

$$\varphi(r, \theta, \tau) = -\alpha_0 \sin \theta f_1(r, \tau) \quad (5.4)$$

Применим преобразование Лапласа к системе (5.1) — (5.3) при условии (5.4). Тогда задача сведется к решению уравнения Бесселя для преобразованной функции  $F_1(r, a)$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \left( q^2 + \frac{1}{r^2} \right) F = 0, \quad F(r, q) = \int_0^{\infty} f_1(r, \tau) e^{-q\tau} d\tau \quad (5.5)$$

где  $q$  — переменная преобразования Лапласа, при условии, что

$$\frac{dF}{dr} = \frac{1}{q} - \lambda q^2 F \quad \text{при } r = 1 \quad (5.6)$$

и ее производные по  $\tau$  исчезают при  $\tau < 0$ . Нетрудно видеть, что решение системы (5.5) — (5.6) имеет вид

$$F(r, q) = \frac{K_1(rq)}{K_1'(q) + \lambda q K_1(q)} \frac{1}{q^2} \quad (5.7)$$

Следовательно,

$$f_1(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{K_1(rq) e^{q\tau}}{K_1'(q) + \lambda q K_1(q)} \frac{dq}{q^2} \quad (5.8)$$

и при больших  $\tau$  потенциал  $\varphi(r, \theta, \tau)$  определится формулой (5.4).

Полагая в (5.7)  $\lambda = 0$ , получим решение при больших  $\tau$  для жесткого контура, построенное в § 1. Из (5.4) при больших  $\tau$  давление

$$p = p_0 - \frac{\alpha_0 \rho a^2}{2\pi i} \sin \theta \int_M q F(1, q) e^{q\tau} dq \quad \text{при } r = 1 \quad (5.9)$$

или

$$p = p_0 - \alpha_0 \rho a^2 \sin \theta \left\{ e^{-q_1(\lambda)\tau} [A(\lambda) \cos \{q_2(\lambda)\tau\} + B(\lambda) \sin \{q_2(\lambda)\tau\}] - \int_L q F(1, q) e^{q\tau} dq \right\} \quad (5.10)$$

Здесь  $-q_1 + iq_2$  — корень функции  $F^{-1}(1, q)$ ,  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$  — некоторые вполне определенные функции от  $\lambda$  и при  $\lambda = 0$   $q_1 = 0.6435$ ,  $q_2 = 0.5012$ ,  $A = 1.2120$ ,  $B = 0.1898$ .

В (5.10) контур интегрирования  $L$  состоит из верхней и нижней сторон разреза вдоль отрицательной оси в плоскости  $q$ , включая малую окружность около точки  $q = 0$ . Разбивая контур  $L$  на данные три части, интегрируя второй член в (5.10) вдоль этих путей и считая, что

$$\begin{aligned} K_1(qe^{\pm i\pi}) &= -K_1(q) \mp i\pi I_1(q), & K_0(qe^{\pm i\pi}) &= +K_0(q) \pm i\pi I_0(q) \\ K_1'(q) &= -K_0(q) - K_1(q)/q, & K_0(q)I_1(q) + K_1(q)I_0(q) &= 1/q \end{aligned}$$

получим:

$$\int_L q F(1, q) e^{q\tau} dq = \int_0^{\infty} \frac{e^{-q\tau} dq}{\{[K_1'(q) + \lambda q K_1(q)]^2 + \pi^2 [I_1'(q) + \lambda q I_1(q)]^2\} q^2}$$

Подставляя (5.10) в (4.1), найдем

$$\varepsilon(\theta, \tau) = \frac{\lambda}{2\pi i} \sin \theta \int_M q F(1, q) e^{q\tau} dq \quad (5.11)$$

или

$$\varepsilon(\theta, \tau) = \lambda \sin \theta \left\{ e^{-q_1(\lambda)\tau} [A(\lambda) \cos \{q_2(\lambda)\tau\} + B(\lambda) \sin \{q_2(\lambda)\tau\}] - \int_L q F(1, q) e^{q\tau} dq \right\}$$

2°. Обобщим предыдущие результаты на случай, когда

$$\Delta p = \Delta p_0 Q(\xi) \quad (5.12)$$

т. е. когда перепад давления  $\Delta p$  за фронтом ударной волны есть заданная функция безразмерного расстояния  $\xi$ .

Пользуясь линейностью задачи, применяем принцип суперпозиции, построив решение при  $Q(\xi) = \delta(\xi)$ , где  $\delta(\xi)$  — функция Дирака, т. е. в случае предельно короткой падающей волны.

Решение, рассмотренное в п. 1, построено для ступенчатой функции  $Q(\xi)$ . Но так как  $p$ , а следовательно, и  $\varepsilon$  терпят разрыв при  $\tau = 0$ , то легко видеть, что при  $Q(\xi) = \delta(\xi)$

$$\varepsilon_\delta(\theta, \tau) = \varepsilon(\theta, \tau) \delta(\tau) + \frac{\partial \varepsilon(\theta, \tau)}{\partial \tau}$$

где  $\varepsilon(\theta, \tau)$  — решение для ступенчатой функции  $Q(\xi)$ . Отсюда следует, что в случае произвольной функции  $Q(\xi)$

$$\varepsilon_Q(\theta, \tau) = Q(0) \varepsilon(\theta, \tau) + \int_0^\tau Q_\xi'(\tau - \xi) \varepsilon(\theta, \xi) d\xi \quad (5.13)$$

Например, при  $Q(\xi) = 1 - \mu\xi$

$$\varepsilon_\mu(\theta, \tau) = \varepsilon(\theta, \tau) - \mu \int_0^\tau \varepsilon(\theta, \xi) d\xi \quad (5.14)$$

где  $\varepsilon(\theta, \tau)$  определяется из уравнений (4.7) — (4.9) или при больших  $\tau$  — из уравнения (5.11).

§ 6. Решение задачи для круга, когда зависимость смещения контура от давления на контуре нелинейная. Дадим обобщение результатов § 4 на случай, когда

$$p(\theta, \tau) = \Psi[\varepsilon(\theta, \tau)] \quad (6.1)$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи.

1°. Пусть давление на фронте ударной волны линейно зависит от времени, т. е.

$$\Delta p_{\varphi} = 1 - \mu\tau \quad (6.2)$$

Тогда, используя интеграл Дюгамеля или формулу (5.14), получим

$$\varepsilon_{\mu}(\theta, \tau) = \varepsilon(\theta, \tau) - \mu \int_0^{\tau} \varepsilon(\theta, \tau) d\tau \quad (6.3)$$

при условии (6.2), где  $\varepsilon(\theta, \tau)$  определяется из уравнений (4.7), (4.9) или из (5.11).

2°. Пусть давление  $p = U(\tau)$  приложено внезапно к контуру  $C$ . Тогда радиально-симметричное смещение  $\varepsilon_1(\tau)$  получается из решения соответствующей задачи об обтекании полого полубесконечного цилиндра, сечение которого нормально оси  $\tau$ . Нетрудно видеть, что

$$\varepsilon_1(\theta, \tau) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_M \frac{K_0(rq) e^{q\tau}}{K_0'(q) + \lambda q K_0(q)} \frac{dq}{q} \quad (6.4)$$

Перейдем к случаю (6.1), считая, что  $(d\Psi/d\varepsilon)_{\varepsilon=0} = k^{-1}$ , и положим

$$\Psi_0(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon) - k^{-1}\varepsilon \quad (6.5)$$

Тогда, следуя Барону [7], получим:

$$\varepsilon_{\Psi}(\theta, \tau) = \varepsilon_{\mu}(\theta, \tau) - \int_0^{\tau} \frac{\partial \Psi_0[\varepsilon_{\Psi}(\theta, \xi)]}{\partial \xi} \xi_1(\tau - \xi) d\xi \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) является нелинейным интегральным уравнением относительно  $\varepsilon_{\Psi}(\theta, \tau)$  и может быть решено численно по известным значениям  $\varepsilon_{\mu}$  и  $\xi_1$  и по заданному виду функции  $\Psi(\varepsilon)$ .

Найденное решение  $\varepsilon_{\Psi}$  из (6.6) можно обобщить на случай (5.12). Как и в п. 2° § 2, получим:

$$\varepsilon_{Q\Psi}(\theta, \tau) = Q(0)\varepsilon_{\Psi} + \int_0^{\tau} Q_{\xi}'(\tau - \xi)\varepsilon_{\Psi}(\theta, \xi) d\xi \quad (6.7)$$

Таким образом, задачу можно решить в общем виде для (6.1), (5.12).

*Примечание.* Из решения (5.8) при больших  $\tau$  можно показать, что деформируемость контуров может качественно изменить картину дифракции слабых ударных волн на этих контурах.

Поступила 14 V 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L u n d l o f f Н. Ф. On aerodynamics of blasts. Adv. Appl. Mech., 1953, vol. 3 (имеется русск. пер. Проблемы механики, Сб. статей под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана, 1955).
2. Х р и с т и а н о в и ч С. А., Р ы ж о в О. С. О коротких волнах. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
3. Г у р с а Э. Курс математического анализа. Т. 3., ч. 1, ГТТИ, 1933.
4. W a r d G. H. The approximate external and internal flow past a quasi-cylindrical tube moving at supersonic speeds. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, vol. 1.
5. Г о л у б и н с к и й А. И. Об обтекании крыла сверхзвукового самолета перемещающейся ударной волной. Инж. ж., 1961, т. 1, № 2.
6. Б о б р о в Г. Е. К теории кольцевого крыла в сверхзвуковом потоке. Изв. вузов, Авиационная техника, 1959, № 3.
7. В а г о н М. L. Response of nonlinearly supported cylindrical boundaries to shock waves. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, p. 1.