

## О МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КЛИНА

М. Д. Ладыженский

(Москва)

В предположении, что область возмущенного потока между телом и ударной волной является узкой, рассмотрено гиперзвуковое обтекание клина, изнутри которого возбуждается магнитное поле. В работе [1] было получено решение для случая, когда вектор магнитного поля направлен перпендикулярно поверхности тела. Ниже предполагается, что магнитное поле направлено под произвольным углом к обтекаемой поверхности. В отличие от решения [1] в рассматриваемом случае давление на клине отличается от вычисленного по формуле Ньютона. В результате вместо отрыва [1] (обращение скорости в некоторой точке поверхности в нуль) при определенных условиях возможна кавитация, т. е. давление в некоторой точке под действием магнитного поля может стать равным нулю.

Найдены положения точек отрыва и кавитации, зависящие от угла раствора клина и угла наклона вектора магнитного поля.

1. Воспользуемся системой уравнений магнитной гидродинамики, записанных в криволинейных ортогональных координатах  $x$  (длина дуги контура тела) и  $y$  (расстояние по нормали к телу). Газ предполагается идеальным, совершенным, имеющим конечную проводимость в области за ударной волной. Предполагая, что область возмущенного потока между телом и ударной волной достаточно узкая [2, 3], т. е.  $\varepsilon = (\kappa - 1) / (\kappa + 1) \ll 1$  (где  $\kappa$  — показатель адиабаты), пренебрегаем в уравнениях величинами порядка  $\varepsilon$  по сравнению с единицей. В результате получим

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{qu \sin^2 \alpha}{\rho}, & \frac{\partial p}{\partial y} &= qu \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\rho u^2}{R} \\ u^2 + \frac{p}{\varepsilon \rho} &= 1, & \frac{\partial \rho u r^v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r^v}{\partial y} &= 0, & q &= \frac{\sigma L H^2}{c^2 \rho_\infty U_\infty^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Приняты следующие обозначения:  $u$  и  $v$  — составляющие скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\alpha$  — угол между касательной к контуру тела и вектором  $\mathbf{H}$  магнитного поля;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность  $\sigma$  — удельная электропроводность (в дальнейшем предполагается  $\sigma = \text{const}$  в сжатом слое и  $\sigma = 0$  в невозмущенном потоке);  $c$  — скорость света в вакууме;  $\rho_\infty$  и  $U_\infty$  — соответственно плотность и скорость невозмущенного потока;  $R$  — радиус кривизны обтекаемого контура;  $L$  — характерная длина;  $r = r(x)$  — расстояние от точки контура до оси симметрии;  $v = 0, 1$  соответственно для плоского и осесимметрического течения.

Уравнения (1.1) приведены к безразмерному виду, в качестве характерных величин для скорости, плотности и давления взяты соответственно

$U_\infty$ ,  $\rho_\infty$  и  $\rho_\infty U_\infty^2$ , координаты  $x$  и  $y$  выражаются в долях  $L$ . Предполагается, что характеризующий интенсивность магнитного поля безразмерный параметр  $q \sim \varepsilon^{-1}$ .

Как было показано в работе [1], индуцированным магнитным полем можно пренебречь по сравнению с заданным при значении магнитного числа Рейнольдса  $R_m \lesssim 1$ . Это дает возможность приближенно отделить задачу по расчету гидродинамического поля, считая в уравнениях (1.1) магнитное поле заданным, от задачи по отысканию индуцированного магнитного поля, которая здесь не рассматривается. Кроме того, с принятой точностью вектор магнитного поля можно считать постоянным поперек сжатого слоя, так что  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x)$ .

Граничные условия с принятой точностью имеют вид (индекс 0 относится к величинам непосредственно за ударной волной, индекс 1 — к величинам на стенке):

$$u_0 = \cos \theta, \quad \rho_0 = \varepsilon^{-1}, \quad p_0 = \sin^2 \theta, \quad \theta_0 = \cos \theta (dy_0/dx - \varepsilon \operatorname{tg} \theta), \quad v_1 = 0 \quad (1.2)$$

( $y = y_0(x)$  — уравнение ударной волны)

Здесь  $\theta = \theta(x)$  — угол касательной к контуру с направлением вектора скорости невозмущенного потока. В работе [1] уравнения (1.1) решены для случаев обтекания клина и конуса (для конуса решение было построено в других координатах), когда  $\alpha = \pi/2$ . Отметим, что уравнения (1.1) рассматривались также в работе [4], однако примеров решения в этой работе не дано. Как следует из второго уравнения (1.1), наличие магнитного поля, направленного под произвольным углом  $\alpha \neq \pi/2$  к контуру тела, эквивалентно появлению некоторой фиктивной центробежной силы, которая в зависимости от знака величины  $\sin 2\alpha$  направлена к телу или от тела, т. е. приводит к увеличению или уменьшению давления по сравнению со значением, вычисленным по формуле Буземана [2, 3].

Перейдем в уравнениях (1.1) к независимым переменным Крокко  $x$  и  $\psi$  (функция тока), где  $\psi$  дается выражением

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho v r^v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\rho u r^v \quad (1.3)$$

В результате получим<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{q \sin^2 \alpha}{\rho} &= 0, & -\rho r^v \frac{\partial p}{\partial \psi} &= q \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\rho u}{R} \\ u^2 + \frac{p}{\varepsilon \rho} &= 1, & \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho u r^v} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{v}{u} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнение ударной волны в новых переменных принимает вид

$$\psi_0(x) = -\int_0^x r^v \sin \theta dx - \int_0^{y_0} r^v \cos \theta dy \quad (1.5)$$

<sup>1</sup> Переход от первого уравнения (1.1) к первому уравнению (1.4) осуществляется в результате элементарного тождественного преобразования, а не из-за пренебрежения членом  $v du/dy$  по сравнению с  $u du/dx$  в (1.1), как утверждается в работе [5], где сделано ошибочное критическое замечание в адрес работы [1].

Уравнение контура тела  $\psi = 0$ . На линии  $\psi = \psi_0(x)$  выполняются условия (1.2), последнее из которых в новых переменных записывается

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = -r^\nu [v_0 + (1 + \varepsilon) \sin \theta] \quad (1.6)$$

остальные условия остаются без изменения.

Первое слагаемое в правой части уравнения (1.5) порядка единицы, второе — порядка  $\varepsilon$ . Это дает возможность с принятой точностью решить задачу двумя последовательными приближениями. Сначала решается задача Коши для первых трех уравнений (1.4) при условии

$$u_0 = \cos \theta, \quad p_0 = \sin^2 \theta, \quad \rho_0 = \varepsilon^{-1} \quad \text{при} \quad \psi_0(x) = -\int_0^x r^\nu \sin \theta dx \quad (1.7)$$

Из этого решения при стремлении интенсивности магнитного поля к нулю ( $q \rightarrow 0$ ) получается известная формула Буземана для давления [2,3]. Пользуясь найденными значениями  $\rho(x, \psi)$  и  $u(x, \psi)$ , из последнего уравнения (1.4) с учетом условия непротекания определяем  $v$  квадратурой

$$v(x, \psi) = -u \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho u r^\nu} \right) d\psi \quad (1.8)$$

Полагая в уравнении (1.8)

$$\psi_0 = -\int_0^x r^\nu \sin \theta dx$$

и подставляя полученное выражение для  $v_0$  в уравнение (1.6), получаем уравнение для функции тока на ударной волне в следующем приближении, откуда, пользуясь (1.5), можно определить уравнение ударной волны  $y_0 = y_0(x)$ .

2. Рассмотрим решение задачи обтекания клина плоским потоком для случая, когда вектор магнитного поля не зависит от  $x$  ( $H = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ ).

В уравнениях (1.4) положим  $\nu = 0$ ,  $R = \infty$ ; тогда первые два уравнения (1.4) с учетом третьего уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{q \varepsilon \sin^2 \alpha (1 - u^2)}{p} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \psi} = \text{ctg} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$u_0 = \cos \theta, \quad p_0 = \sin^2 \theta \quad \text{при} \quad \psi_0 = -x \sin \theta \quad (2.2)$$

Гиперболическая система уравнений (2.1) при наличии краевых условий (2.2) допускает точное решение вида

$$u = u(\eta), \quad p = p(\eta) \quad (\eta = \psi + x \sin \theta)$$

при этом из второго уравнения (2.1) имеем

$$p = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} [u \cos \alpha - \cos(\theta + \alpha)] \quad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.3) для  $p$  в первое уравнение (2.1) и интегрируя полученное уравнение для  $u$ , получим решение

$$\left(\frac{1-u^2}{\sin^2\theta}\right)^{\cos\alpha} \left(\frac{1+u}{1-u} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\cos(\theta+\alpha)} = \exp \frac{2q\epsilon \sin^3\alpha (\psi + x \sin\theta)}{\sin^2\theta} \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.3) и (2.4) без ограничения общности можно считать  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , поскольку изменение знака вектора магнитного поля на обратный, т. е. переход к углу наклона вектора скорости, равному  $\alpha + \pi$ , не изменяет решения. После определения скорости  $u$  из (2.4) давление  $p$  определяется из уравнения (2.3), а плотность  $\rho$  — из третьего уравнения (1.4). Чтобы найти распределение  $u$ ,  $p$  и  $\rho$  вдоль стенки, достаточно положить в решении  $\psi = 0$ .

Из уравнений (2.3), (2.4) следует, что скорость на поверхности клина всегда уменьшается с ростом  $x$ . Давление падает вдоль поверхности при  $0 < \alpha < \pi/2$ , когда действие магнитного поля эквивалентно центробежной силе при обтекании выпуклой поверхности, и растет с ростом  $x$  при  $\pi/2 < \alpha < \pi$ , когда течение эквивалентно обтеканию некоторой вогнутой поверхности. Когда угол  $\theta + \alpha$  наклона вектора магнитного поля с направлением вектора скорости невозмущенного потока меньше  $\pi/2$ , в точке на поверхности тела с абсциссой  $x = x_*$ , в которой  $u = \cos(\theta + \alpha)/\cos\alpha$ , давление обращается в нуль, т. е. происходит кавитация, вызванная действием магнитных сил. Точка, в которой  $p = 0$ , является особой для уравнений (1.1), и в некоторой окрестности этой точки решение теряет силу, поскольку нарушается основное допущение  $p \sim \epsilon^{-1}$ . В область  $x > x_*$  решение (2.3), (2.4), разумеется, продолжено быть не может.

При  $\theta + \alpha > \pi/2$  в некоторой точке с абсциссой  $x = x_{**}$  скорость  $u$  обращается в нуль, т. е. имеет место явление отрыва [1]. Точка  $x = x_{**}$  также является особой в решении, и в область  $x > x_{**}$  решение должно быть не может. Определяя точки кавитации и отрыва из уравнений (2.3), (2.4), получаем

$$q\epsilon x_* = \frac{\sin\theta}{2\sin^3\alpha} \ln \left\{ \left[ \frac{\sin(\theta + 2\alpha)}{\cos^2\alpha \sin\theta} \right]^{\cos\alpha} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \left( \alpha + \frac{\theta}{2} \right) \right]^{-\cos(\theta+\alpha)} \right\} \quad (2.5)$$

( $\theta + \alpha < \pi/2$ , решение справедливо в области  $x < x_*$ )

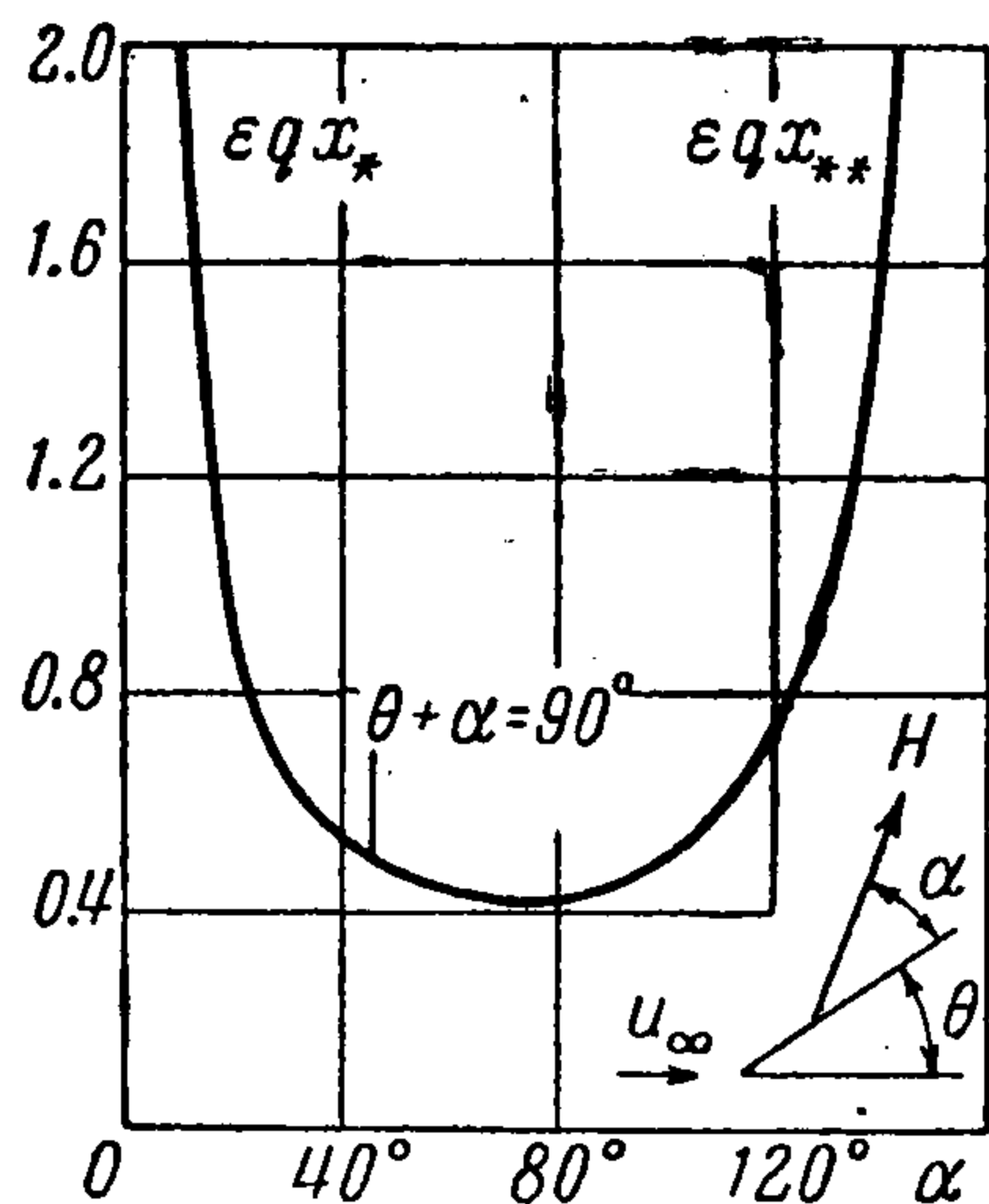
$$q\epsilon x_{**} = \frac{\sin\theta}{\sin^3\alpha} \ln \left[ \frac{1}{(\sin\theta)^{\cos\alpha}} \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^{\cos(\theta+\alpha)} \right] \quad (2.6)$$

( $\theta + \alpha > \pi/2$ , решение справедливо в области  $x < x_{**}$ )

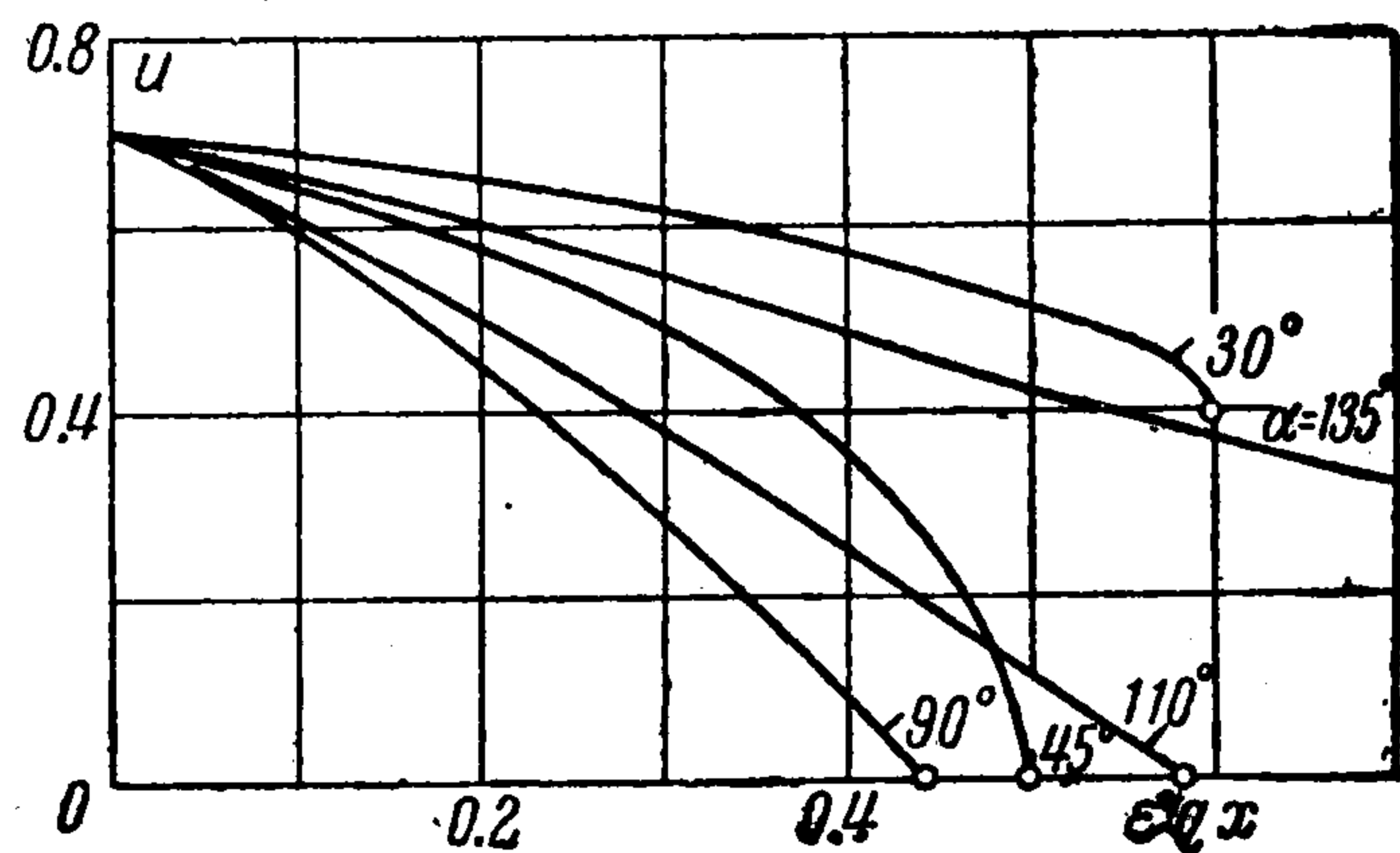
В случае кавитации  $u > 0$  при  $x < x_*$ , а в случае отрыва  $p > 0$  при  $x < x_{**}$ . При  $\theta + \alpha = \pi/2$  реализуется промежуточный случай, когда точки отрыва и кавитации совпадают

$$q\epsilon x_* = q\epsilon x_{**} = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\cos\theta} \ln \frac{1}{\sin\theta} \quad (\theta + \alpha = \pi/2) \quad (2.7)$$

На фиг. 1 в качестве примера построены величины  $q\epsilon x_*$  и  $q\epsilon x_{**}$  в зависимости от угла  $\alpha$  наклона вектора магнитного поля при  $\theta = 45^\circ$ . Обе кривые плавно смыкаются при  $\alpha = 45^\circ$ , когда справедливо уравнение (2.7). Интересно отметить, что при  $\alpha = 71^\circ$  величина  $x_{**}$  имеет минимум, т. е. в этом случае воздействие магнитного

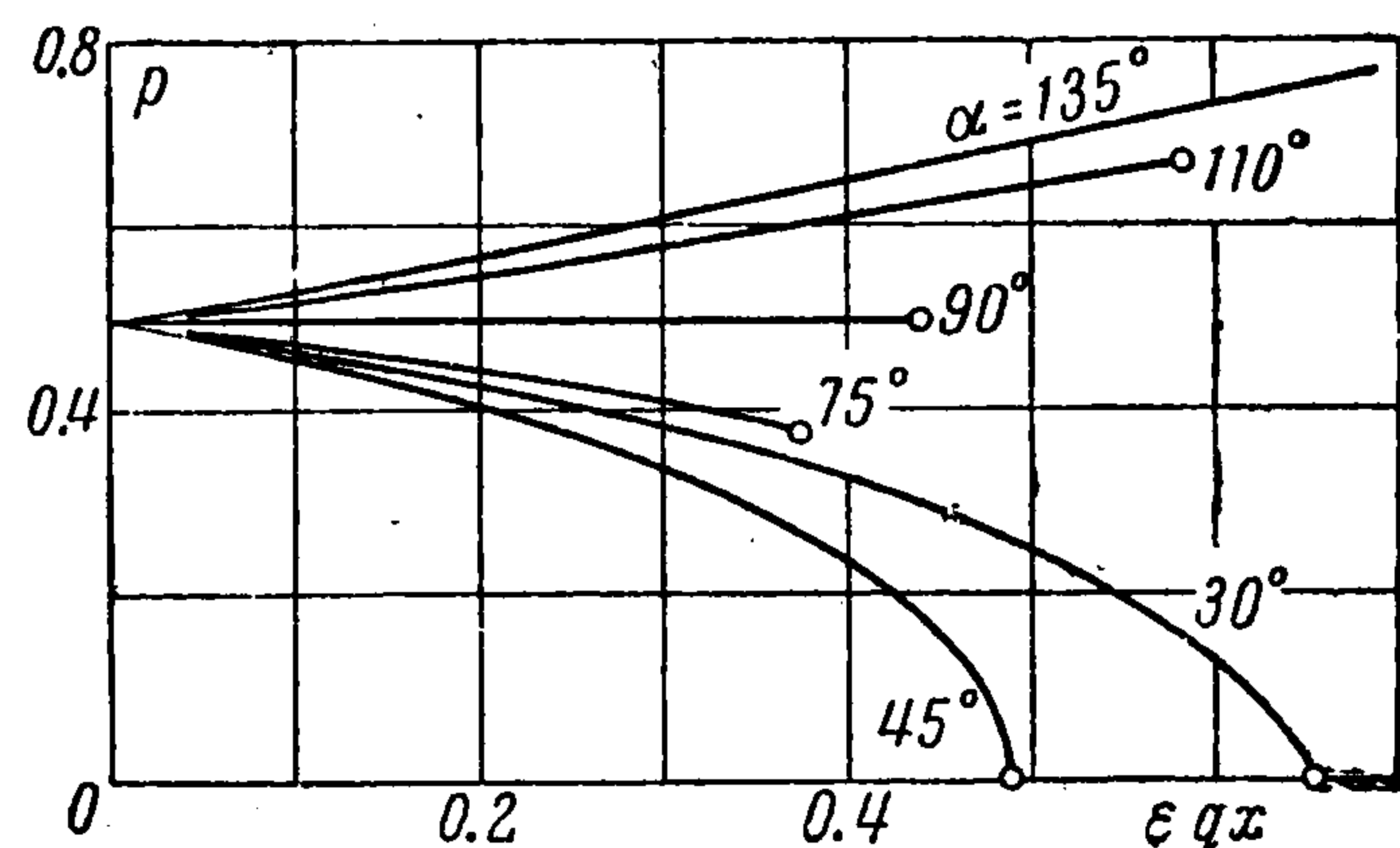


Фиг. 1



Фиг. 2

поля заданной интенсивности на течение будет наибольшим (наиболее ранний отрыв). На фиг. 2 построены зависимости  $u = u(\epsilon qx)$  согласно уравнению (2.4), а на фиг. 3 — зависимости  $p = p(\epsilon qx)$  согласно (2.3) для различных значений углов  $\alpha$  при  $\theta = 45^\circ$ . Все кривые, кроме кривой для  $\alpha = 135^\circ$ , доведены до точек кавитации ( $\alpha < 45^\circ$ ) или отрыва ( $\alpha > 45^\circ$ ). При  $x = 0$  значения  $u$  и  $p$  при любом  $\alpha$  совпадают со значениями, вычисленными для случая нулевого магнитного поля:  $u = \cos \theta$ ,  $p = \sin^2 \theta$ .



Фиг. 3

Определим теперь форму ударной волны. Обозначая в уравнении (1.8) величину  $(\rho u)^{-1}$  через  $\Phi$  (где  $\Phi = \Phi(\psi + x \sin \theta)$  — известная функция), выполняя дифференцирование под знаком интеграла и затем интегрируя, получим

$$v = -u \sin \theta [\Phi(\psi + x \sin \theta) - \Phi(x \sin \theta)] \quad (2.8)$$

Полагая в уравнении (2.8)  $\psi + x \sin \theta = 0$ , получаем выражение для  $v_0$  на ударной волне. Подставляя полученное выражение в (1.6) с учетом значений  $\Phi$  и  $u$  на ударной волне ( $\Phi(0) = \epsilon / \cos \theta$ ,  $u(0) = \cos \theta$ ) и интегрируя (1.6) по  $x$ , имеем

$$\psi_0(x) = -x \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \int_0^x \Phi(x \sin \theta) dx \quad (2.9)$$

$$\left( \int_0^x \Phi(x \sin \theta) dx = \int_0^x \frac{dx}{\rho_1 u_1} \right)$$

Здесь индекс 1 характеризует величины на стенке. Из первого уравнения (2.1) имеем вдоль стенки

$$\frac{dx}{\rho_1} = - \frac{du_1}{q \sin^2 \alpha}$$

Пользуясь этим равенством, интегрируем в уравнении (2.9) выражение  $\Phi(x \sin \theta)$  и получаем

$$\psi_0(x) = -x \sin \theta + \frac{\sin \theta \cos \theta}{q \sin^2 \alpha} \ln \frac{u_1(x)}{\cos \theta} \quad (2.10)$$

Окончательно уравнение ударной волны согласно (1.5) можно записать в виде

$$y_0(x) = \frac{\sin \theta}{q \sin^2 \alpha} \ln \frac{\cos \theta}{u_1(x)} \quad (2.11)$$

Полученное выше решение при  $\alpha = \pi/2$  совпадает с решением [1] для клина. В частности, формулы (2.4), (2.6) и (2.11) переходят соответственно в формулы (2.9), (2.12) и (2.24) из работы [1] (в формуле (2.24) работы [1] допущена опечатка — перед правой частью должен стоять знак минус).

Определим в заключение кривизну ударной волны в вершине клина. Из уравнения (2.11) и первого уравнения (2.1) имеем

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{q \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}{\cos \theta} (\operatorname{tg} \theta + 2 \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{ctg} \alpha) \quad (2.12)$$

Из этого уравнения следует следующий любопытный факт.

При  $\alpha = \alpha_0$ , где

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 = -\operatorname{tg} \theta - 2 \operatorname{ctg} \theta \quad (\pi/2 < \alpha_0 < \pi)$$

кривизна ударной волны обращается в нуль.

При  $\pi > \alpha > \alpha_0$  кривизна скачка в вершине клина отрицательна, т. е. ударная волна обращена в этом случае выпуклостью к набегающему потоку.

В окрестности точки отрыва кривизна ударной волны положительна — качественная картина течения при любом  $\alpha$  такая же, как и в случае работы [1] при  $\alpha = \pi/2$ . Другими словами, при  $\pi > \alpha > \alpha_0$  ударная волна имеет в интервале  $0 < x < x_{**}$  точку перегиба.

Поступила 18 IX 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а д ы ж е н с к и й М. Д. Гиперзвуковое обтекание тел в магнитной гидродинамике. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
2. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
3. Х е й з У. Д., П р о б с т и н Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. ИЛ, 1962.
4. М е у е р Р. Х. Magnetohydrodynamic-hypersonic flow in the quasi-newtonian approximation, Rev. Mod. Phys., 1960, v. 32, № 4.
5. B a r t h e l J. R., L y k o u d i s P. S. Magneto-fluid-dynamic problem of a shock wave attached to a cone. The Physics of Fluids, 1961, v. 4, № 12.