

## РАСЧЕТ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ В ЛОКАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Г. С. Голицын

(Москва)

В работе вычисляются различные статистические характеристики во всем интервале равновесия локально изотропной турбулентности на основе модели со спектральной плотностью, затухающей для больших волновых чисел как гауссовская функция. Найденные характеристики сравниваются, где это возможно, с результатами, полученными на основе других моделей турбулентности: модели с постоянной асимметрией и в некоторых местах модели Гейзенберга. В работе определены структурные функции скорости, продольный третий момент скорости и коэффициент асимметрии, структурная функция и спектр давления, корреляционные функции вихря и ускорения. Большинство полученных характеристик не очень сильно зависит от выбора модели турбулентности.

Теория локально изотропной турбулентности А. Н. Колмогорова объяснила ряд закономерностей турбулентного потока при очень больших числах Рейнольдса. В этой теории турбулентный поток рассматривается как совокупность вихрей различного масштаба. Самые крупные вихри, характеризующиеся так называемым внешним масштабом турбулентности  $L$ , возникают из-за неустойчивости всего осредненного потока. Масштаб  $L$  порядка расстояния, на котором существенно меняется скорость среднего течения. Движение вихрей с масштабами, много меньшими  $L$ , может считаться однородным и изотропным, а также квазистационарным. Квазистационарность означает, что изменение статистических характеристик движения в рассматриваемом интервале вихрей происходит за времена, много большие, чем характерные периоды данных вихрей. Этот интервал масштабов движения характеризуется двумя параметрами: средней диссипацией кинетической энергии вихрей на единицу массы за единицу времени  $\langle \varepsilon \rangle$  и кинематической вязкостью  $\nu$ . Угловые скобки означают статистическое осреднение. Вязкость в этом интервале масштабов существенна только для самых мелких вихрей, собственное число Рейнольдса для которых порядка единицы. В более крупных вихрях диссипация пренебрежима.

Из параметров  $\langle \varepsilon \rangle$  и  $\nu$  можно составить единственную комбинацию с размерностью длины  $\lambda_0 = (\nu^3 / \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$ . Длина  $\lambda_0$ , называемая внутренним масштабом турбулентности, характеризует интервал вихрей, в которых происходит вязкая диссипация энергии кинетической турбулентности. В интервале масштабов  $\lambda_0 \ll r \ll L$  движение определяется лишь параметром  $\langle \varepsilon \rangle$ , интенсивностью потока энергии, передаваемой без заметных потерь от более крупных вихрей к более мелким. Влияние вязкости здесь несущественно, поэтому этот интервал масштабов называется инерционным. Весь интервал масштабов  $r \ll L$  получил название интервала равновесия.

Теория локально изотропной турбулентности, ограничиваясь изучением лишь интервала равновесия, не требует знания средних величин, которых зачастую нельзя определить из эксперимента. Так, для атмосферной турбулентности определение средних значений затруднительно из-за чрезвычайно широкого спектра метеорологических параметров. В теории А. Н. Колмогорова фигурируют не корреляционные функции для самих величин, а корреляционные функции для разностей изучаемых величин — структурные функции. Если же средние величины известны, то оба описания становятся эквивалентными, и переход от структурных функций к корреляционным не представляет труда.

1. Теория Колмогорова дает вид структурных функций скорости

$$D_{ij}(r) = \langle [u_i(M) - u_i(M')] [u_j(M) - u_j(M')] \rangle \quad (1.1)$$

в двух различных областях масштабов:  $r \ll \lambda_0$  и  $\lambda_0 \ll r \ll L$ , где  $r$  — расстояние между точками наблюдения  $M$  и  $M'$ . В силу однородности и изотропности турбулентности в интервале равновесия структурный тензор (1.1) можно представить в виде

$$D_{ij}(r) = [D_{ll}(r) - D_{nn}(r)] r_i r_j / r^2 + D_{nn}(r) \delta_{ij} \quad (1.2)$$

где  $D_{ll}(r)$  и  $D_{nn}(r)$  — продольная и поперечная структурные функции скорости составленные из разностей продольных и поперечных компонент скорости. Согласно Колмогорову [1,2]

$$D_{ll}(r) = \frac{1}{15} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\nu} r^2, \quad D_{nn}(r) = \frac{2}{15} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\nu} r^2 \quad (r \ll \lambda_0) \quad (1.3)$$

$$D_{ll}(r) = \frac{3}{4} C^2 \langle \varepsilon \rangle r^{2/3}, \quad D_{nn}(r) = C^2 \langle \varepsilon \rangle r^{2/3} \quad (\lambda_0 \ll r \ll L) \quad (1.4)$$

Здесь  $C$  — постоянная порядка единицы, определяемая из экспериментов. Точный вид структурных функций при  $r$  порядка  $\lambda_0$  неизвестен. Согласно теории подобия здесь, как и во всем интервале равновесия, безразмерные функции расстояния должны зависеть лишь от отношения  $r/\lambda_0$ . Вопрос о виде структурных функций при  $r \sim \lambda_0$  эквивалентен определению спектра флуктуаций скорости для больших волновых чисел  $k \gg (\langle \varepsilon \rangle / \nu^3)^{1/4}$ . Тензор  $D_{ij}(r)$  связан со спектральным тензором соотношением

$$D_{ij}(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{2\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \quad (1.5)$$

Тензор  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  определяется единственной скалярной функцией спектральной плотности энергии турбулентности  $E(k)$ .

Первая попытка определения вида структурных функций скорости во всем интервале равновесия принадлежит А. М. Обухову [3], который использовал гипотезу о постоянстве во всем интервале равновесия коэффициента асимметрии  $S$  распределения вероятностей для продольной компоненты разности скоростей в двух точках потока

$$S = D_{lll}(r) / [D_{ll}(r)]^{3/2} = \text{const}, \quad D_{lll}(r) = \langle [v_l(M) - v_l(M')]^3 \rangle \quad (1.6)$$

В инерционном интервале, а также при  $r \ll \lambda_0$  коэффициент асимметрии действительно постоянен [2]. Данные Таунсенда [4] свидетельствуют о его приблизительном постоянстве и в промежуточном интервале масштабов. Однако было показано [5], что получаемая при этом структурная функция скорости хотя и обладает нужными асимптотическими свойствами при  $r \ll \lambda_0$  и  $\lambda_0 \ll r \ll L$ , но ей соответствует спектральная плотность энергии, имеющая отрицательные участки в некоторых областях волнового пространства. Поэтому удобнее искать интерполяционные формулы для структурных функций, заранее исходя из каких-то положительных выражений для спектра. Недавно Е. А. Новиков [6] предпринял попытку определить вид спектра скорости в области очень больших волновых чисел  $k \gg (\langle \varepsilon \rangle / \nu^3)^{1/4}$ . Им была получена асимптотическая формула

$$E(k) = C_1 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} (k\lambda_0)^{2m-4/3} \exp[-a(k\lambda_0)^2] \quad \left( \begin{array}{l} 0.5 \leq m < 1 \\ \sqrt{3} \leq a < 2 \end{array} \right) \quad (1.7)$$

где  $C_1$  — постоянная порядка единицы.

Если принять дополнительную гипотезу, что  $m = 2/3$ , то выражение (1.7) для  $k\lambda_0 \ll 1$  формально переходит в хорошо известный «закон  $5/3$ » для спектра. Если далее будем считать при этом, что формула (1.8) справедлива во всем интервале равновесия, то можно определить параметры  $a$  и  $C_1$ . Оказывается, что  $C_1 = a^{2/3} / \Gamma(2/3)$ , а параметр  $a \approx 1.76$ . Однако при получении последнего значения, как и верхнего предела для  $a$ , приходится менять местами алгебраические операции и операции осреднения, что может привести к заметной ошибке [6].

В данной работе будем во всем интервале равновесия использовать в виде рабочей модели спектральную плотность вида

$$E(k) = \frac{a^{2/3}}{\Gamma(2/3)} \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \exp[-a(k\lambda_0)^2] \quad (1.8)$$

оправдываясь тем, что в работе [6] эта модель находит известное обоснование. Спектральная плотность такого типа уже применялась ранее [5]<sup>1</sup>.

Параметр  $a$  можно связать со значением постоянной  $C$  для структурных функций и со значением коэффициента асимметрии в инерционном интервале. Как известно, связь между  $C$  и  $S$ , установленная Колмогоровым [2], имеет следующий вид:

$$C^2 = \frac{4}{3} \left( -\frac{5}{4S} \right)^{3/2} \quad (1.9)$$

Отсюда и согласно результатам п. 2

$$a = 2 \left[ \frac{11\Gamma(11/6)}{12\sqrt{\pi}} \right]^{3/2} C^3 \approx 0.685 C^3 \quad (1.10)$$

$$a = \frac{64}{15\sqrt{3}} \left[ \frac{11\Gamma(11/6)}{12\sqrt{\pi}} \right]^{3/2} \frac{1}{|S|} \approx \frac{0.843}{|S|} \quad (1.11)$$

Значения постоянной  $C$  и асимметрии  $S$ , полученные из экспериментов, имеются в ряде работ. Эти данные сведены в таблице справа.

Здесь сведены данные самых разнообразных экспериментов по измерению характеристик турбулентности в аэродинамических трубах [2,4,7], в приземном слое атмосферы [8,9], в океане [10]. Разброс данных довольно заметный, и в настоящее время трудно указать какое-то вполне определенное значение асимметрии  $S$  или коэффициента  $C$ . Поэтому на формулу (1.9) следует смотреть как на удобную рабочую формулу со свободным параметром  $a$ .

Случайные поля, определяемые производными скорости, в рамках теории А. Н. Колмогорова можно определить как просто однородные и изотропные случайные поля во всех масштабах. Для них уже можно определить средний квадрат и корреляционную функцию. Типичным примером может служить поле вихря. Однако для таких полей теория локально изотропной турбулентности позволяет определить вид корреляционной функции лишь в инерционном интервале. Полное определение вида корреляционных функций требует знания вида структурных функций скорости во всем интервале равновесия.

Случайные поля, определяемые квадратами производных скорости, такие, как поле лапласиана давления, также будут однородными и изотропными полями во всех масштабах. Их корреляционные функции будут определяться четвертыми моментами скорости, для связи которых со вторыми моментами (структурными функциями) требуется знание законов распределения вероятностей разности компонент скорости в двух точках потока. Обычно здесь используется гипотеза М. Д. Миллионщикова [11] о том, что четвертые моменты выражаются через известные вторые так же, как при нормальном законе распределения вероятностей. В этом случае из соображений подобия в инерционном интервале для корреляционных функций можно точно указать лишь характер зависимости от расстояния (показатель степени). Однако, так как здесь гипотеза М. Д. Миллионщикова вносит погрешность [12] не более 10—15%, то результаты, получаемые при ее помощи, могут быть во многих случаях вполне удовлетвори-

Таблица

$C$	$S$	$a$	Ссылка
1.41	0.44	1.92	[2] *
1.46 ± 0.04	0.39 ± 0.03	2.16 ± 0.17	[4]
1.30 ± 0.17	0.55 ± 0.22	1.53 ± 0.61	[8]
1.42 ± 0.09	0.43 ± 0.08	1.96 ± 0.36	[9]
1.58 ± 0.04	0.31 ± 0.02	2.72 ± 0.13	[10]
1.37	0.47	1.76	[6]

\* Значения параметров вычислены по экспериментальным данным [7].

<sup>1</sup> В этой работе дано следующее интуитивное обоснование: уравнение Навье — Стокса параболического типа, поэтому пульсации скорости, генерируемые крупномасштабными вихрями, будут сглаживаться в мелких масштабах гауссовской функцией (или близкой к ней).

тельными. Точность результатов, получаемых при помощи этой гипотезы для масштабов  $r \lesssim \lambda_0$ , остается невыясненной.

Формула (1.8), распространенная на весь интервал равновесия, лежит в основе всех дальнейших расчетов. Сравнение с результатами, полученными на основе модели турбулентности с постоянной асимметрией, показывает, что целый ряд характеристик турбулентного потока не очень сильно зависит от выбора модели турбулентности.

В некоторых местах, где это не требовало большого численного счета, наряду с моделью турбулентности с постоянной асимметрией использовалась модель Гейзенберга [13]. В этой модели спектральная плотность

$$E(k) = \left( \frac{8 \langle \varepsilon \rangle}{9\gamma} \right)^{2/3} k^{-5/3} \left( 1 + \frac{8\nu^3 k^4}{3\gamma^2 \langle \varepsilon \rangle} \right)^{-4/3} \quad (1.12)$$

убывает для больших  $k$  сравнительно медленно, как  $k^{-7}$ . Постоянную  $\gamma$  можно связать с рассматриваемым параметром  $a$ . Действительно, сравнивая (1.9) и (1.12) в инерционном интервале, находим

$$\gamma = \frac{8\Gamma^{3/2}(2/3)}{9a} \approx \frac{1.41}{a} \quad (1.13)$$

Спектральные плотности (1.8) и (1.12) представляют собой крайние в некотором смысле случаи очень быстрых и очень медленно убывающих спектров.

Так как параметр  $a$  предполагается свободным, удобно представить результаты расчетов в форме, от него не зависящей. Перейдем к безразмерным координатам

$$\kappa = \sqrt{a} \lambda_0 k = \lambda_0' k, \quad x = r / \lambda_0' \quad (1.14)$$

Введем также безразмерный структурный тензор скорости в виде

$$a \langle \varepsilon \rangle \nu^{1/2} d_{ij}(r / \lambda_0') = D_{ij}(r) \quad (1.15)$$

и безразмерную спектральную плотность кинетической энергии

$$E(\kappa) = \frac{\kappa^{-5/3}}{\Gamma(2/3)} \exp(-\kappa^2) \quad (1.16)$$

2. Из соотношения (1.5), дающего связь между структурным и спектральным тензорами, используя условия изотропии, можно получить следующие формулы [14] для безразмерных продольной и поперечной структурных функций и свертки тензора  $d_{ij}(x)$ :

$$d_{11}(x) = 4 \int_0^\infty \left( \frac{1}{3} + \frac{\cos \kappa x}{\kappa^2 x^2} - \frac{\sin \kappa x}{\kappa^3 x^3} \right) E(\kappa) d\kappa \quad (2.1)$$

$$d_{nn}(x) = 2 \int_0^\infty \left( \frac{2}{3} - \frac{\sin \kappa x}{\kappa x} - \frac{\cos \kappa x}{\kappa^2 x^2} + \frac{\sin \kappa x}{\kappa^3 x^3} \right) E(\kappa) d\kappa \quad (2.2)$$

$$d(x) = d_{11}(x) + 2d_{nn}(x) = 4 \int_0^\infty \left( 1 - \frac{\sin \kappa x}{\kappa x} \right) E(\kappa) d\kappa \quad (2.3)$$

Для расчета этих функций воспользуемся известными интегралами [15]

$$\int_0^\infty k^\lambda e^{-k^2} \cos ky dk = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) M\left(\frac{\lambda+1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{y^2}{4}\right) \quad (2.4)$$

$$\int_0^\infty k^{\lambda-1} e^{-k^2} \sin ky dk = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) y M\left(\frac{\lambda+1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{y^2}{4}\right) \quad (2.5)$$

где  $M(\alpha, \gamma, z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция. Используя рекуррентные формулы, связывающие вырожденные гипергеометрические функции, отличающиеся на целые числа в значениях параметров  $\alpha$  и  $\gamma$

(см., например, [16], а также приложение), можно получить формулы:

$$d_{II}(x) = 2 \left[ M \left( -\frac{1}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{x^2}{4} \right) - 1 \right] \quad (2.6)$$

$$d_{nn}(x) = 3M \left( -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4} \right) - M \left( -\frac{1}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{x^2}{4} \right) - 2 \quad (2.7)$$

$$d(x) = 6 \left[ M \left( -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4} \right) - 1 \right] \quad (2.8)$$

Отсюда для  $x \ll 1$ , используя известные разложения функции  $M(\alpha, \gamma, z)$ , имеем

$$d_{II}(x) = \frac{x^2}{15} - \frac{x^4}{630} + \dots, \quad d_{nn}(x) = \frac{2x^2}{15} - \frac{x^4}{210} + \dots, \quad d(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{90} + \dots \quad (2.9)$$

Очевидно, что главные члены разложений совпадают с формулами (1.3).

Для  $x \gg 1$ , согласно [16]

$$d_{II}(x) = \frac{9 \sqrt{\pi} (x/2)^{3/2}}{11\Gamma(11/6)} \left( 1 + \frac{22}{9x^2} - \dots \right) - 2 \approx 0.967x^{3/2} \left( 1 + \frac{22}{9x^2} - \dots \right) - 2 \quad (2.10)$$

$$d_{nn}(x) = \frac{12 \sqrt{\pi} (x/2)^{3/2}}{11\Gamma(11/6)} \left( 1 + \frac{11}{18x^2} - \dots \right) - 2 \approx 1.29x^{3/2} \left( 1 + \frac{11}{18x^2} - \dots \right) - 2 \quad (2.11)$$

$$d(x) = \frac{3 \sqrt{\pi} (x/2)^{3/2}}{\Gamma(11/6)} \left( 1 + \frac{11}{9x^2} - \dots \right) - 6 \approx 3.56x^{3/2} \left( 1 + \frac{11}{9x^2} - \dots \right) - 6 \quad (2.12)$$

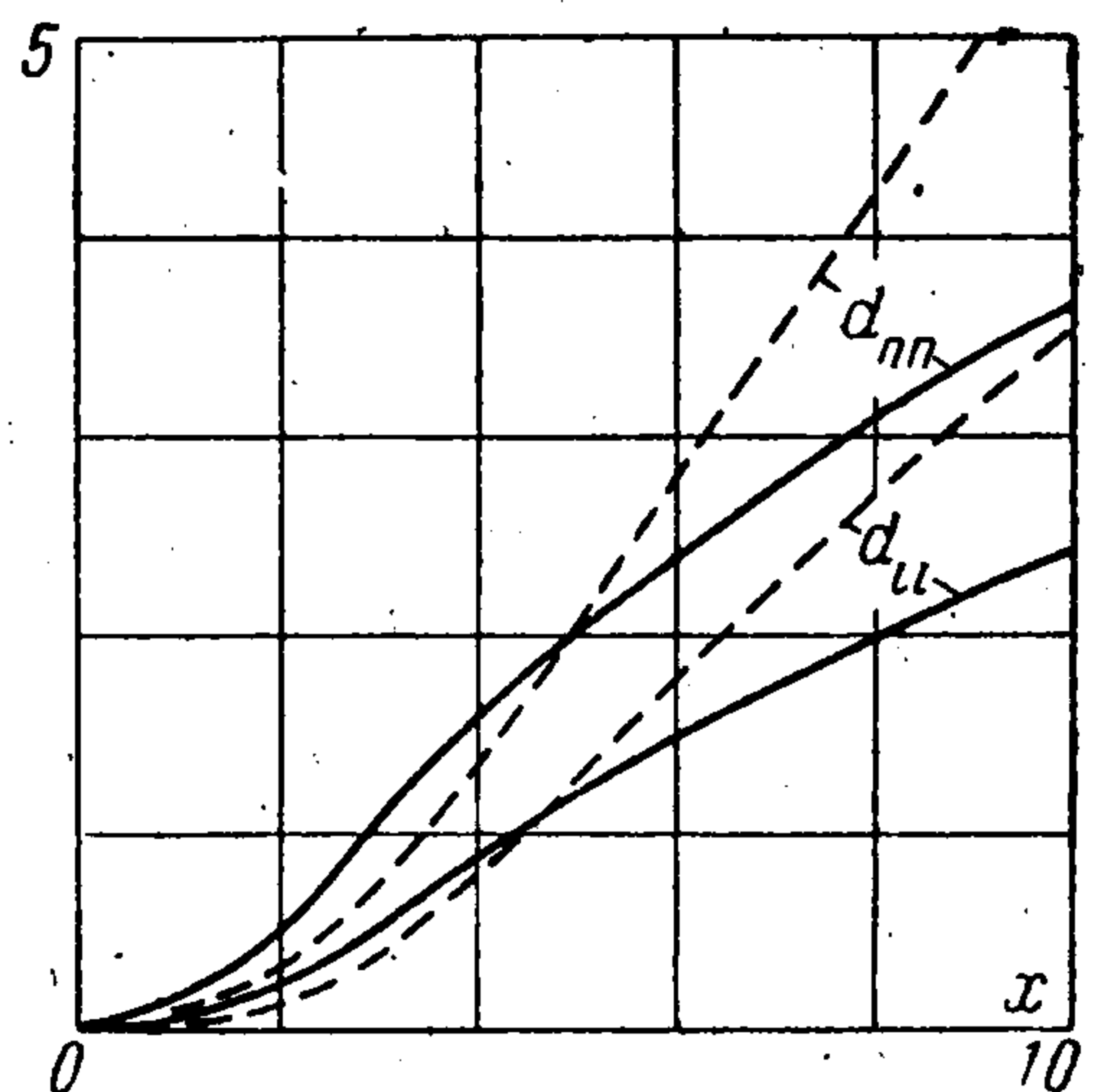
В данной модели характерно наличие постоянного слагаемого в асимптотике для больших расстояний, чего нет, например, в модели с постоянной асимметрией [3,17].

Сравнивая формулы (2.11) и (1.4), получим формулу (1.10); отсюда, используя (1.9), получим (1.11). Продольная и поперечная структурные функции изображены на фиг. 1 сплошными линиями. Метод расчета гипергеометрических функций дан в приложении. Пунктирными линиями изображены структурные функции, соответствующие гипотезе о постоянстве асимметрии [3,17]. Благодаря связи параметра  $a$  с асимметрией, пересчет результатов [3,17] для сравнения с нашими получается простым преобразованием масштабов

$$x = 5.48x_s, \quad d_{ij}(x) = 4.08d_{ij}^s(x_s)$$

Главные члены разложений при  $x \ll 1$  и  $x \gg 1$  для структурных функций в обеих моделях будут одинаковы, однако асимптотика при  $x \gg 1$  структурных функций для  $S = \text{const}$  в данном масштабе будет достигаться за пределами фигуры. При  $x \gg 1$  структурные функции двух моделей будут различаться на постоянную величину, равную двум.

В модели Гейзенберга аналитического вида для структурных функций во всем интервале равновесия получить не удастся, поэтому ограничимся нахождением второго члена разложения в нуле структурных функций (первый член, очевидно, универсален для всех изотропных моделей). Для этого в (2.1) и (2.2) разложим подынтегральные скобки в ряд Тейлора с точностью до членов порядка  $x^4$  включительно.



Фиг. 1

Интегрируя получаемые выражения с  $E(k)$  в виде (1.12), в рассматриваемых переменных получим

$$d_{II}(x) = \frac{x^2}{15} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(11/6) \Gamma^{3/2}(5/3)}{2100 \Gamma(4/3)} x^4 + \dots = \frac{x^2}{15} - 0.000763 x^4 + \dots$$

$$d_{III}(x) = \frac{2x^2}{15} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(11/6) \Gamma^{3/2}(5/3)}{700 \Gamma(4/3)} x^4 + \dots = \frac{2x^2}{15} - 0.00229 x^4 + \dots$$

3. Уравнение А. Н. Колмогорова [2] позволяет рассчитать третий момент пульсаций скорости, если известен второй момент. В безразмерных переменных (1.12) и (1.14) это уравнение принимает вид

$$ad_{III}(x) = -\frac{4}{5}x + 6d_{II}'(x) \quad (3.1)$$

где безразмерный третий момент введен при помощи соотношения

$$D_{III}(r) = a^{3/2} (\langle \varepsilon \rangle)^{1/2} d_{III}(r/\lambda_0') \quad (3.2)$$

Из (3.1) и формулы (2.6) получаем

$$ad_{III}(x) = -\frac{4}{5}x \left[ 1 - M\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{2}, -\frac{x^2}{4}\right) \right] \quad (3.3)$$

Асимптотические разложения здесь имеют следующий вид:

$$ad_{III}(x) = -\frac{4x^3}{105} + \frac{2x^5}{567} - \dots \quad (x \ll 1) \quad (3.4)$$

$$ad_{III}(x) = -\frac{4x}{5} + \frac{9\sqrt{\pi} \cdot 2^{3/2}}{11\Gamma(11/6)} x^{-1/2} - \dots = -0.8x + 3.38x^{-1/2} - \dots \quad (x \gg 1) \quad (3.5)$$

Отсюда видно, что продольный третий момент довольно медленно приближается к своему асимптотическому значению  $-0.8x$ . Результаты вычислений третьего момента даны на фиг. 2.

Из (3.3) и (2.6) получим следующее выражение для асимметрии:

$$S(r) = \frac{D_{III}(r)}{[D_{II}(r)]^{3/2}} = -\frac{0.8x [1 - M(2/3, 7/2, -x^2/4)]}{2^{3/2} a [M(-1/3, 5/2, -x^2/4) - 1]^{3/2}} \quad (3.6)$$

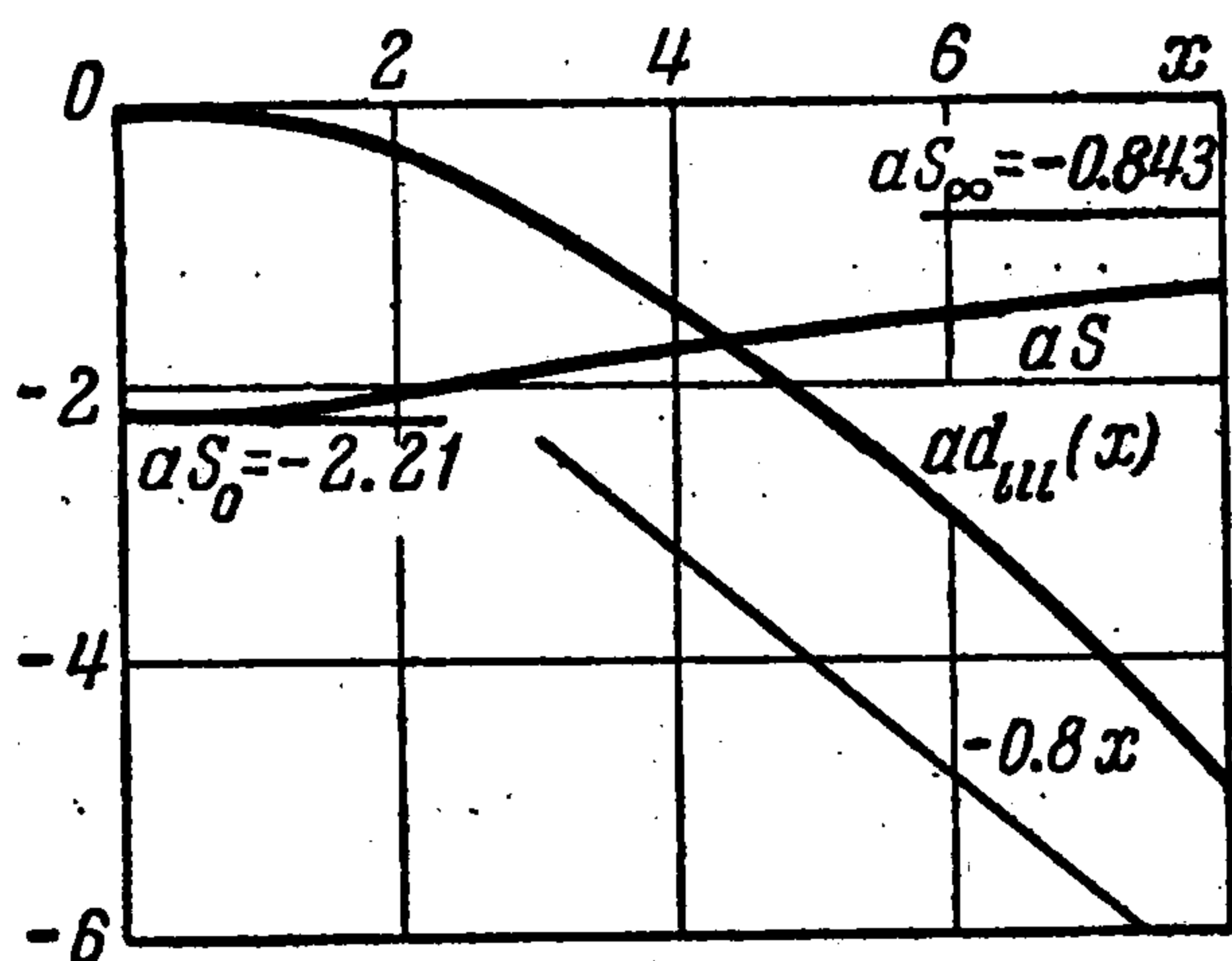
Отсюда могут быть получены следующие разложения:

$$aS(x) = -\frac{4\sqrt{15}}{7} \left( 1 - \frac{43x^2}{756} + \dots \right) = 2.21 (1 - 0.057x^2 + \dots) \quad (x \ll 1) \quad (3.7)$$

$$aS(x) = -0.843 (1 + 3.10x^{-1/2} - 4.85x^{-3/2} + \dots) \quad (x \gg 1) \quad (3.8)$$

Ход асимметрии (точнее, величины  $aS(x)$ ) также изображен на фиг. 2. Отметим, что для рассматриваемого случая асимметрия в нуле в 2.6 раза больше, чем в инерционном интервале.

Значения асимметрии в нуле для моделей турбулентности Гейзенберга, Коважного и Обухова приведены в статье Рида [18]. В наших переменных эти величины соответственно равны 2.14, 7.20, 3.62. Значения асимметрии в модели Гейзенберга очень близко к значению, получаемому в модели со спектром, убывающим с гауссовской функцией. Два последних значения заметно больше двух первых. Последнее обстоятельство обусловлено, может быть, тем фактом, что спектры Коважного и А. М. Обухова обращаются в нуль, начиная с некоторого волнового числа.

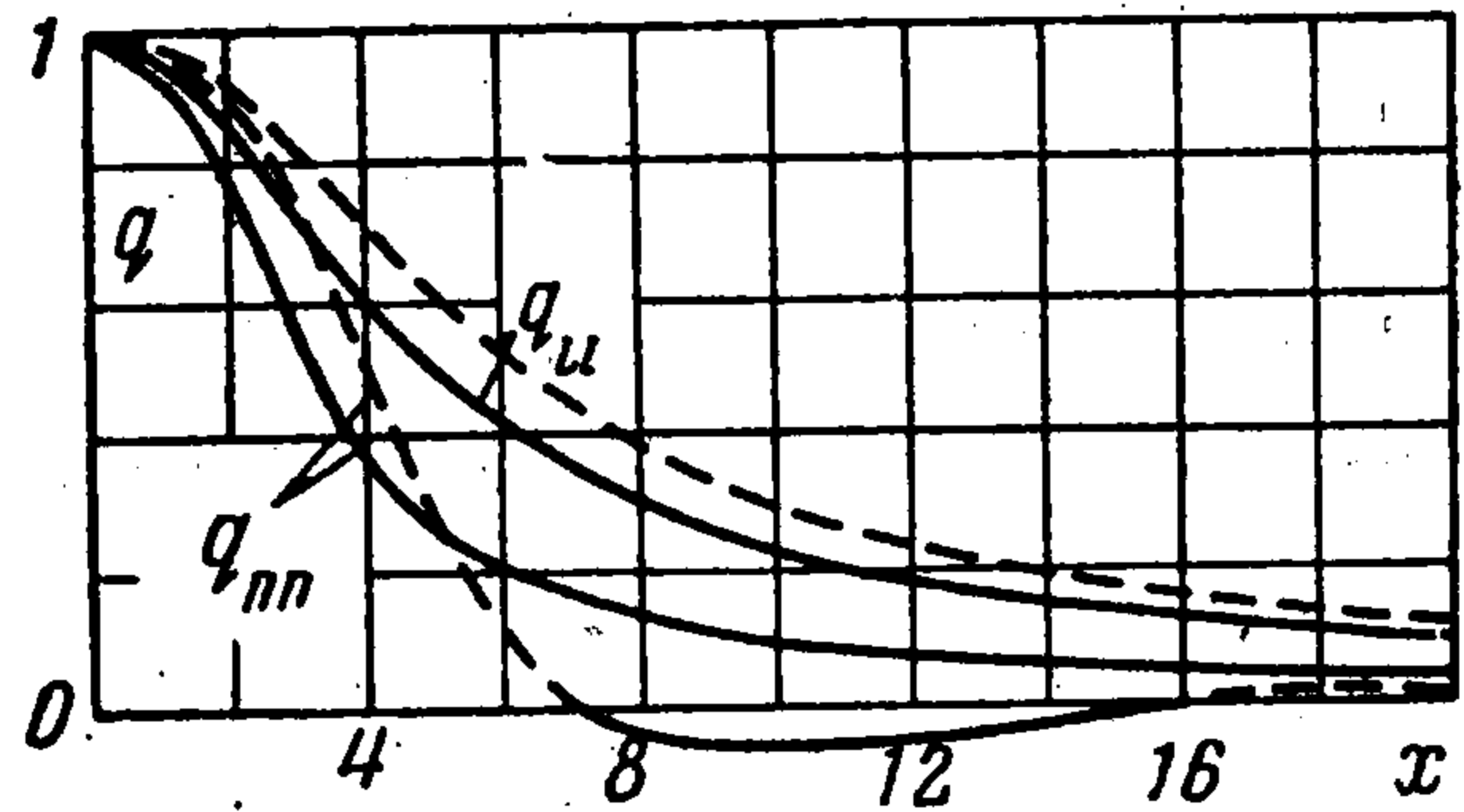


Фиг. 2

В заключение этого раздела остановимся на одном обстоятельстве, для которого Рид не нашел объяснения, когда сравнивал значение асимметрии в нуле со значением, фигурирующим в выражении для спектра в инерционном интервале. Напомним, что асимметрия в теории Колмогорова определяется выражением (1.7) и именно это выражение при  $\lambda_0 \ll r \ll L$  и входит в формулу для спектра в инерционном интервале. Асимметрия в нуле определяется как

$$S_0 = \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^3 \right\rangle \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle^{-3/2}$$

Легко видеть, что выражение (1.7) переходит в последнее, только если  $r \rightarrow 0$ . Асимметрия А. Н. Колмогорова вовсе не должна быть такой же в инерционном интервале, как и вблизи нуля.



Фиг. 3

4. Расчет корреляционных функций вихря можно провести путем соответствующего дифференцирования структурных функций скорости. Как известно, корреляция компонент вектора вихря  $\omega = \text{rot } v$  выражается через корреляцию скоростей следующим образом [13]:

$$\langle \omega_i(M) \omega_j(M') \rangle = Q_{ij}(r) = -\delta_{ij} \Delta R_{kk}(r) + \frac{\partial^2 R_{kk}(r)}{\partial r_i \partial r_j} + \Delta R_{ij}(r) \quad (4.1)$$

где  $R_{ij}(r)$  — корреляционный тензор скоростей. В терминах структурных функций скорости отсюда можно получить следующие выражения для продольной и поперечной корреляционных функций вихря

$$Q_{ii}(r) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{ii}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial D_{nn}(r)}{\partial r} \quad (4.2)$$

$$Q_{nn}(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 D_{ii}(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 D_{nn}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{ii}(r)}{\partial r} \right] \quad (4.3)$$

Пользуясь формулами (1.3) и (1.4), можно определить поведение корреляционных функций вихря вблизи нуля и в инерционном интервале. Для  $r \ll \lambda_0$  получаем

$$Q_{ii} = \frac{7}{15} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{v}, \quad Q_{nn} = \frac{4}{15} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{v}, \quad Q_{kk} = Q_{ii} + 2Q_{nn} = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{v} \quad (4.4)$$

В инерционном интервале

$$Q_{ii} = \frac{17}{12} C^2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} r^{-4/3}, \quad Q_{nn} = \frac{1}{18} C^2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} r^{-4/3}, \quad Q_{kk} = \frac{55}{36} C^2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} r^{-4/3} \quad (4.5)$$

Пользуясь результатами расчетов, выполненных для работы [5], можно построить нормированные корреляционные функции вихря  $q_{ii}$  и  $q_{nn}$  для модели турбулентности с постоянной асимметрией. Эти функции в масштабе, используемом в данной работе, даны пунктиром на фиг. 3. Сплошной чертой изображены корреляционные функции для модели со спектральной плотностью (1.8). Для этих функций могут быть получены следующие формулы:

$$q_{ii}(x) = M \left( \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{x^2}{4} \right), \quad q_{nn}(x) = \frac{3}{2} M \left( \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4} \right) - \frac{1}{2} M \left( \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{x^2}{4} \right) \quad (4.6)$$

Асимптотические разложения здесь таковы:

$$\begin{aligned} q_{ii}(x) &= 1 - 0.0688x^2 + \dots, & q_{nn}(x) &= 1 - 0.133x^2 + \dots & (x \ll 1) & \quad (4.7) \\ q_{ii}(x) &= 3.78x^{-4/3} (1 - 2.22x^{-2} + \dots), & q_{nn}(x) &= 1.26x^{-4/3} (1 + 4.34x^{-2} - \dots) & (x \gg 1) \end{aligned}$$

Бросается в глаза разница между поперечной корреляционной функцией  $q_{nn}(x)$  и аналогичной функцией, найденной при гипотезе постоянства асимметрии. Последняя имеет отрицательный участок, в то время как первая всюду положительна. В полностью однородной турбулентности  $q_{nn}$  действительно должна иметь отрицательный участок, что следует из соленоидальности вектора  $\omega$ . В самом деле, из условия  $\text{div } \omega = 0$  вытекает равенство

$$q_{nn}(x) = q_{ll}(x) + \frac{1}{2} x q'_{ll}(x) = \frac{1}{2x} (x^2 q_{ll})' \quad (4.8)$$

Отсюда, интегрируя по частям и предполагая достаточно быстрое убывание  $q_{ll}(x)$  на бесконечности, можно получить соотношение

$$\int_0^{\infty} x^m q_{nn}(x) dx = \frac{1-m}{2} \int_0^{\infty} x^m q_{ll}(x) dx \quad (4.9)$$

При  $m = 1$

$$\int_0^{\infty} x q_{nn}(x) dx = 0 \quad (4.10)$$

т. е. функция  $q_{nn}$  должна иметь отрицательные участки. Однако для выполнения условия (4.1) необходимо, чтобы функция  $q_{ll}(x)$  убывала быстрее, чем  $x^{-2}$ . Здесь эта функция вычислена только в инерционном интервале, где убывание происходит по закону  $x^{-5/3}$ , так что равенство (4.1) в данном случае не имеет места. Поэтому следует считать случайным тот факт, что при гипотезе постоянства асимметрии поперечная корреляционная функция имеет отрицательный участок. Аналогичное замечание можно высказать и о продольной корреляционной функции ускорений (см. далее п. 7), вычисленной в работе [17] при той же гипотезе  $S = \text{const}$ , которая также имеет отрицательный участок. Там убывание корреляционных функций еще слабее и происходит как  $x^{-2/3}$ . Отрицательные участки, если они существуют, должны наблюдаться в масштабах, больших внешнего масштаба турбулентности, т. е. вне инерционного интервала где, по-видимому, корреляция действительно убывает достаточно быстро.

## 5. Метод расчета структурной функции давления

$$\Pi(r) = \langle [p(M) - p(M')]^2 \rangle \quad (5.1)$$

дан А. М. Обуховым и А. М. Ягломом [17]. При этом используется уравнение

$$\Delta p = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (5.2)$$

получаемое из уравнения Навье — Стокса и условия несжимаемости.

Умножая уравнение (5.2), взятое в точке  $M$ , на аналогичное уравнение в точке  $M'$ , используя условия однородности и гипотезу М. Д. Миллионщикова, для функции  $\Pi(r)$  можно получить уравнение

$$\Delta^2 \Pi(r) = \frac{d^4 \Pi}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3 \Pi}{dr^3} = -\rho^2 \frac{\partial^2 D_{ik}}{\partial r_j \partial r_l} \frac{\partial^2 D_{jl}}{\partial r_i \partial r_k} = -\rho^2 \Phi(r) \quad (5.3)$$

Введем безразмерные функции  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$

$$\Pi(r) = a^2 \rho^2 \langle \varepsilon \rangle \nu \pi(r/\lambda_0'), \quad \Phi(r) = a^2 \langle \varepsilon \rangle \nu^{-2} \varphi(r/\lambda_0') \quad (5.4)$$

Тогда, согласно [17],

$$\pi(x) = \frac{1}{6} \int_0^x \left( -3z^2 + 3xz + \frac{1}{x} z^3 \right) \varphi(z) dz + \frac{x^2}{6} \int_x^{\infty} z \varphi(z) dz \quad (5.5)$$

Функция  $\varphi(x)$  может быть записана в виде

$$\varphi(x) = \frac{6}{x^2} d_{ii}'^2(x) + \frac{4}{x} d_{ii}'(x) d''(x) + 4d_{ii}''^2(x) \quad (5.6)$$

В рассматриваемом случае вычисления дают

$$\varphi(x) = \frac{8}{3} \left( \frac{7}{15} M_{7/2}^2 + \frac{2}{3} M_{5/2}^2 + \frac{2}{5} M_{3/2} M_{7/2} - \frac{4}{3} M_{3/2} M_{7/2} \right) \quad (5.7)$$

Здесь и далее для краткости будет использовано обозначение

$$M_\gamma = M\left(\frac{2}{3}, \gamma, -\frac{x^2}{4}\right) \quad (5.8)$$

Функция  $\varphi(x)$ , многократно используемая далее, фактически представляет собой корреляцию лапласианов давления. Ее асимптотики таковы:

$$\varphi(x) = \frac{8}{15} \left( 1 - \frac{2}{9} x^2 + \dots \right) \quad (x \ll 1) \quad (5.9)$$

$$\varphi(x) = \frac{7\pi \cdot 2^{5/3}}{121\Gamma^2(11/6)} x^{-9/3} \approx 0.652x^{-9/3} \quad (x \gg 1) \quad (5.10)$$

Таким образом, функция  $\varphi(x)$  убывает довольно быстро, но остается все время положительной. Нормированная корреляционная функция лапласианов давления  $\varphi_1(x) = (15/8)\varphi(x)$  изображена на фиг. 4.

Безразмерная структурная функция давления  $\pi(x)$  при  $x \ll 1$  вследствие сглаживающего действия вязкости должна быть пропорциональна  $x^2$ ; из (5.5) и (5.9) имеем коэффициент пропорциональности

$$b = \frac{1}{6} \int_0^\infty z\varphi(z) dz \quad (5.11)$$

Этот интервал был подсчитан численно и оказался равным 0.294. Для вычисления следующих членов разложения  $\pi(x)$  необходимо использовать асимптотику  $\varphi(x)$  при  $x \ll 1$ . При помощи (5.10) получаем

$$\pi(x) = 0.294x^2 - \frac{1}{225}x^4 + \dots \quad (5.12)$$

Отметим, что второй член разложения функции  $\Pi(r)$  при  $r \ll \lambda_0$  в рамках гипотезы М. Д. Миллионщикова не зависит от модели турбулентности и определяется только локальной изотропностью потока.

Знание первого члена разложения  $\pi(x)$  при малых  $x$  позволяет найти средний квадрат градиента турбулентных пульсаций давления

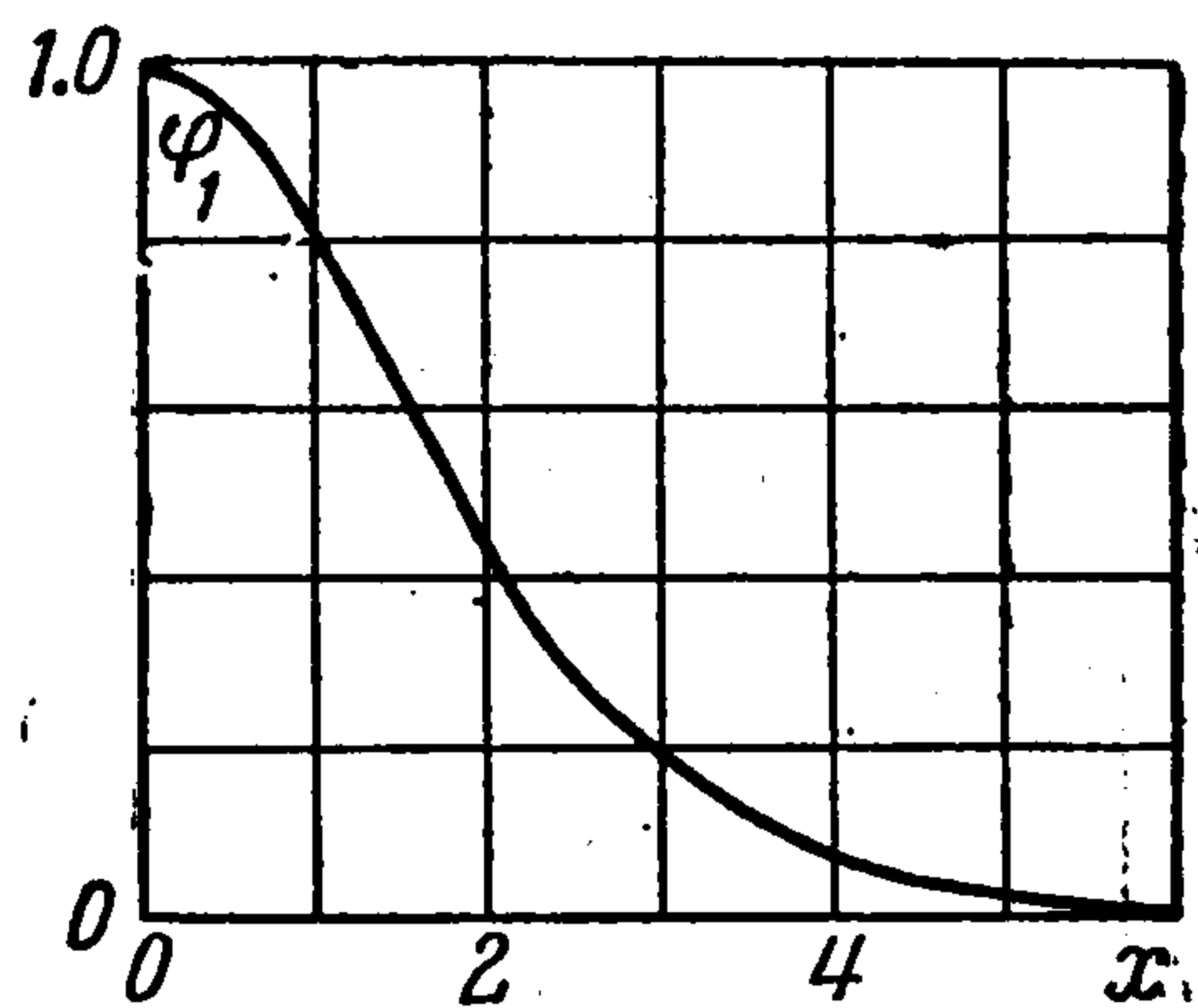
$$\langle (\nabla p)^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial r_i^2} = \frac{1}{2} \Delta \Pi(0) \quad (5.13)$$

Вычисления дают

$$\langle (\nabla p)^2 \rangle = 0.882a\rho^2 \langle \varepsilon \rangle^{3/2} \nu^{-1/2} = B\rho^2 \langle \varepsilon \rangle^{3/2} \nu^{-1/2} \quad (5.14)$$

В работе [19] значение коэффициента  $B$  для среднего квадрата градиента давления равно  $1.1/|S|$  или, если учесть (1.11), то  $B = 1.3a$ . Этот коэффициент оценивался также Бэтчелором [20], который использовал функцию вида

$$D_{ii}(y) = \frac{y^2/15}{[1 + (15C_b)^{-3/2} y^2]^{2/3}} \quad \left( C_b = \frac{3}{4} C^2 \right)$$



Фиг. 4

В своем расчете Бэтчелор полагал  $C_b = 2.0$  ( $C = 1.63$ ) и получил, что его коэффициент  $B = 1.3$ . Нетрудно видеть, что коэффициент  $B$  содержит  $C_b$  в виде множителя  $C_b^{3/2}$ , т. е. его результат после некоторых вычислений можно представить в виде  $B = 0.31C^3 = 1.36a$ . Согласно [21] для спектра Гейзенберга  $B = 1.4\gamma^{-1} = 1.0a$ . Таким образом, четыре различные модели турбулентности дают для среднего квадрата градиента давления величины, различающиеся в пределах порядка 50%.

Обратимся к вычислению структурной функции давления для больших значений  $x$ . При этом, как показал А. М. Обухов [22], функция  $\Pi(r) = \rho^2 D_{ii}^2(r)$  или, согласно (2.12), в данном случае  $\pi(x) = 0.940x^{3/2}$ . Но, как обнаружено в [17], в разложении  $\pi(x)$  для больших значений аргумента имеется член, пропорциональный  $x$ . Удобнее, однако, сначала рассчитать численно функцию  $\pi(x)$  для промежуточных  $x$ , а уже потом, используя эти результаты, определить асимптотику при  $x \gg 1$ . Численное интегрирование было проведено для промежутка  $0.4 \leq x \leq 8$ . При вычислении асимптотики для  $x \gg 1$  надо учесть, что в формуле (5.5) первый интеграл с ростом  $x$  безгранично растет. Поэтому он разбивался на две части: от 0 до 8, где он интегрировался численно, и от 8 до  $\infty$ , где он интегрировался при помощи асимптотического разложения функции  $\varphi(x)$ . После сложения этих двух частей и выполнения остальных необходимых действий получим

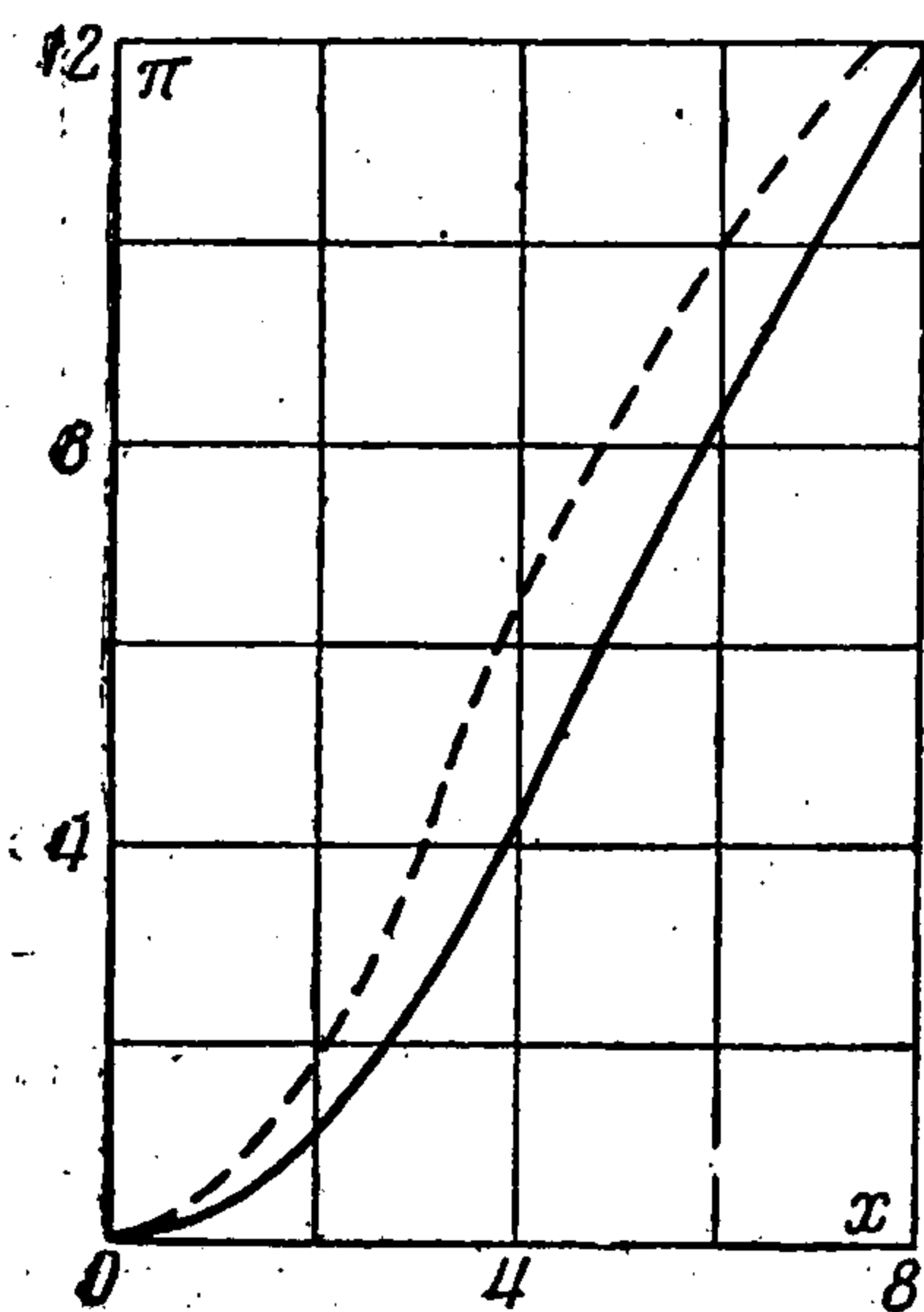
$$\pi(x) = 0.940x^{3/2} - 0.107x - 2.35 + 4.33x^{-1/2} - 1.83x^{-3/2} + \dots \quad (5.15)$$

Структурная функция давления изображена на фиг. 5. Пунктиром для сравнения нанесена структурная функция, рассчитанная в работе [17] при гипотезе постоянства асимметрии: у этой функции несколько другие асимптотики.

В масштабе, используемом в данной работе, они имеют следующий вид:

$$\pi(x) = 0.415x^2, \quad (x \leq 1), \quad \pi(x) = 0.940x^{3/2} - 3.08x + 14.4 \quad (x \geq 1) \quad (5.16)$$

6. Для ряда приложений необходимо знать спектр флуктуаций давления в турбулентном потоке. В частности, если домножить спектр



Фиг. 5

давления на  $k^4$ , то с точностью до некоторого численного множителя получим спектр флуктуаций диссипации [23]. При вычислении спектра давления удобно исходить из уравнения

$$\begin{aligned} \langle \Delta p(M) \Delta p(M') \rangle &= \Delta^2 \langle pp' \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 D_{ik}}{\partial r_j \partial r_l} \frac{\partial^2 D_{jl}}{\partial r_i \partial r_k} = \frac{1}{2} \rho^2 \Phi(r) \end{aligned} \quad (6.1)$$

получаемого из (5.3). Производя преобразование Фурье этого уравнения и осредняя по углам, получим следующую формулу:

$$k^4 F_p(k) = \frac{\rho^2}{4\pi^2 k} \int_0^\infty r \Phi(r) \sin kr \, dr \quad (6.2)$$

где  $F_p(k)$  — трехмерная спектральная плотность давления. Введем безразмерную функцию  $g(x)$ .

$$4\pi^2 k^5 F_p(k) = a^3 \rho^2 \langle \varepsilon \rangle^{1/2} \nu^{-1/2} g(k\lambda_0') \quad (6.3)$$

Тогда из (6.2), следует, что

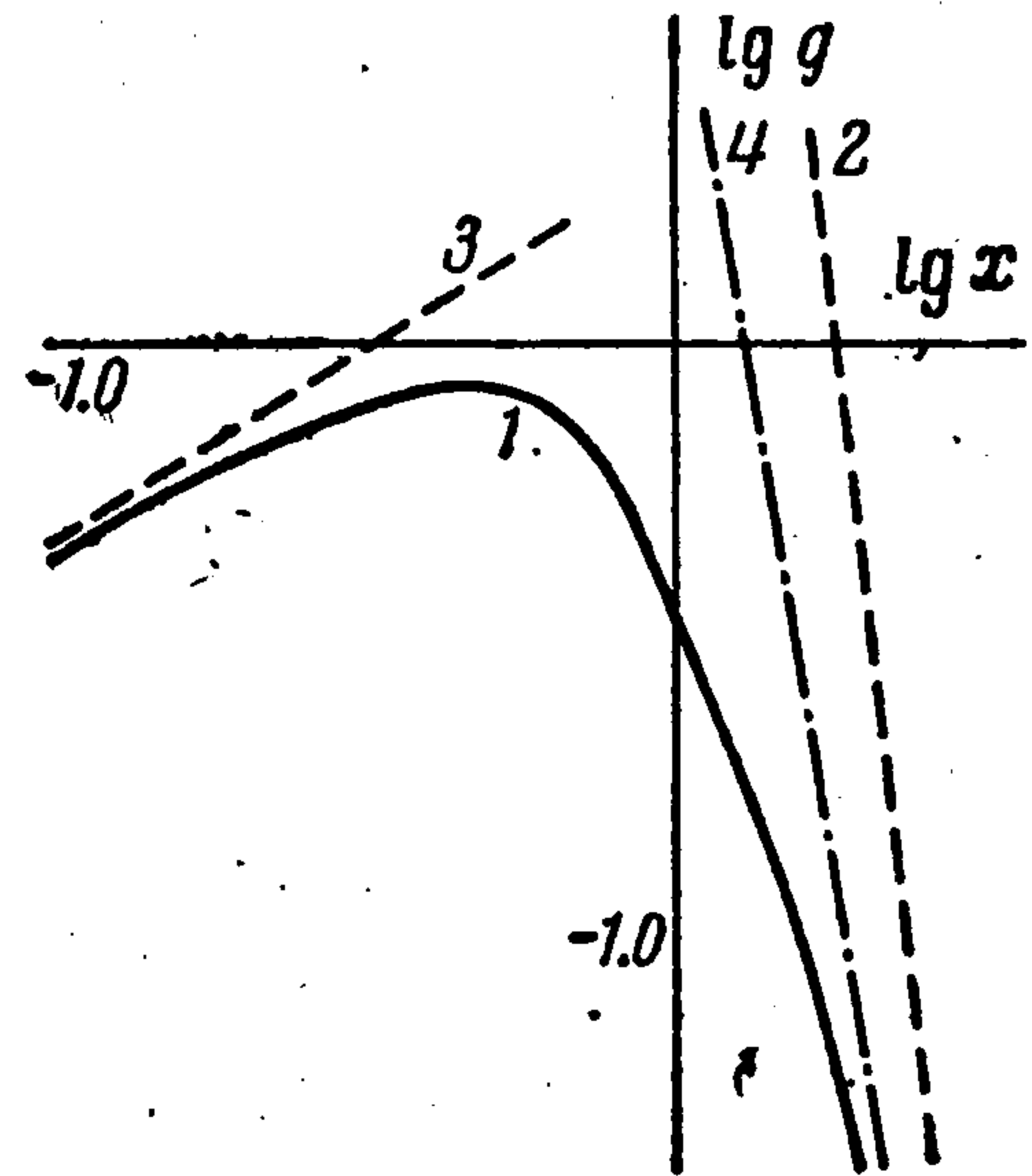
$$g(x) = \int_0^\infty x \varphi(x) \sin \kappa x \, dx \quad (6.4)$$

Пользуясь этим выражением нетрудно найти асимптотику функции  $g(x)$  для  $x \ll 1$ , т. е. в инерционном интервале. Легко видеть, что эта асимптотика определяется поведением  $\varphi(x)$  при  $x \gg 1$ . Несложные вычисления дают

$$g(x) = \frac{63\pi \sqrt{3}\Gamma(4/3)}{2^{1/2}121\Gamma^2(11/6)} x^{3/2} \approx 2.26x^{3/2} \quad (6.5)$$

При вычислении спектра давления для больших волновых чисел удобно исходить из другого представления, которое можно получить из уравнения (6.1), используя теорему о свертке [20]

$$F_p(k) = \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} E(|\mathbf{k}'|) E(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \frac{\sin^4 \theta}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^4} dk' \quad (6.6)$$



Фиг. 6

Здесь  $E(|\mathbf{k}|)$  — спектральная плотность пульсаций скорости,  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . Переходя к безразмерным переменным, вводя сферические координаты и интегрируя по углу  $\varphi$ , получим с учетом (1.8)

$$F_p'(x) = \frac{1}{4\pi\Gamma^2(2/3)} \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta \int_0^\infty \frac{x'^{1/2} \exp[-x'^2 - (x^2 - 2xx' \cos \theta + x'^2)]}{(x^2 - 2xx' \cos \theta + x'^2)^{3/2}} dx' \quad (6.7)$$

Асимптотическое разложение этого интеграла для  $x \gg 1$  оказывается равным

$$F_p'(x) = \frac{256 \cdot 2^{5/2} (1 + \operatorname{erf} 1)}{9e^2 \Gamma^2(5/3)} x^{-3/2} e^{-1/2x^2} (1 + O(x^{-2})) \approx 15.5 x^{-3/2} e^{-1/2x^2} \quad (6.8)$$

Для значений  $x \sim 1$  спектр был рассчитан численным интегрированием выражения (6.4). На фиг. 6 изображена функция  $g(x)$ , пропорциональная спектру давления. Пунктиром даны асимптота (6.5) и асимптота, соответствующая (6.8)

$$g(x) = 612x^{-3/2} e^{-1/2x^2} \quad (6.9)$$

Для сравнения с этим результатом вычислим асимптотику для больших волновых чисел спектра давления в модели Гейзенберга. Подставляя в (6.7) спектральную плотность (1.12), после вычислений получим

$$F_p'(x) = \frac{27\Gamma^3(5/3)}{40\pi} x^{-11} (1 + O(x^{-1})) \approx 0.158x^{-11}, \quad g(x) = 4\pi^2 x^5 F_p'(x) \approx 6.24x^{-6} \quad (6.10)$$

Последняя асимптота нанесена на фиг. 6 штрих-пунктирной линией.

7. Статистическая структура поля ускорений частицы жидкости в турбулентном потоке была подробно изучена в работе [17]. Воспользуемся основными результатами выполненного там расчета для рассматриваемого случая и определим средний квадрат ускорения и корреляционные функции. В силу уравнений движения компоненты ускорения частицы жидкости равны

$$w_i = \frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i$$

Для среднего квадрата ускорения можно получить формулу

$$\langle w_i^2 \rangle = \frac{1}{2\rho^2} \Delta \Pi(0) - \frac{v^2}{2} \Delta^2 D(0) \quad (7.1)$$

Используя (5.9) и (2.11), получим

$$\langle w_i^2 \rangle = (0.882a + 2/3a) \langle \varepsilon \rangle^{3/2} v^{-1/2}. \quad (7.2)$$

Для асимптотической формулы (1.8) теоретически  $a \geq \sqrt{3}$  (что, в общем, оправдывается экспериментами (см. таблицу на стр. 69)), поэтому средний квадрат ускорения в турбулентном потоке определяется в основном флуктуирующими градиентами давления, А. М. Яглом [19] получил следующее выражение при гипотезе  $S = \text{const}$ :

$$\langle w_i^2 \rangle = \left( \frac{1.1}{|S|} + 0.3 |S| \right) \langle \varepsilon \rangle^{3/2} v^{-1/2} = \left( 1.3a + \frac{0.25}{a} \right) \langle \varepsilon \rangle^{3/2} v^{-1/2} \quad (7.3)$$

Характерно, что в выражении (7.2) силы трения играют относительно большую роль, чем в (7.3). Так, при  $|S| = 0.47$  ( $a = 1.76$ ) силы вязкого трения составляют около 20% и около 5% соответственно от общей величины среднего квадрата ускорений. Для рассматриваемой модели турбулентности оценки величин ускорений в различных условиях, приведенные в [17, 19], несколько снижаются, но общие выводы о возможности больших значений турбулентных ускорений остаются в силе.

Расчет корреляционных функций ускорения проведем с учетом действия вязкости, так как оно может быть заметным по сравнению со случаем модели турбулентности с постоянной асимметрией [17], где практически рассчитывалась корреляция градиентов давления. Однако из уравнения для корреляционных функций ускорения не удастся исключить параметр  $a$ , оно не инвариантно относительно  $a$ , что видно уже и на примере среднего квадрата ускорения (7.2). Поэтому проведем отдельно расчет для корреляции градиентов давления и для корреляции, обусловленной вязкими силами. Полная корреляция ускорений будет суммой этих двух.

В работе [17] для продольной и поперечной корреляционных функций ускорения получены следующие выражения:

$$A_{ii}(r) = \frac{1}{2\rho^2} \Pi''(r) + v^2 \left( \frac{4}{r^3} D_{ii}' - \frac{4}{r^2} D_{ii}'' - \frac{4}{r} D_{ii}''' + \frac{1}{2} D_{ii}^{IV} \right) = A_{ii}^p + A_{ii}^v \quad (7.4)$$

$$A_{nn}(r) = \frac{1}{2\rho^2 r} \Pi'(r) - v^2 \left( \frac{2}{r^3} D_{nn}' - \frac{2}{r^2} D_{nn}'' + \frac{4}{r} D_{nn}''' + \frac{3}{4} D_{nn}^{IV} + \frac{1}{4} D^{IV} \right) = A_{nn}^p + A_{nn}^v \quad (7.5)$$

Вычислим сначала корреляцию, возникающую от действия вязкости. Введем безразмерные функции

$$\alpha_{ii}^v(r/\lambda_0') = av^{1/2} \langle \varepsilon \rangle^{-3/2} A_{ii}^v(r), \quad \alpha_{nn}^v(r/\lambda_0') = av^{1/2} \langle \varepsilon \rangle^{-3/2} A_{nn}^v(r) \quad (7.6)$$

Функции  $\alpha_{ii}^v(x)$  и  $\alpha_{nn}^v(x)$  могут быть получены дифференцированием выражений (2.6) и (2.8). Используя рекуррентные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций, получим следующие формулы (см. обозначение (5.8)):

$$\alpha_{ii}^v(x) = \frac{1}{2} M_{3/2} - \frac{5}{18} M_{5/2}, \quad \alpha_{nn}^v(x) = \frac{1}{4} M_{1/2} - \frac{1}{6} M_{3/2} + \frac{5}{36} M_{5/2} \quad (7.7)$$

Для больших  $x$

$$\alpha_{ii}^v(x) = \frac{5 \cdot 2^{1/2} \sqrt{\pi}}{9\Gamma(11/6)} x^{-10/3} \approx 1.48 x^{-10/3}, \quad \alpha_{nn}^v(x) = \frac{5 \cdot 2^{1/2} \sqrt{\pi}}{3\Gamma(11/6)} x^{-10/3} \approx 4.44 x^{-10/3} \quad (7.8)$$

Для расчета корреляции градиентов давления введем функции

$$\alpha_{ll}^p(r/\lambda_0') = a^{-1} v^{1/2} \langle \varepsilon \rangle^{-3/2} A_{ll}^p(r), \quad \alpha_{nn}^p(r/\lambda_0') = a^{-1} v^{1/2} \langle \varepsilon \rangle^{-3/2} A_{nn}^p(r) \quad (7.9)$$

Согласно [17]

$$\alpha_{ll}^p(x) = \frac{1}{2} \pi''(x) = \frac{1}{6x^3} \int_0^x z^4 \varphi(z) dz + \frac{1}{6} \int_x^\infty z \varphi(z) dz$$

$$\alpha_{nn}^p(x) = \frac{1}{2x} \pi'(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \left( z^2 - \frac{z^4}{x^2} \right) \varphi(z) dz + \frac{1}{6} \int_x^\infty z \varphi(z) dz$$

где функция  $\varphi(z)$  определяется равенствами (5.6) и (5.7). Используя свойства функций  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$ , можно получить разложения

$$\alpha_{ll}^p(x) = 0.294 - \frac{2}{75} x^2 + \dots, \quad \alpha_{nn}^p(x) = 0.294 - \frac{2}{225} x^2 + \dots \quad (x \ll 1) \quad (7.10)$$

$$\alpha_{ll}^p(x) \approx 0.164 x^{-2/3}, \quad \alpha_{nn}^p(x) \approx 0.493 x^{-2/3} \quad (x \gg 1) \quad (7.11)$$

Таким образом, корреляция градиентов давления убывает гораздо медленнее корреляции, обусловленной вязкостью. Последняя может играть роль лишь для малых расстояний.

Для промежуточных значений  $x$  производилось численное интегрирование. На фиг. 7 изображены нормированные корреляционные функции градиентов давления. Для сравнения пунктиром нанесены соответствующие корреляционные функции, рассчитанные в работе [17] при гипотезе постоянства асимметрии. Относительно различного характера поведения продольных корреляционных функций было сказано в конце п. 4.

Аналогичным образом можно изучить статистическую структуру случайного поля диссипации кинетической энергии, что было сделано автором ранее [22].

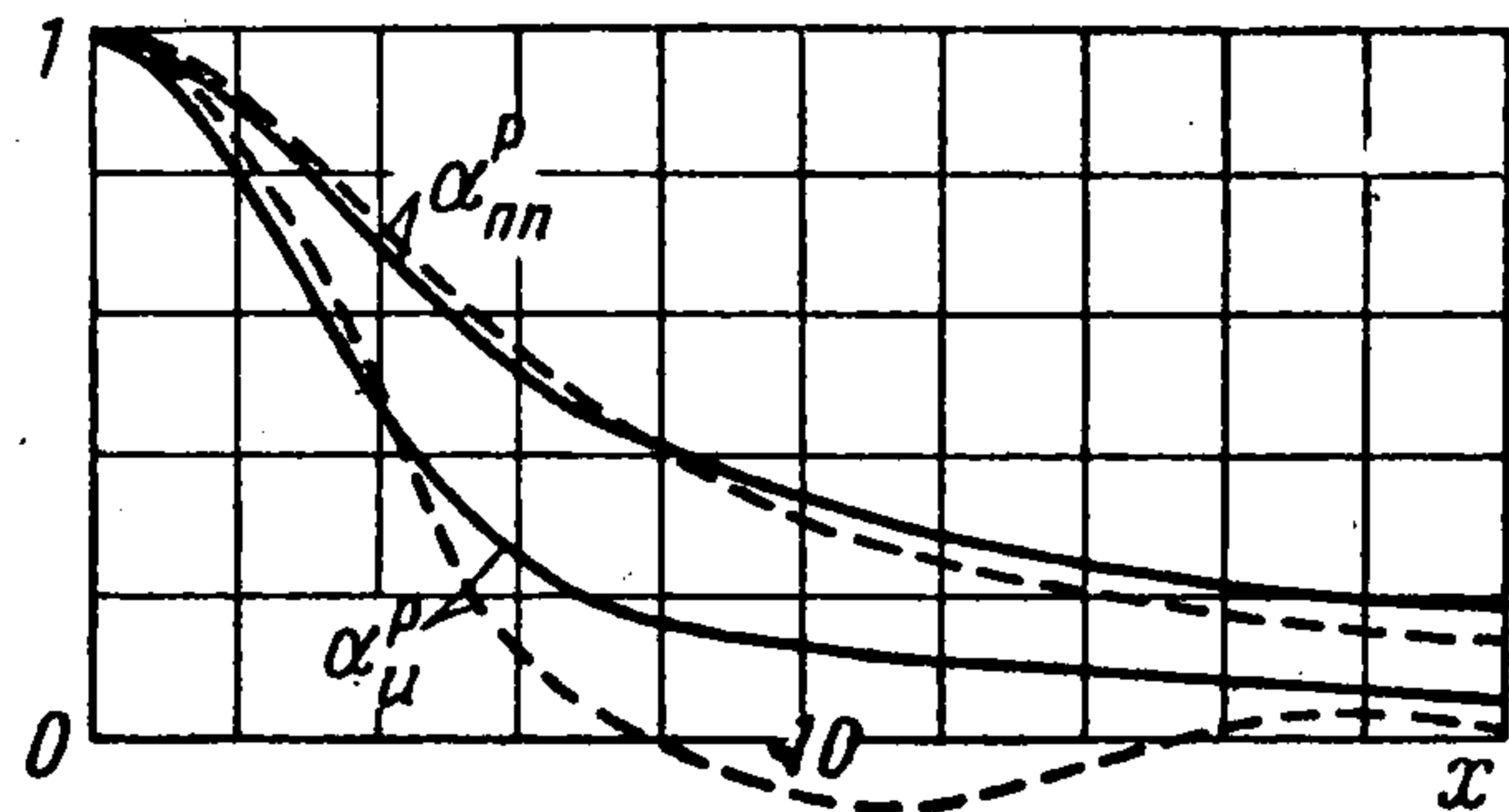
**Приложение.** Спектру, убывающему, как  $\exp(-k^2)$  для больших волновых чисел, соответствуют структурные функции, выражающиеся через вырожденные гипергеометрические функции  $M(\alpha, \gamma, -1/4x^2)$  с различными значениями параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ . Функция  $M(\alpha, \gamma, z)$  определяется бесконечным рядом, сходящимся для любых значений  $z$ . Однако при  $z \geq 1$  этот ряд сходится медленно. Для  $z \gg 1$  можно пользоваться асимптотическим разложением [16]. Для встречающихся здесь значений параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  функция  $M(\alpha, \gamma, z)$  не затабулирована, поэтому были проведены специальные вычисления. Для этого использовались формулы (2.4) и (2.5), именно, подсчитывались численно интегралы

$$\int_0^\infty k^{1/2} e^{-k^2} \cos kx dk = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4}\right) \quad (1)$$

$$\int_0^\infty k^{-3/2} e^{-k^2} \sin kx dk = \frac{1}{2} x \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) M\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4}\right) \quad (2)$$

для значений  $x$  от 1.0 до 4.0. Для меньших и больших значений аргумента использовались соответствующие ряды.

Все остальные необходимые функции  $M(\alpha, \gamma, -1/4x^2)$  отличаются от рассчитанных двух на целые числа в значениях параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  и могут быть найдены по



Фиг. 7

рекуррентным соотношениям, связывающим такие функции [16]. Заметим, что во всех изданиях книги [16] последняя из рекуррентных формул приведена с опечаткой. Должно быть

$$z(\gamma - \alpha) M(\alpha, \gamma + 1, z) = \gamma(z + \gamma - 1) M(\alpha, \gamma, z) + \gamma(\gamma - 1) M(\alpha, \gamma - 1, z) \quad (3)$$

Приведем также еще одно рекуррентное соотношение, очень часто употреблявшееся при расчетах

$$\alpha z M(\alpha + 1, \gamma + 2, z) = \gamma(\gamma + 1) [M(\alpha, \gamma, z) - M(\alpha, \gamma + 1, z)] \quad (4)$$

которое проверяется непосредственной подстановкой ряда для вырожденной гипергеометрической функции.

В заключение приношу благодарность А. М. Обухову за дискуссии и советы в процессе выполнения работы, а также А. С. Монину и А. М. Яглому, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд замечаний.

Поступила 22 VI 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4.
2. Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности. ДАН СССР, 1941, т. 32, № 4.
3. Обухов А. М. Локальная структура атмосферной турбулентности. ДАН СССР, 1949, т. 67, № 4.
4. Townsend A. A. Experimental evidence for the theory of local isotropy. Proc. Camb. Phil. Soc., 1948, vol. 44, № 4.
5. Голицын Г. С. О структуре турбулентности в области малых масштабов. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
6. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2.
7. D r y d e n H. L., S c h u b a u e r G. B., M o s k W. C., S k r a m s t a d H. K. Measurements of intensity and scale of wind tunnel turbulence and their relations to the critical Reynolds number of spheres. Tech. Rep. NASA, 1937, № 581.
8. Гурвич А. С. Экспериментальное исследование частотных спектров и функций распределения вероятностей вертикальной компоненты скорости ветра. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1960, № 7.
9. Гурвич А. С. Измерение коэффициента асимметрии распределения вероятностей разности скоростей в приземном слое атмосферы. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5.
10. Grant H. L., Moilliet A., Stewart R. W. Turbulence spectra from a tidal currents. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, № 2.
11. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1941, № 4, 5.
12. Uberoi M. S. Quadruple velocity correlations and pressure fluctuations in isotropic turbulence. J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, № 2.
13. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. ИЛ, 1955.
14. Монин А. С. Структура атмосферной турбулентности. Теория вероятности и ее применение, 1958, т. III, вып. 3.
15. Oberhettinger F. Tabellen zur Fourier Transformations. Springer-Verlag, 1957.
16. Янке Б. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.
17. Обухов А. М., Яглом А. М. Микроструктура турбулентного потока. ПММ, 1951, т. XV, вып. 1.
18. Reid W. H. One dimensional equilibrium spectra in isotropic turbulence. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, № 1.
19. Яглом А. М. О поле ускорений в турбулентном потоке. ДАН СССР, 1949, т. 67, № 5.
20. Batchelor G. K. Pressure fluctuations in isotropic turbulence, Proc. Camb. Phil. Soc., 1951, vol. 47, № 3.
21. Chandrasekhar S. On Heisenberg's elementary theory of turbulence. Proc. Roy. Soc., 1949, A200, № 1.
22. Обухов А. М. Пульсации давления в турбулентном потоке. ДАН СССР, 1949, т. 66, № 1.
23. Голицын Г. С. Флуктуации диссипации в локально изотропном турбулентном потоке. ДАН СССР, 1962, т. 144, № 3.