

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕГО ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. В. Вандакуров

(Ленинград)

Исследование проблемы устойчивости удерживаемого магнитным полем плазменного шнура с учетом конечной проводимости производилось в работах [1-3]. Для несжимаемого шнура однородной проводимости были найдены неустойчивости для некоторых типов колебаний [1-, 2].

Устойчивость пинча с поверхностными токами в случае большой, но конечной проводимости плазмы в токовом слое изучалась Джуксом [3]. В этой работе все расчеты проведены в предположении, что радиальная компонента смещения из положения равновесия  $\xi_r$  в пределах токового слоя остается постоянной. Соответственно найдено решение неполной системы уравнений магнитной гидродинамики. Однако, если для идеально проводящей среды предположение о постоянстве  $\xi_r$  является следствием исходных уравнений [4], то для общего случая, как будет видно из приведенных ниже решений, это предположение оказывается неверным. Поэтому выводы работы Джукса следует признать неправильными.

Ниже исследуется стабильность плазменного шнура в форме полого цилиндра в предположении, что проводимость плазмы  $\sigma$  является большим параметром задачи. Других ограничений на вид функции  $\sigma(r)$  не налагается.

Постановка задачи устойчивости трубчатого шнура конечной проводимости для случая несжимаемой среды рассматривалась в работе [4]; здесь выводятся уравнения с учетом сжимаемости среды (§ 1); в §§ 2-4 изучается устойчивость несжимаемого полого цилиндра, в §§ 5 и 6 рассматриваются стабильность сплошного несжимаемого цилиндра и трубчатого шнура с учетом сжимаемости среды.

Найденные решения соответствуют неустойчивым колебаниям с чисто экспоненциальной зависимостью от времени. Неустойчивости возникают при наличии разрывов в распределении объемной плотности тока в стационарном состоянии.

1. Основные уравнения. Пусть в стационарном состоянии плазменный слой занимает пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Давление, плотность и проводимость слоя равны  $p(r)$ ,  $\rho(r)$  и  $\sigma(r)$ . Азимутальную и осевую компоненты магнитного поля представим в форме

$$H_\varphi = H_0 \frac{rg(r)}{r_0}, \quad H_z = H_0 h(r), \quad g(r_0) = 1, \quad H_0 = (H_\varphi)_{r=r_0} \neq 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $r_0$  — некоторый промежуточный радиус слоя.

Считаем, что плазменный слой окружен идеально проводящими цилиндрами: внутренним радиуса  $\alpha_1 r_1$  и внешним радиуса  $\alpha_2 r_2$ . В непроводящем слое  $\alpha_1 r_1 \leq r \leq r_1$  давление и плотность постоянны и равны соответственно  $p_1$  и  $\chi_1 \rho_1$ . Те же величины в слое  $r_2 \leq r \leq \alpha_2 r_2$  будем обозначать с индексом 2.

Пусть на заданное равновесное распределение наложено малое возмущение, заданное законом  $\exp i(\omega t + m\varphi + kz)$ . Как и в работе [4], условимся считать, что  $m \geq 0$ ,  $k \geq 0$ .

Линеаризуя исходную систему уравнений магнитной гидродинамики<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right), & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (\rho \rho^{-\gamma}) &= 0, & \gamma &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.2)$$

получим

$$\frac{\Omega^2 H_0}{r_0} \xi = -\nabla Q + is\mathbf{H}^* - 2i_r g H_\varphi^* + \{i_\varphi (rg' + 2g) + i_z r_0 h'\} H_r^* \quad (1.3)$$

$$\mathbf{H}^* = \frac{isH_0}{r_0} \xi - (i_\varphi r g' + i_z r_0 h') \frac{H_0 \xi_r}{r_0} + \frac{r_0^2}{\Omega q^2} \left\{ \nabla^2 \mathbf{H}^* + \frac{\sigma'}{\sigma} i_r \times \operatorname{rot} \mathbf{H}^* \right\} - \mathbf{H} \operatorname{div} \xi \quad (1.4)$$

$$p^* = -\gamma p \operatorname{div} \xi - p' \xi_r, \quad \rho^* = -\operatorname{div} \rho \xi \quad (1.5)$$

$$Q = \frac{r_0}{H_0} (4\pi p^* + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) \quad (1.6)$$

$$\xi = \frac{v^*}{i\omega}, \quad \Omega = \frac{i\omega r_0 \sqrt{4\pi\rho}}{|H_0|}, \quad q^2 = \frac{r_0 \sigma |H_0|}{c^2} \sqrt{\frac{4\pi}{\rho}}, \quad s = mg + kr_0 h$$

Здесь  $i_r, i_\varphi, i_z$  — единичные векторы, звездочкой отмечены возмущенные величины, а штрихи обозначают дифференцирование по  $r$ .

Выражая  $\xi$  через  $\mathbf{H}^*$  и  $\operatorname{div} \xi$  из (1.4) и исключая  $p^*$  при помощи (1.5), приведем систему (1.3) — (1.6) к виду

$$\nabla Q = i_r P_1 + i_\varphi i P_2 + i_z \frac{iP_3}{kr} + \frac{i\Omega^2}{s} \mathbf{H} \operatorname{div} \xi \quad (1.7)$$

$$Q = rgH_\varphi^* + r_0 h H_z^* - \frac{4\pi r_0}{H_0} \left\{ \gamma p \operatorname{div} \xi - \frac{ir_0 p'}{sH_0} \left( H_r^* - \frac{r_0^2}{\Omega q^2} \nabla_r^2 \mathbf{H}^* \right) \right\} \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}^* = 0 \quad (1.9)$$

$$P_1 = i \left( s + \frac{\Omega^2}{s} \right) H_r^* - 2gH_\varphi^* - \frac{ir_0^2 \Omega}{q^2 s} \nabla_r^2 \mathbf{H}^* \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \left( s + \frac{\Omega^2}{s} \right) H_\varphi^* - \left[ \left( 1 + \frac{\Omega^2}{s^2} \right) rg' + 2g \right] i H_r^* - \\ &\quad - \frac{r_0^2 \Omega}{q^2 s} \left( \nabla_\varphi^2 \mathbf{H}^* - \frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{rot}_z \mathbf{H}^* - \frac{irg'}{s} \nabla_r^2 \mathbf{H}^* \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \left( s + \frac{\Omega^2}{s} \right) kr H_z^* - ikr_0 h' \left( 1 + \frac{\Omega^2}{s^2} \right) H_r^* - \\ &\quad - \frac{kr r_0^2 \Omega}{q^2 s} \left( \nabla^2 H_z^* + \frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{rot}_\varphi \mathbf{H}^* - \frac{ir_0 h'}{s} \nabla_r^2 \mathbf{H}^* \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь  $\nabla_\varphi^2 \mathbf{H}^* = i_\varphi \cdot \nabla^2 \mathbf{H}^*$  и т. д.; при этом

$$\frac{H_0}{r_0} \xi_r = -\frac{i}{s} \left( H_r^* - \frac{r_0^2}{\Omega q^2} \nabla_r^2 \mathbf{H}^* \right) \quad (1.13)$$

Для определения граничных условий нужно рассмотреть области вне проводящего слоя. Вычисления, аналогичные проведенным в ра-

<sup>1</sup> Строго говоря, вместо уравнения изэнтропичности движения нужно написать уравнение переноса энергии, в котором учитываются джоулевы потери и теплопроводность среды. Однако в рассматриваемом случае хорошо проводящей среды учет джоулевых потерь приводит к несущественным поправкам. Изотермический режим можно получить, если принять  $\gamma = 1$  и считать, что в стационарном состоянии  $r/\rho(r) = \text{const}$ .

боте [4], приводят к соотношениям

$$\left\{ mQ + \frac{r\chi\Omega^2 H_0 \xi_r}{r_0 T^{(*)}} - \frac{isr}{T} H_r^* \right\}_{r=r_j} = 0 \quad (1.14)$$

$$\left\{ H_\phi^* - \frac{i}{T} H_r^* + (rg' + 2g) \frac{H_0 \xi_r}{r_0} \right\}_{r=r_j} = 0 \quad (1.15)$$

$$\left\{ H_z^* + h' H_0 \xi_r - \frac{ikr}{mT} H_r^* \right\}_{r=r_j} = 0 \quad (1.16)$$

Здесь

$$T^{(*)} = \frac{\kappa r [I_m'(\kappa r) K_m'(\kappa \alpha r) - K_m'(\kappa r) I_m'(\kappa \alpha r)]}{m [I_m(\kappa r) K_m'(\kappa \alpha r) - K_m(\kappa r) I_m'(\kappa \alpha r)]}$$

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \omega^2 \rho / \gamma \rho}, \quad (\chi)_{r=r_j} = \chi_j \quad (\alpha)_{r=r_j} = \alpha_j \quad (j=1, 2)$$

а  $T$  определяется той же формулой, что и  $T^{(*)}$ , заменой в ней  $\kappa$  на  $k$ .

Задача исследования устойчивости относительно данного типа возмущений свелась к нахождению  $\Omega$ , удовлетворяющих системе (1.7)–(1.9) при условиях (1.14)–(1.16). Для неустойчивых колебаний  $\text{Re } \Omega > 0$ .

2. Асимптотические решения в случае несжимаемой среды. При условии несжимаемости  $\text{div } \xi = 0$ , величина  $\gamma \text{div } \xi$  — конечная и уравнение (1.8) можно не рассматривать. Будем искать решения системы (1.7), (1.9) при больших  $q$ , считая, что внутренний радиус проводящего слоя не мал, функция  $s(r)$  не близка к нулю и равновесные распределения являются плавными ( $g'$  порядка  $g/r$  и т. д.).

Применяя к уравнению (1.7) операцию  $\text{rot}$ , получим три уравнения, два из которых будут независимыми. В результате придем к следующей системе трех уравнений для компонент  $\mathbf{H}^*$ :

$$P_3 - \frac{k^2 r^2}{m} P_2 = 0, \quad \frac{\partial_r P_2}{\partial r} - m P_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$i \frac{\partial_r H_r^*}{\partial r} = m H_\phi^* + kr H_z^* \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.1) величина  $1/q^2$  будет малым параметром при старшей производной. Рассмотрим решения, для которых  $\partial/\partial r \gg 1/r$ . Если оставить только главные члены, то можно установить, что компоненты  $\mathbf{H}^*$  пропорциональны  $e^{\lambda f}$ , где

$$\lambda^2 f'^2 = \frac{q^2 (s^2 + \Omega^2)}{\Omega r_0^2} \quad (2.3)$$

Будем считать, что производная  $f'$  порядка  $1/r_0$  и не равна нулю, тогда  $\lambda = \text{const}$  будет большим параметром. Можно положить

$$\lambda = \left| q \sqrt{\frac{s^2 + \Omega^2}{\Omega}} \right|_{r=r_0}$$

Будем искать решения (2.1) в виде

$$\begin{aligned} H_\phi^* &= \lambda f' [Y + \lambda^{-1} Y^{(1)} + O(\lambda^{-2})] e^{\lambda f} \\ H_z^* &= \frac{m \lambda f'}{kr} [Z + \lambda^{-1} Z^{(1)} + O(\lambda^{-2})] e^{\lambda f} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $Y, Y^{(1)}, Z, \dots$  — такие функции  $r$ , что  $Y'$  порядка  $Y/r$  и т. п.

Из уравнений (2.2), (1.13) и (1.7) найдем

$$H_r^* = -\frac{im}{r} \left[ Y + Z + \frac{1}{\lambda} (Y^{(1)} + Z^{(1)}) - \frac{1}{\lambda f'} (Y' + Z') + O(\lambda^{-2}) \right] e^{\lambda f} \quad (2.5)$$

$$\frac{H_0 \xi_r}{r_0} = \frac{ms}{r\Omega^2} [Y + Z + \lambda^{-1} R^{(1)} + O(\lambda^{-2})] e^{\lambda f} \quad (2.6)$$

$$Q = -2g [Y + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda f} \quad (2.7)$$

$$R^{(1)} = Y^{(1)} + Z^{(1)} + \frac{1}{f'} \left( 1 + \frac{2\Omega^2}{s^2} \right) (Y' + Z') + \frac{1}{rf'} \left( 1 + \frac{\Omega^2}{s^2} \right) \left[ Y - Z + \frac{rf''}{f'} (Y + Z) \right]$$

Подставляя (2.4), (2.5) в систему (2.1) и приравнявая нулю главные члены, получим (2.3). В следующем приближении по  $\lambda^{-1}$  будет

$$2Y' + \left( \frac{q'}{q} + \frac{3ss'}{s^2 + \Omega^2} + \frac{1}{r} \right) Y + \frac{2msg}{r(s^2 + \Omega^2)} Z = 0 \quad (2.8)$$

$$2Z' + \left( \frac{q'}{q} + \frac{3ss'}{s^2 + \Omega^2} - \frac{1}{r} \right) Z - \frac{2k^2 rsg}{m(s^2 + \Omega^2)} Y = 0$$

Два линейно независимых решения этой системы запишем в форме

$$Y_1 = r_0 X \cos k\vartheta, \quad Y_2 = -\frac{m}{k} X \sin k\vartheta, \quad Z_1 = \frac{kr_0 r}{m} X \sin k\vartheta \quad (2.9)$$

$$Z_2 = rX \cos k\vartheta \quad X = \frac{C}{\sqrt{rq}} (s^2 + \Omega^2)^{-\frac{3}{4}}, \quad \vartheta = \int_{r_1}^r \frac{sg dr}{s^2 + \Omega^2}, \quad C = \text{const}$$

Продолжая разложение, можно было бы найти  $Y_n^{(1)}$  и  $Z_n^{(1)}$ ,  $n=1, 2$ .

Так как в равенстве (2.3) знак  $\lambda$  произволен, то можно выделить четыре независимых решения системы (2.1)–(2.2). Положим

$$\lambda f = \frac{1}{r_0} \int_{r_1}^r q \sqrt{\frac{s^2 + \Omega^2}{\Omega}} dr, \quad \left| \arg \sqrt{\frac{s^2 + \Omega^2}{\Omega}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

тогда два решения будут определяться формулами (2.4), (2.5) после подстановки в них (2.9), а другие два получатся изменением знака перед  $\lambda$ . Например для  $H_\varphi^*$  решения будут  $\pm \lambda f' (Y_n + \dots) e^{\pm \lambda f}$ ,  $n=1, 2$ .

Выведенные формулы пригодны при условиях

$$\lambda \gg 1, \quad \lambda \gg (m^2 + k^2 r^2), \quad |\lambda r f'| \gg 1, \quad (\lambda r_1 / r_2) \gg 1$$

$$\lambda \gg |r\sigma'/\sigma|, \quad \lambda \gg |rg'/s|, \quad \lambda \gg |rh'/s|$$

Два последних условия исключают из рассмотрения случай  $s=0$ .

3. Дисперсионное уравнение. Полная система решений уравнений (2.1), (2.2) состоит из шести частных решений. Последние два решения можно искать в виде разложения по  $1/\lambda^2$ , считая, что первые члены рядов будут решениями в приближении идеальной проводимости. При этом параметр  $\lambda$  должен удовлетворять условию  $r_1^2 \lambda^2 \gg r_2^2$ . Будем считать такие решения известными и обозначим левые части равенств (1.14)–(1.16) после подстановки  $n$ -го решения ( $n=1, 2$ ) соответственно через  $U_{nj}$ ,  $V_{nj}$ ,  $W_{nj}$ , где  $U_{nj} = U_n(s_j)$  и т. п.

Подставляя полное решение в условия (1.14) — (1.16), получим

$$\begin{aligned} A_1 U_{1j} + A_2 U_{2j} + (B_1 D_{1j} + B_2 D_{2j}) e^{\lambda f_j} + (B_3 D_{1j}^- + B_4 D_{2j}^-) e^{-\lambda f_j} &= 0 \\ A_1 V_{1j} + A_2 V_{2j} + (B_1 E_{1j} + B_2 E_{2j}) e^{\lambda f_j} + (B_3 E_{1j}^- + B_4 E_{2j}^-) e^{-\lambda f_j} &= 0 \\ A_1 W_{1j} + A_2 W_{2j} + (B_1 F_{1j} + B_2 F_{2j}) e^{\lambda f_j} + (B_3 F_{1j}^- + B_4 F_{2j}^-) e^{-\lambda f_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} D_{nj} &= -2mg_j Y_{nj} - \frac{ms_j(1-\chi_j)}{T_j} (Y_{nj} + Z_{nj}) + O(\lambda^{-1}) \\ E_{nj} &= \lambda f_j' \left( Y_{nj} + \frac{1}{\lambda} Y_{nj}^{(1)} \right) + \left[ \frac{ms_j}{r_j \Omega^2} (r_j g_j' + 2g_j) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{r_j T_j} \right] (Y_{nj} + Z_{nj} + \lambda^{-1} R_{nj}^{(1)}) + O(\lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$F_{nj} = \lambda f_j' \left( Z_{nj} + \frac{1}{\lambda} Z_{nj}^{(1)} \right) + \left( \frac{kr_0 s_j h_j'}{\Omega^2} - \frac{k^2 r_j}{m T_j} \right) (Y_{nj} + Z_{nj} + \frac{1}{\lambda} R_{nj}^{(1)}) + O(\lambda^{-2})$$

$$Y_{nj} = Y_n(r_j), \quad h_j' = \left( \frac{dh}{dr} \right)_{r=r_j} \quad (A_p, B_p = \text{const})$$

Формулы для  $D^-$ ,  $E^-$  и  $F^-$  получаются из формул для  $D$ ,  $E$  и  $F$  изменением знака перед  $\lambda$ . Множитель при  $\Omega^{-2}$  вычислен с учетом поправочных членов в связи с тем, что порядок  $\Omega$  заранее неизвестен (из последующего будет видно, что при  $s \sim 1$  параметры  $\lambda$  и  $\Omega^{-2}$  могут быть одного порядка).

Приравнивая нулю определитель системы (3.1), получим уравнение для  $\Omega$ . Если пренебрегать членами с множителем  $\exp[-\lambda(f_2 - f_1)]$ , то будет

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{21} & 0 & 0 & D_{11}^- & D_{21}^- \\ U_{12} & U_{22} & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 \\ V_{11} & V_{21} & 0 & 0 & E_{11}^- & E_{21}^- \\ V_{12} & V_{22} & E_{12} & E_{22} & 0 & 0 \\ W_{11} & W_{21} & 0 & 0 & F_{11}^- & F_{21}^- \\ W_{12} & W_{22} & F_{12} & F_{22} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или иначе

$$\begin{aligned} G_1 G_2 (U_{11} U_{22} - U_{12} U_{21}) - G_1 (D_{22} F_{12} - D_{12} F_{22}) (U_{11} V_{22} - U_{21} V_{12}) + \\ + G_1 (D_{22} E_{12} - D_{12} E_{22}) (U_{11} W_{22} - U_{21} W_{12}) - G_2 (D_{11}^- F_{21}^- - D_{21}^- F_{11}^-) \times \\ \times (U_{22} V_{11} - U_{12} V_{21}) + G_2 (D_{11}^- E_{21}^- - D_{21}^- E_{11}^-) (U_{22} W_{11} - U_{12} W_{21}) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$G_1 = E_{11}^- F_{21}^- - E_{21}^- F_{11}^-, \quad G_2 = E_{22} F_{12} - E_{12} F_{22}$$

а отброшенные слагаемые в  $\lambda^2$  раз меньше первого члена левой части (3.3).

Выражение для  $G_j$  можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{G_j}{N_j} &= \lambda f_j' \left[ \lambda f_j' - (-1)^j \frac{m^2 + k^2 r_j^2}{m r_j T_j} \right] + \frac{s_j}{2 r_j \Omega^2} \left\{ (r s' + 2mg) \left[ (-1)^j 2\lambda f' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q'}{q} - \frac{ss'}{s^2 + \Omega^2} \right] + mg' + \frac{2mg}{r} - k r_0 h' + \frac{2k^2 r s g}{s^2 + \Omega^2} \left( r g' + 2g - \frac{m r_0 h'}{k r} \right) \right\}_{r=r_j} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В равенстве (3.4)

$$N_j = (Y_{jj} + \lambda^{-1}Y_{jj}^{(1)})(Z_{lj} + \lambda^{-1}Z_{lj}^{(1)}) - (Y_{lj} + \lambda^{-1}Y_{lj}^{(1)})(Z_{jj} + \lambda^{-1}Z_{jj}^{(1)})$$

$$l = j + (-1)^{j-1}$$

Нетрудно видеть, что после деления на неравный нулю множитель  $N_1 N_2$  неизвестные функции  $Y^{(1)}$  и  $Z^{(1)}$  из уравнения (3.3) исчезают. Получающееся уравнение представляет собой два первых члена разложения точного дисперсионного соотношения в ряд по  $\lambda^{-1}$ .

4. Исследование дисперсионного уравнения. В первом приближении корни уравнения (3.3) определяются приравниванием нулю первого члена. Кроме решений, близких к тем, которые получаются в приближении идеальной проводимости, когда

$$U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21} = 0 \quad (4.1)$$

получим еще решения из  $G_j = 0$  или

$$\lambda f_j' = (-1)^{j-1} \frac{s_j(r_j s_j' + 2mg_j)}{r_j \Omega^2} \quad (j = 1, 2) \quad (4.2)$$

Комплексные корни  $\Omega$  последнего выражения с учетом (2.10) соответствуют затухающим колебаниям. Для неустойчивых решений параметр  $\Omega$  вещественный положительный и определяется формулами

$$q_1 = \frac{r_0 s_1 (r_1 s_1' + 2mg_1)}{r_1 \Omega \sqrt{\Omega (s_1^2 + \Omega^2)}}, \quad s_1 (r_1' s_1' + 2mg_1) > 0 \quad (4.3)$$

$$q_2 = - \frac{r_0 s_2 (r_2 s_2' + 2mg_2)}{r_2 \Omega \sqrt{\Omega (s_2^2 + \Omega^2)}}, \quad s_2 (r_2' s_2' + 2mg_2) < 0 \quad (4.4)$$

Здесь

$$rs' + 2mg = \frac{r_0}{H_0} \left( \frac{m}{r} \frac{drH_\varphi}{dr} + kr \frac{dH_z}{dr} \right)$$

— величина, связанная с плотностью тока  $\mathbf{j}$  в стационарном состоянии; она пропорциональна скалярному произведению градиента какой-нибудь возмущенной величины (например,  $\nabla H_\varphi^*$ ) на  $\mathbf{i}_r \times \mathbf{j}$ .

Формулы (4.3), (4.4) определяют частоты неустойчивых колебаний с чисто экспоненциальной зависимостью от времени. Для заданного значения времени развития неустойчивости

$$\tau = \frac{1}{i\omega} = \frac{r_0 \sqrt{4\pi\rho}}{\Omega |H_0|} \quad (4.5)$$

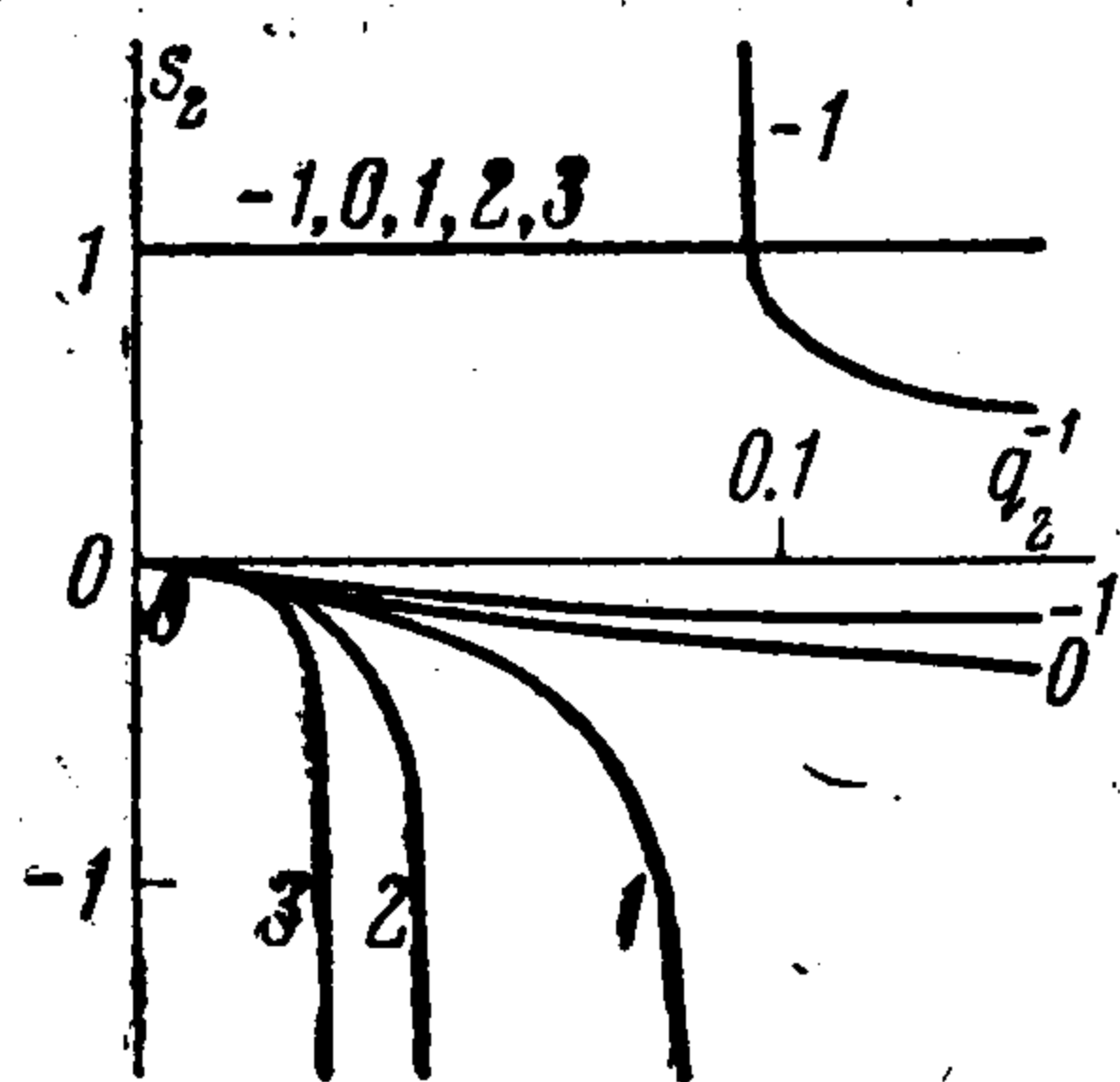
можно из (4.3), (4.4) найти значения  $q$ , т. е. проводимости, если, конечно, выполняются условия  $\lambda f_j' \gg 1$  и те, которые указаны в (4.3), (4.4).

Для более детального изучения найденных неустойчивостей надо провести анализ в первом и втором приближениях. Ограничимся случаем длинноволновых возмущений ( $k^2 r^2 \ll 1$ ), когда  $h'$  — порядка  $k$ . Если отбрасывать величины порядка  $k^2 r^2$ , то в (3.3) нужно принять, что  $Z_1 = 0$ ,  $W_{nj} = 0$ ,  $F_{11}^- = 0$ ,  $F_{12} = 0$ . В результате уравнение (3.3) сильно упрощается. Это приближение соответствует тому, что в уравнении  $\operatorname{div} \mathbf{H}^* = 0$  отбрасывается малый член  $ikH_z^*$ , тогда  $z$ -е компоненты (1.3), (1.4) вместе с условием (1.16) можно не рассматривать.

Если еще принять  $m = 1$ , то для вычисления  $U_{nj}$  и  $V_{nj}$  можно воспользоваться решением, найденным в разделе 3 работы [4]. Для случая сплошного шнура однородной плотности при  $\chi_2 = 0$ ,  $T_2 = -1$  и отсутствии токов в области  $r < r_1$  дисперсионное уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\frac{G_1}{N_1} \left\{ (\Omega^2 + 2s^2 - 2sg) \left[ \lambda r f' \left( \lambda r f' + \frac{srg' + 2sg}{\Omega^2} + 1 \right) + \frac{srg' + 2sg}{2\Omega^2} \left( 1 + \frac{rq'}{q} - \frac{rss'}{s^2 + \Omega^2} \right) \right] - 2\lambda r f'' (g - s)(2g - s) \right\}_{r=r_2} = 0 \quad (4.6)$$

При  $G_1 = 0$  корни близки к тем, которые определяются формулой (4.3). Рассмотрим теперь корни (4.6), связанные с наличием внешней границы.



После простых преобразований получим (при  $r_0 = r_2$ ,  $g_2 = 1$ )

$$q_2 = \sqrt{\frac{\Omega}{s_2^2 + \Omega^2} \left\{ \frac{2(1-s)(2-s)}{\Omega^2 + 2s^2 - 2s} - \frac{s(rg' + 2)}{\Omega^2} - \frac{1}{2} + \frac{rq'}{2q} - \frac{rss'}{2(s^2 + \Omega^2)} \right\}}_{r=r_2} \quad (4.7)$$

Имеются как вещественные, так и комплексные корни  $\Omega$ . Например, если  $s^2 \gg 1$ , то комплексные корни такие, что  $\Omega^2 + 2s^2 - 2s$  невелико (за исключением случая малых  $\Omega^2$ , когда имеет место формула (4.2) и  $\text{Re } \Omega < 0$ ). Учитывая ограничение аргумента корня в (2.10), нетрудно показать, что этим корням соответствуют затухающие во времени колебания ( $\text{Re } \Omega < 0$ ).

Рассмотрим теперь вещественные положительные корни  $\Omega$  уравнения (4.7). Будем строить зависимость  $s_2$  от  $1/q_2$  при фиксированных  $\Omega$  и других параметрах задачи. Будем изучать влияние величины скачка плотности тока на границе, причем введем несущественное для общего характера кривых предположение о равенстве нулю трех последних членов в фигурной скобке (4.7). Для значения  $\Omega = 0.2$  кривые построены на фигуре. Цифры указывают величину параметра  $r_2g_2' + 2$ , пропорциональному  $z$ -й компоненте плотности тока на внешней границе слоя.

При  $q = \infty$  вся область неустойчивости соответствует полосе  $0 < s_2 < 1$ . Для выбранного значения  $\Omega = 0.2$  имеются две точки  $s_2 = 0.98$  и  $s_2 = 0.02$ . Кривые, идущие от первой точки, почти не зависят от величины  $r_2g_2' + 2$  и приблизительно параллельны оси абсцисс. Другой характер имеют кривые, начинающиеся в точке  $s_2 = 0.02$ : при  $r_2g_2' > -2$  они уходят в область отрицательных  $s_2$  и имеют вертикальную асимптоту при значении  $q_2$ , вытекающем из формулы (4.4); при  $r_2g_2' < -2$  кривые уходят в область положительных  $s_2$ , асимптота вновь дается формулой (4.4), но кривые имеют разрыв; при  $r_2g_2' = -2$ , когда плотность продольного тока на границе не имеет разрыва, расположение областей неустойчивости слабо зависит от проводимости среды. Следует, однако, заметить, что при уменьшении плотности тока до нуля проводимость также резко падает, поэтому выведенные выше формулы для случая малых величин  $r_2g_2' + 2$  могут оказаться неприменимыми.

Таким образом, неустойчивые колебания, соответствующие формулам (4.3), (4.4), возникают при наличии разрывов в распределении объемной плотности тока. Для выбранного типа колебаний неустойчивости может не быть и при скачкообразном изменении тока  $\mathbf{j}$  на границе, если в этой области  $(\mathbf{i}_r \times \mathbf{j}) \cdot \nabla H_\varphi^* = 0$ . Например, при  $m=0$  достаточно, чтобы  $dH_z/dr$  у границы была непрерывной функцией.

**5. Об устойчивости сплошного шнура.** Изложенный выше метод асимптотического решения уравнений магнитной гидродинамики неприменим для случая сплошного хорошо проводящего цилиндра из-за наличия особенности при  $r=0$ . Небольшим видоизменением метода можно избавиться от этого ограничения.

В области малых  $r$  функция  $H_\varphi(r)$  обычно близка к линейной, а  $H_z(r)$  приблизительно постоянна. Следовательно, здесь пригодно общее решение, известное [1, 2] для случая  $q = \text{const}$ ,  $h = \text{const}$ ,  $s = \text{const}$

$$\mathbf{H}^* = \sum_{p=1}^3 \{ \nabla L_p + iy_p \mathbf{i}_z \times \nabla L_p - ik y_p^2 L_p \mathbf{i}_z \} \quad (5.1)$$

Здесь

$$L_p = C_p I_m(kr \sqrt{1 - y_p^2}) + D_p K_m(kr \sqrt{1 - y_p^2}) \quad (5.2)$$

где  $C_p$  и  $D_p$  — постоянные, а  $y_p$  — решения уравнения

$$y_p^3 + \frac{q^2(s^2 + \Omega^2)}{k^2 r_0^2 \Omega} y_p - \frac{2sq^2}{k^2 r_0^2 \Omega} = 0 \quad (p = 1, 2, 3) \quad (5.3)$$

При  $q \gg 1$  имеются два корня  $y_p$  ( $p = 1, 2$ ), для которых в главном приближении

$$kr \sqrt{1 - y_p^2} = \frac{qr}{r_0} \sqrt{\frac{s^2 + \Omega^2}{\Omega}}$$

Можно искать два ограниченных в нуле решения (2.1) — (2.2) в форме, аналогичной (2.4), но с заменой множителя  $\exp \lambda f$  на бесселевы функции, выбранные таким образом, чтобы при малых  $r$  решения переходили в указанные выше два решения ( $p = 1, 2$ ). Условия при  $r=0$  будут выполняться автоматически, поэтому достаточно удовлетворить системе (2.1) — (2.2) в соответствующем приближении по малому параметру  $\lambda^{-1}$ . Например, для компонент  $H_\varphi^*$  и  $H_z^*$  два решения записываются в форме

$$\begin{aligned} H_\varphi^* &= \lambda F' \sqrt{F} \{ (X + \dots) I_m'(\lambda F) + \lambda^{-1} Y^{(01)} I_m(\lambda F) + \dots \} \\ H_z^* &= \mp i \lambda F' \sqrt{F} \{ (X + \dots) I_m(\lambda F) + \lambda^{-1} Z^{(01)} I_m'(\lambda F) + \dots \} \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\lambda F = \frac{1}{r_0} \int_0^r q \sqrt{\frac{s^2 + \Omega^2}{\Omega}} dr \pm ik \int_0^r \frac{sg dr}{s^2 + \Omega^2} + \dots, \quad X = \frac{C}{\sqrt{rq}} (s^2 + \Omega^2)^{-\frac{3}{4}}$$

$$Y^{(01)}, Z^{(01)} \sim X$$

Нетрудно показать, что формула (4.4) для неустойчивости остается справедливой в случае сплошного шнура.

Отметим еще, что из выражений (5.4) следует, что разложения в форме (2.4) справедливы при условии  $|\lambda F(r_1)| \gg 1$ .

6. Случай сжимаемой среды. Рассмотрим устойчивость сжимаемого шнура в форме трубы в предположении, что  $p(r)$  и  $\rho(r)$  нигде в нуль не обращаются. Остальные исходные положения те же, что в п. 2.

Будем искать решение (1.7) — (1.9) в форме (2.4) — (2.5), принимая еще, что  $\Omega^2$  будет малым параметром порядка  $\lambda^{-1}$ . Формулы (2.3), (2.6) и (2.7) останутся в силе, а для  $Y$  и  $Z$  получим систему

$$2Y' + \left[ \frac{q'}{q} - \frac{5\Omega'}{2\Omega} + \frac{3(ss' + \Omega\Omega')}{s^2 + \Omega^2} + \frac{1}{r} \right] Y + \frac{2mgs}{r(s^2 + \Omega^2)} Z + \\ + \frac{mgsp'}{\gamma p(s^2 + \Omega^2)} (Y + Z) - \frac{rg\Omega^2 H_0^2 \lambda f'}{4\pi\gamma p r_0^2 (s^2 + \Omega^2)} \left( rgY + \frac{mr_0 h}{kr} Z \right) = 0 \quad (6.1)$$

$$2Z' + \left[ \frac{q'}{q} - \frac{5\Omega'}{2\Omega} + \frac{3(ss' + \Omega\Omega')}{s^2 + \Omega^2} - \frac{1}{r} \right] Z - \frac{2k^2 rgs}{m(s^2 + \Omega^2)} Y + \\ + \frac{kr_0 hsp'}{\gamma p(s^2 + \Omega^2)} (Y + Z) - \frac{krh\Omega^2 H_0^2 \lambda f'}{4\pi m \gamma p r_0 (s^2 + \Omega^2)} \left( rgY + \frac{mr_0 h}{kr} Z \right) = 0$$

Выражения (2.10), (3.1) — (3.3) сохраняют свой вид для сжимаемого шнура (нужно только в формуле для  $D_{nj}$  вместо  $(1 - \chi_j)/T_j$  подставить  $(1/T_j - \chi_j/T_j^{(*)})$ . Правая часть (3.4) несколько изменится, но пропорциональность между  $G_j$  и  $N_j$  останется. В первом приближении коэффициенты  $N_j$  с точностью до постоянного множителя равны определителю фундаментальной системы решений (6.1), взятому при  $r = r_j$ , поэтому (3.3) можно разделить на  $N_1 N_2$ . Получающееся уравнение будет представлять собой два первых члена разложения точного дисперсионного соотношения по степеням  $\lambda^{-1}$ .

В первом приближении корни дисперсионного уравнения определяются либо формулой (4.1), либо выражениями (4.2), в которых вместо  $\Omega$  подставлено  $\Omega_j = \Omega_0 \sqrt{\rho_j / \rho_0}$ . Для исследования (4.1) нужно найти решения (1.7) — (1.9) в приближении идеальной проводимости. Из (4.2) получим

$$q_j = (-1)^{j-1} \left\{ \frac{r_0 s (rs' + 2mg)}{r\Omega \sqrt{\Omega(s^2 + \Omega^2)}} \right\}_{r=r_j} \quad (j = 1, 2) \quad (6.2)$$

так что время развития неустойчивостей, происходящих из-за наличия разрывов объемной плотности тока, не зависит от предположения о несжимаемости среды. Для решений (6.2) условие малости  $\Omega^2$  удовлетворяется.

Поступила 7 VII 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. T a y l e r R. J. Stability of twisted magnetic fields in a fluid of finite electrical conductivity, Rev. Mod. Phys., 1960, 32, p. 907.
2. Б р е у с С. И. Об устойчивости жидкого цилиндра с током при конечной проводимости. ЖТФ, 1960, т. 30, стр. 1030.
3. J u k e s J. D. Stability of the sharp pinch and unpinch with finite conductivity, Phys. Fluids, 1961, 4, № 12, p. 1527.
4. В а н д а к у р о в Ю. В. К теории устойчивости жидкого проводящего цилиндра в магнитном поле. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5, стр. 877.