Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Э. А. Лидский

(Свердловск)

Рассматриваются системы, в которых объект регулирования претерпевает случайные изменения. Определяется закон регулирования из условия минимума интегрального критерия качества на конечном интервале времени. Обсуждается вопрос о существовании решения. В работе развиваются для конечного интервала времени результаты, полученные в статьях [1,2]; при изложении используется терминология, а также обозначения, введенные в статье [2].

§ 1. Пусть переходный процесс в системе описывается уравнением

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \eta, \xi) \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad \xi = \xi(t, x_1, \ldots, x_n, \eta) \qquad (1.1)$$

Здесь $x = \{x_i(t)\}$ — вектор рассогласования регулируемой величины, ξ — скаляр (управление), $\eta(t)$ — параметр, характеризующий случайные изменения во времени объекта регулирования. Функции f_i и ξ непрерывны, удовлетворяют условиям Липшица по всем аргументам.

Предполагается отсутствие искажений и запаздываний в каналах системы, т. е. управление ξ в каждый момент времени формируется на основе точной информации (знания $x(t)$, $\eta(t)$) о ходе регулирования.

Будем считать, что процесс $\eta(t)$ — марковский и является либо непрерывным ([3], стр. 307), либо чисто разрывным, ступенчатым ([4], стр. 234). Описание $\eta(t)$ произведем заданной функцией распределения

$$F(t, \alpha;\ \tau, \beta) = P\{\eta(\tau) \leqslant \beta \setminus \eta(t) = \alpha\} \qquad (\tau \geqslant t)$$

Здесь P — условная вероятность. Предполагаем, что вероятность перехода $\eta(t) = \alpha \to \eta(t) \leqslant \beta$ допускает разложение вида [4]

$$P\{\eta(\tau) = \alpha \setminus \eta(t) = \alpha\} = 1 - q(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t)$$
$$P\{\eta(\tau) \leqslant \beta, \eta(\tau) \neq \alpha \setminus \eta(t) = \alpha\} = q(t, \alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t) \qquad (1.2)$$

Здесь $q(t, \alpha)$, $q(t, \alpha, \beta)$ — известные функции; $o(\Delta t)$ — малая порядка выше, чем $\Delta t = \tau - t$. Тогда реализации $\eta^p(t)$ будут ступенчатыми, а сам процесс $\eta(t)$ является чисто разрывным.

Непрерывный процесс $\eta(t)$ рассмотрим, следуя описанию, приведенному в [3], причем предполагается существование пределов

$$A_1(t, \alpha) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} [\eta(t + \Delta t) - \alpha]\, d_\eta F(t, \alpha;\ t + \Delta t, \eta) \qquad (1.3)$$

$$B_1(t, \alpha) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} [\eta(t + \Delta t) - \alpha]^2 d_\eta F(t, \alpha;\ t + \Delta t, \eta) \qquad (1.4)$$

Предположим, что все допустимые значения η укладываются[1] в интервале $\eta_1 < \eta < \eta_2$ (причем может быть $\eta_2 = -\eta_1 = \infty$).

Зададим теперь некоторые определенно положительные по $x_1, \ldots, x_n$ функции $\omega(t, x, \xi)$ и $r[x(t)]$, определяющие критерий качества переходного процесса

$$J(x_0, \eta_0; T) = M\left\{\int_0^T \omega(t, x, \xi)\, dt + r[x(T)] \diagdown x_0, \eta_0\right\} \tag{1.5}$$

где M — символ условного математического ожидания при начальных условиях $t_0 = 0$, x_0, η_0.

Ставится задача найти управление $\xi = \xi^\circ$ так, чтобы для системы (1.1) значение функционала (1.5) при $\xi = \xi^\circ$ было бы минимальным для каждого x_0 и $\eta_0 \in (\eta_1, \eta_2)$.

Под решением системы (1.1) будем подразумевать случайную вектор-функцию $\{t, x(t), \eta(t), \xi(t, x(t), \eta(t))\}$, которая может быть строго определена как решение интегральных уравнений, соответствующих системе (1.1) ([4], стр. 248). Наглядно решение $x(t)$ можно представить себе как состоящее из реализаций $x^p(t)$, отвечающих реализациям $\eta^p(t)$ и удовлетворяющих (1.1).

Общий подход к решению задач такого типа, основанный на методе функций Ляпунова с использованием идеи динамического программирования [5] подробно изложен в работах [1, 2]. Особенности, возникающие для рассматриваемого случая, описаны ниже.

§ 2. Предположим, что найдена функция $v(t, x, \eta)$, удовлетворяющая следующим требованиям.

(а) Функция $v(t, x, \eta)$ непрерывна по всем аргументам.

(б) Производная $dM\{v\}/dt$ математического ожидания $v(t, x, \eta)$ отвечает условиям [2]

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt}\right)_{\xi^\circ} + \omega(t, x, \xi^\circ) = 0 \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt}\right)_{\xi^\circ} + \omega(t, x, \xi^\circ) = \min\nolimits_\xi \left[\frac{dM\{v\}}{dt} + \omega\right] \tag{2.2}$$

(в) При $t = T$, $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$ и всех значениях x выполняется равенство

$$v(T, x, \eta) = r[x] \tag{2.3}$$

Функции v° и ξ°, отвечающие этим требованиям, решают поставленную задачу, т. е. ξ° представляет собой оптимальное управление, а

$$v^\circ(0, x_0, \eta_0) = \min\nolimits_\xi J(x_0, \eta_0; T)$$

В дальнейшем ξ° и v° именуются оптимальными функциями.

---

[1] Для разрывного процесса $\eta(t)$ изменения η можно предполагать происходящими на отрезке $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$.

Доказательство. Рассмотрим случайную траекторию $\{x_i (x_0, \eta_0; \eta, t)\}$, порождаемую начальными условиями $t_0 = 0$, x_0, η_0.

Осредним [2] выражение (2.1) по случайным величинам $x_i (x_0, \eta_0, t)$ и $\eta (t, \eta_0)$ и проинтегрируем на отрезке времени $[0, T]$ полученное равенство

$$\frac{dM \{v (t, x, \eta)\diagdown x_0, \eta_0\}}{dt} = - M \{\omega (t, x, \xi)\diagdown x_0, \eta_0\} \tag{2.4}$$

$$v (0, x_0, \eta_0) = M \left\{\int_0^T \omega (t, x, \xi) \, dt + v (T, x (T), \eta (T))\right\} \tag{2.5}$$

С учетом (1.5), (2.3) и (2.5) имеем

$$J (x_0, \eta_0; T) = v (0, x_0, \eta_0) \tag{2.6}$$

На отрезке (0, T) функция $M \{v (t, x, \eta)\}$ является в силу (2.4) убывающей, а вследствие выполнения условий (а) и (в) знакоположительной. Докажем, что при $v = v^\circ$, $\xi = \xi^\circ$ достигается минимум интеграла (1.5).

Рассуждая от противного, предположим существование управления такого $\xi^* (t, x, \eta) \neq \xi^\circ (t, x, \eta)$, что для решений $\{t, x (t), \eta (t), \xi^* (t)\}$ уравнения (1.1) при $\xi = \xi^*$ и начальных условиях x_0 и η_0 выполняется неравенство

$$J_{\xi^*} (x_0, \eta_0; T) < J_{\xi^\bullet} (x_0, \eta_0; T) \tag{2.7}$$

Из условия (2.2) следует

$$\left(\frac{dM \{v\}}{dt}\right)_{\xi^*} \geqslant - \omega (t, x, \xi^*) \tag{2.8}$$

Производя усреднение и интегрирование (2.8) по изложенной схеме, получаем

$$v (0, x_0, \eta_0) \leqslant M \left\{\int_0^T \omega (t, x, \xi^x) \, dt + v (T, x (T), \eta (T))\right\} = J_{\xi^*} (x_0, \eta_0; T) \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) противоречит равенству (2.6) и сделанному предположению (2.7). Этим доказывается оптимальность ξ° и v°.

Примечание 2.1. Предполагается, что функции v, ξ° и ξ^* являются достаточно гладкими для того, чтобы вышеприведенные выводы были законными.

Примечание 2.2. Изложенная постановка задачи и подход к решению не меняются, если в составе правых частей уравнения (1.1) имеется импульсная помеха $\gamma = \{\gamma_i\}$, способ описания которой приведен в статье [2]. Наличие помех не вносит принципиальных отличий и в дальнейшие рассуждения. Поэтому результаты данной работы обобщаются для систем, находящихся под воздействием помехи указанного вида (§ 8).

§ 3. Для составления уравнений, определяющих v° и ξ°, необходимо знать выражение производной $dM\{v\} / dt$, составленное в силу (1.1).

Если процесс $\eta (t)$ разрывный, то, полагая $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$, имеем [2]:

$$\frac{dM \{v\}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i (t, x, \eta, \xi) +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta_2} v (t, x, \beta) \, d_\beta q (t, \eta, \beta) - q (t, \eta) v (t, x, \eta) \tag{3.1}$$

Наметим вывод выражения $dM\{v\} / dt$ для непрерывного процесса $\eta (t)$, исходя из соображений[1], аналогичных приведенным в работах [2, 7]

[1] В терминах теории вероятностных процессов производная $dM \{v\} / dt$ определяется бесконечно малым линейным производящим оператором [6]. Наглядное пояснение определения производной приведено в работе [2].

для вывода (3.1). Будем считать функцию $v(t, x, \eta)$ дифференцируемой нужное число раз по t, x, η. Определяем приращение функции v, используя разложение Тэйлора

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t}\Delta t + \sum_n \frac{\partial v}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial v}{\partial \eta}\Delta\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\Delta\eta^2 + \ldots \tag{3.2}$$

Отброшенные члены дадут после усреднения слагаемое порядка малости $o(\Delta t)$. Вычисляя математическое ожидание от (3.2) при начальных условиях $\{x_i\}$, t, η, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем с учетом (1.3), (1.4) искомую формулу

$$\frac{dM\{v\}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x, \eta, \xi) + A_1(t, \eta)\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{2}B_1(t, \eta)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \tag{3.3}$$

Уравнения, определяющие оптимальные функции $v^\circ(t, x, \eta)$, $\xi^\circ(t, x, \eta)$ в непрерывном случае, получаем[1] из условий (2.1), (2.2) с учетом (3.3)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x, \eta, \xi) + A_1(t, \eta)\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{2}B_1(t, \eta)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \omega(t, x, \xi) = 0 \tag{3.4}$$

$$\sum_n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \tag{3.5}$$

Так как решение уравнений (3.4) и (3.5) в общем случае затруднительно, то построение функций v° и ξ° можно производить приближенно, пользуясь методом введения параметра в правые части уравнения (1.1) и в критерий качества [2].

Примечание 3.1. В разрывном случае уравнение (3.4) заменяется следующим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x, \eta, \xi) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} v(t, x, \beta)\, d_\beta q(t, \eta, \beta) - v(t, x, \eta)\, q(t, \eta) + \omega(t, x, \xi) = 0$$

§ 4. Предположим, что переходный процесс описывается линейно

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t, \eta)\, x_j + c_i(t, \eta)\,\xi \tag{4.1}$$

Качество процесса оценивается интегралом

$$J(x_0, \eta_0;\ T) = M\left\{\int_0^T \left(\sum_{i,j}^n e_{ij}x_i x_j + \xi^2\right) dt + \sum_{i,j}^n d_{ij}x_i(T)\, x_j(T)\right\} \tag{4.2}$$

Здесь e_{ij}, $d_{ij} = \mathrm{const}$ — известные коэффициенты определенно положительных форм ω и r. Будем искать оптимальную функцию $v(t, x, \eta)$ в виде квадратичной формы

$$v(t, x, \eta) = \sum_{i,j}^n b_{ij}(t, \eta)\, x_i x_j \tag{4.3}$$

[1] Если управление ξ стеснено дополнительным ограничением, то минимум левой части (3.4) следует искать с учетом этого ограничения.

потребовав при этом в соответствии с пунктом (в) § 2

$$b_{ij}(T, \eta) = d_{ij} \tag{4.4}$$

Система уравнений (3.4), (3.5) с учетом (4.1), (4.2), (4.3) в случае непрерывного процесса $\eta(t)$ принимает вид

$$\sum_{i,j}^{n}\left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + A_1(t, \eta)\frac{\partial b_{ij}}{\partial \eta} + \frac{1}{2}B_1(t, \eta)\frac{\partial^2 b_{ij}}{\partial \eta^2}\right]x_i x_j +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i\xi\right) = -\left(\sum_{i,j}^{n} e_{ij}x_i x_j + \xi^2\right) \tag{4.5}$$

$$\xi = -\sum_{i=1}^{n}\left(c_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right) \tag{4.6}$$

Исключая в (4.5, 6) функцию ξ, получим, приравняв коэффициенты при произведениях $x_i x_j$

$$\frac{\partial b_{ks}}{\partial t} + A_1(t, \eta)\frac{\partial b_{ks}}{\partial \eta} + \frac{1}{2}B_1(t, \eta)\frac{\partial^2 b_{ks}}{\partial \eta^2} + \sum_{i=1}^{n}(b_{ki}a_{is} + b_{si}a_{ik}) -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_{ki}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_{si}\right) = \begin{cases} -e_{ks} & \text{при } k = s \\ 0 & \text{при } k \neq s \end{cases} \tag{4.7}$$

Полученная система (4.7) состоит из уравнений в частных производных параболического типа. Для решения ее, кроме начальных условий (4.4), необходимо, вообще говоря, на интервале $\eta_1 < \eta < \eta_2$ задать еще граничные условия при $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ для всех $t \in [0, T]$, определяемые принятым законом распределения вероятностей $F(t, \alpha; \tau, \eta)$. Однако, принимаем (§ 1), что реализации $\eta^p(t)$ в течение отрезка времени $[0, T]$ за пределы интервала (η_1, η_2) не выходят и достигают внутри него точки $t = T$. Тогда условия (4.4) полностью определяют решения $b_{ks}(t, \eta)$ системы (4.7).

Примечание 4.1. Физическим примером одномерной задачи подобного рода является распространение тепла в однородном стержне конечной длины, теплоизолированном со всех сторон, включая концы.

Для разрывного процесса $\eta(t)$, учитывая (3.1), имеем

$$\frac{\partial b_{ks}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}(b_{ki}a_{is} + b_{si}a_{ik}) + \int_{\eta_1}^{\eta_2}[b_{ks}(t, \beta) - b_{ks}(t, \eta)]\, d_\beta q(t, \eta, \beta) -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_{ki}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_{si}\right) = \begin{cases} -e_{ks} & \text{при } k = s \\ 0 & \text{при } k \neq s \end{cases} \tag{4.8}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (4.8) определяется заданием начальных условий (4.4).

§ 5. Рассмотрим вопрос о существовании решения системы (4.8). В исследуемой задаче любое управление ξ^* непрерывное и удовлетворяющее условию Липшица по x является допустимым в том смысле, что функционал (1.5) конечен на отрезке $[0, T]$ при $\xi = \xi^*$. Поэтому, предполагая допустимые управления ξ^* существующими, покажем, что среди них решение (4.8) определяет единственным образом оптимальное ξ°, обеспечивающее минимум (4.2). Введем m-мерную вектор-функцию

$$z(\eta) = \{z_i(\eta)\} = \{b_{11}(\eta), \ldots, b_{1n}(\eta), \ldots, b_{nn}(\eta)\} \qquad \left(\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2,\ m = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Обозначим через $\alpha = z(\eta)$ элементы пространства непрерывных вектор-функций $z(\eta)$ на отрезке $[\eta_1, \eta_2]$. Норму пространства $\{\alpha\}$ определим равенством

$$\|\alpha\| = \sup_\eta |z(\eta)| = \sup_\eta \left| \left(\sum_m z_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \right|$$

Векторное уравнение

$$\frac{\partial z(t, \eta)}{\partial t} = \varphi(t, z, \eta) \tag{5.1}$$

соответствующее системе (4.8), можно переписать в виде

$$\frac{d\alpha}{dt} = f(t, \alpha) \tag{5.2}$$

Заметим, что в каждый момент времени правая часть (5.2) есть оператор, определенный на непрерывных функциях $z(\eta)$, и, следовательно, при переходе к (5.2) будем иметь операторное уравнение в пространстве $\{\alpha\}$.

Покажем, что если функция $q(t, \eta, \beta)$ удовлетворяет определенным условиям, то оператор $f(t, \alpha)$ действительно переводит элементы пространства $\{\alpha\}$ в $\{\alpha\}$, т. е. преобразует непрерывные функции $\alpha = z(\eta)$ в непрерывные же функции $\psi(\eta) = f[t, z(\eta)]$ при каждом $t \in [0, T]$.

Предположим, что функция $q(t, \eta, \beta)$ допускает плотность

$$q(t, \eta, \beta) = \int_{\eta_1}^{\beta} p(t, \eta, \gamma)\, d\gamma$$

причем $p(t, \eta, \beta)$ — непрерывная функция своих аргументов.

В правой части (4.8) непрерывность всех членов по η очевидна, кроме, может быть, выражения вида

$$R(t, \eta) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} [z(\beta) - z(\eta)]\, p(t, \eta, \beta)\, d\beta$$

при каждом $z(\eta)$. Составим приращение $R(t, \eta)$ по η

$$\Delta R = \int_{\eta_1}^{\eta_2} z(\beta)\, [p(t, \eta, \beta) - p(t, \eta', \beta)]\, d\beta - [z(\eta)\, q(t, \eta) - z(\eta')\, q(t, \eta')]$$

Функция $p(t, \eta, \beta)$, определенная на замкнутом отрезке $[\eta_1, \eta_2]$, равномерно непрерывна по η. Поэтому, учитывая равенство

$$q(t, \eta) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} p(t, \eta, \beta)\, d\beta$$

имеем

$$\lim \Delta R = 0 \quad \text{при } \eta' \to \eta \tag{5.3}$$

что и доказывает непрерывность по η правых частей (4.8). Можно показать также, что оператор $f(t, \alpha)$ в уравнении (5.2) непрерывен по t

и α и удовлетворяет локально условию Коши — Липшица по α

$$\|f(t, \alpha')-f(t, \alpha'')\| \leqslant L\|\alpha'-\alpha''\| \quad \text{при } t \in [0, T] \tag{5.4}$$

Тогда в окрестности некоторой начальной точки будут удовлетворены требования локальной теоремы существования [8] решений (5.2).

Примечание 5.1. В более общем случае описания процесса $\eta(t)$ функциями $q(t, \eta)$, $q(t, \eta, \beta)$ выполнение условия (5.3) и непрерывность правых частей (5.2) по t обеспечиваются, если ограниченная при $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ и неубывающая по β функция $q(t, \eta, \beta)$ непрерывна по η и t (как по параметрам) в основном ([3], стр. 237). Тогда для доказательства можно воспользоваться теоремой Хелли, согласно которой для непрерывной функции $z(t, \beta)$ имеет место равенство

$$\lim \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} z(t', \beta)\, d_\beta q(t', \eta', \beta) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} z(t, \beta)\, d_\beta q(t, \eta, \beta) \quad \text{при } t' \to t, \quad \eta' \to \eta$$

где $\gamma_1 < \beta < \gamma_2$ — обозначение точек непрерывности интервала изменения η.

Итак, если функция $q(t, \eta, \beta)$ непрерывна в основном по η и t (в частности, когда $q(t, \eta, \beta)$ имеет непрерывную плотность $p(t, \eta, \beta)$), то уравнение (5.2) можно рассматривать как операторное, причем в окрестности начальной точки существует его единственное решение.

Найденное, таким образом, решение для окрестности точки $\{T, \alpha\}$ (условие (4.4)) можно продолжить на весь отрезок $[0, T]$ в сторону убывания t. Проверка такой возможности аналогична рассуждению, проведенному в статье [9].

§ 6. Практическим приемом построения функций $v^\circ(t, x, \eta)$ и $\xi^\circ(t, x, \eta)$ без необходимости решать систему уравнений типа (3,4, 5) является приближенный метод, описанный в статье [2]. Изложим этот метод на примере линейной системы (4.1), когда процесс $\eta(t)$ — разрывный.

Рассмотрим вспомогательную задачу, в которой вероятность перехода $\eta(t) = \alpha \to \eta(\tau) \leqslant \beta$ $(\tau > t)$ описывается следующим образом:

$$P_\vartheta\{\eta(\tau) \leqslant \beta \setminus \eta(t) = \alpha\} = F(t, \alpha;\ \tau, \beta;\ \vartheta)$$

где P_ϑ — условная вероятность при некотором фиксированном значении параметра ϑ, изменяющегося в пределах $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$ и введенного так, что в разбираемом случае описания $\eta(t)$ справедливы равенства

$$q(t, \alpha;\ \vartheta) = \vartheta q(t, \alpha), \qquad q(t, \alpha, \beta;\ \vartheta) = \vartheta q(t, \alpha, \beta)$$

Оптимальную функцию $v^\circ(t, x, \eta, \vartheta)$ будем искать в виде формы

$$v^\circ = \sum_{i,j}^{n} b_{ij}(t, \eta;\ \vartheta)\, x_i x_j$$

При $\vartheta = 0$ задача для каждого $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$ решается как детерминированная при фиксированном значении параметра $\eta = \eta_\phi$. С учетом (4.8) имеем

$$\frac{\partial b_{ks}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} (b_{ki} a_{is} + b_{si} a_{ik}) - \left(\sum_{j=1}^{n} c_i b_{ki}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_{si}\right) = -\delta_{ks} e_{ks} \quad (k, s = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

Принимая решение (6.1) за некоторое начальное и последовательно изменяя значение параметра ϑ от 0 до 1, можно находить решение исходной задачи, если известен закон изменения b_{ks} по ϑ.

Функция $v^\circ(t, x, \eta; \vartheta)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial v}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t, \eta)x_j\right]-\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2+$$

$$+\vartheta\int_{\eta_1}^{\eta_2}[v(t, x, \beta; \vartheta)-v(t, x, \eta; \vartheta)]\,d_\beta q(t, \eta, \beta)=-\sum_{i,j}^{n}e_{ij}x_ix_j \qquad (6.2)$$

Дифференцируя (6.2) по ϑ и обозначая для сокращения записи $\partial v/\partial\vartheta = g$, получаем

$$\frac{\partial g}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t, \eta)x_i\right]-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)+$$

$$+\vartheta\int_{\eta_1}^{\eta_2}[g(t, x, \beta; \vartheta)-g(t, x, \eta; \vartheta)]\,d_\beta q(t, \eta, \beta)=$$

$$=-\int_{\eta_1}^{\eta_2}[v(t, x, \beta; \vartheta)-v(t, x, \eta; \vartheta)]\,d_\beta q(t, \eta, \beta) \qquad (6.3)$$

Подставляя в (6.3) форму v°, приравняв коэффициенты при x_ix_j, получим систему уравнений, определяющих решение $b_{ks}(t, \eta; \vartheta)$ при каждом значении ϑ. Таким образом, решение, найденное выше при $\vartheta=0$, может быть продолжено до любого ϑ вплоть до единицы[1].

§ 7. Покажем, что если функции ξ°, v° решают поставленную задачу для конечного интервала времени $[0, T]$, т. е. $v^\circ(t, x, \eta)=\min J(T)$ при $\xi=\xi^\circ$, то оптимальное решение задачи при $T=\infty$ может быть найдено предельным переходом

$$v_\infty=\lim v^\circ(t, x, \eta), \qquad \xi_\infty=\lim\xi^\circ(t, x, \eta) \quad \text{при } T\to\infty$$

Рассмотрим задачу: найти

$$\min\nolimits_\xi J(x_0, \eta_0; \infty)=M\left\{\int_0^\infty\omega(t, x, \xi)\,dt\right\}$$

и сопоставим ей исследованную выше задачу о $\min J(x_0, \eta_0; T)$, полагая при этом $r[x]=0$. Предположим, что случайный параметр η может принимать лишь конечное число значений $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$, а вероятность перехода $\eta_i\to\eta_j$ описывается матрицей $\|p_{ij}\|_1^k$ следующим образом:

$$P\{\eta(t+\Delta t)=\eta_j \setminus \eta(t)=\eta_i\}=p_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$$

Для рассмотренной в § 4, 5 задачи при $T=\infty$ будет допустимым то управление, которое кроме конечности функционала (4.2) обеспечивает

---

[1] Доказательство принципиальной возможности такого продолжения здесь не рассматривается. Как отмечалось в работе [2], этот вопрос тесно смыкается с вопросом о существовании решения системы (4.8). Можно утверждать, что такая возможность следует из существования решения (4.8).

также асимптотическую устойчивость по вероятности решения $x=0$ системы (4.1). Это равносильно требованию существования определенно-положительной квадратичной формы $v(t, x, \eta)$ такой, что при допустимом ξ имеем[1]

$$\frac{dM\{v\}}{dt} \leqslant -k(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \qquad (k>0)$$

Используя этот критерий, можно указать достаточные условия существования допустимого управления для линейной системы (4.1).

Теорема 7.1. Пусть в любой фиксированный момент времени при постоянном значении η из отрезка $[\eta_1, \eta_2]$ выполняются следующие условия:

1°. Система векторов $c(t, \eta)$, $A(t, \eta)c(t, \eta), \ldots, A^{n-1}(t, \eta)c(t, \eta)$ — линейно независима.

2°. Существуют конечные оценки

$$\left|\frac{\partial a_{ij}(t, \eta)}{\partial \eta}\right| \leqslant N, \qquad \left|\frac{\partial c_i(t, \eta)}{\partial \eta}\right| \leqslant N \tag{7.1}$$

Тогда можно указать такие числа $D>0$ и $\varkappa>0$, что при выполнении неравенств

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right| \leqslant D, \qquad \left|\frac{\partial c_i}{\partial t}\right| \leqslant D \qquad \sum_{l\neq s}^{k} p_{sl}|\eta_l - \eta_s| \leqslant \varkappa \tag{7.2}$$

возможно построение допустимого управления.

Доказательство теоремы 7.1 проводится по плану, изложенному в работе ([10], стр. 832) с учетом в данном случае нестационарности системы (4.1).

Примечание 7.1. Утверждение, аналогичное теореме 7.1, можно доказать при более общем описании разрывного процесса $\eta(t)$ функциями $q(t, \alpha)$, $q(t, \alpha, \beta)$, а также и для непрерывного процесса $\eta(t)$. В первом случае взамен последнего из неравенства (7.2) в условиях теоремы должно быть

$$\left(\frac{dM\{|\eta(t)-\alpha|\}}{dt}\right)_{\tau,\alpha} = \left(\frac{dM\{|\eta(t)-\alpha \setminus \eta(\tau)=\alpha\}}{dt}\right)_{t=\tau} \leqslant \varkappa_1 \qquad (\varkappa_1>0) \tag{7.3}$$

а в последнем, с учетом (1, 3, 4)

$$|A_1(\tau, \alpha)| = \left|\frac{dM\{\eta(t)-\alpha\}}{dt}\right|_{\tau,\alpha} \leqslant \varkappa_2 \qquad (\varkappa_2>0) \tag{7.4}$$

$$B_1(\tau, \alpha) = \left(\frac{dM\{[\eta(t)-\alpha]^2\}}{dt}\right)_{\tau,\alpha} \leqslant \varkappa_2$$

Примечание 7.2. Теорема 7.1 остается справедливой, если ограничения (7.2), (7.3), или (7.4) задаются в среднем на некотором отрезке времени $[t_0, t_0+\tau]$, т. е. если выполнены условия

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right| \leqslant \Phi_1(t), \qquad \left|\frac{\partial c_i}{\partial t}\right| \leqslant \Phi_1(t) \qquad \sum_{l\neq s}^{k} p_{sl}|\eta_l - \eta_s| \leqslant \Phi_2(t) \tag{7.5}$$

---

[1] Решение $x=0$ назовем асимптотически устойчивым по вероятности, если для любых двух чисел $\varepsilon>0$ и $p>0$ можно найти такое $\delta>0$, что справедливым является неравенство

$$P\{(x_1^2 + \ldots + x_n^2) < \varepsilon^2 \setminus (x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2) \leqslant \delta^2\} > 1-p$$

и, кроме того, для любого числа $\omega>0$

$$\lim_{t\to\infty} P\{(x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t)) < \omega\} = 1$$

где $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ — непрерывные функции, подчиненные неравенствам

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Phi_1(t)\,dt \leqslant \varkappa_3, \qquad \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Phi_2(t)\,dt \leqslant \varkappa_4$$

($\varkappa_3, \varkappa_4 > 0$ — достаточно малые постоянные).

Продолжим рассмотрение линейной системы (4.1). Будем считать допустимые управления существующими при $0 < T \leqslant \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\tau}^{T} M\{\omega(t, x, \xi^*)\}\,dt < \infty \tag{7.6}$$

при некотором допустимом $\xi = \xi^*$.

Но из (7.6) вытекает, что функция $v^\circ(\tau, x, \eta)$ при любых фиксированных $\tau = t$, $x = x(t)$, $\eta = \eta(t)$ ограничена при всех $T \geqslant \tau$. Так как при этом v° не убывает с ростом T, то существует предел $v_\infty = \lim v^\circ$, причем функция $v_\infty(\tau, x, \eta)$ определенно положительна. Остается показать, что функция v_∞ и соответствующее ей управление ξ_∞ решают оптимальную задачу при $T = \infty$.

Рассмотрим подробно стационарный случай, т. е.

$$\omega = \omega(x, \xi), \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, \eta, \xi), \qquad \xi = \xi(x, \eta)$$

Тогда при $T = \infty$ за начальную точку может быть принят любой момент времени. Поэтому достаточно провести исследование для функции $v^\circ(0, x, \eta)$. Имеем

$$v^\circ(0, x, \eta) = M\left\{\int_0^T \omega(x, \xi^\circ)\,dt\right\} = \min\nolimits_\xi M\left\{\int_0^T \omega(x, \xi)\,dt\right\} \tag{7.7}$$

При $T = \infty$ функционал (7.7) имеет нижнюю грань v^* по множеству допустимых $\xi = \xi^*$. Допустим от противного, что

$$v^* = \inf\nolimits_\xi M\left\{\int_0^\infty \omega(x, \xi)\,dt\right\} \neq v_\infty$$

Пусть, например,

$$v^* < v_\infty \tag{7.8}$$

Но тогда существует ξ_∞^{**} такое, что выполняется неравенство

$$v^{**}(0, x, \eta) = M\left\{\int_0^\infty \omega(x, \xi^{**})\,dt\right\} < v_\infty$$

Очевидно, $v^\circ < v^{**}$. С ростом T функция v° стремится к значению, равному v_∞, поэтому в пределе при $T = \infty$ получаем

$$v_\infty \leqslant v^{**}$$

что противоречит предположению (7.8). Пусть теперь

$$v_\infty < v^* \tag{7.9}$$

Обозначим $\xi_0^*(0, x, \eta) = \lim \xi^\circ(0, x, \eta)$ при $T \to \infty$. Существование этого предела и линейность $\xi_0^*(0, x, \eta)$ по x следует из существования предела $v^\circ(0, x, \eta)$ при $T \to \infty$ и из формулы (4.6). Отметим равномерность ξ_0^* по η при фиксированном x.

Так как v^* — нижняя грань по ξ оптимизируемого функционала, то неравенство (7.9) не может выполняться, если ξ_0^* принадлежит к допустимым управлениям и, более того, если

$$M\left\{\int_0^\infty \omega(x, \xi_0^*)\,dt\right\} = v_\infty \tag{7.10}$$

Покажем, что на самом деле (7.10) выполняется. Выберем число $T_1 > T$ так, чтобы в каждый момент времени на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ выполнялось неравенство (при всех возможных η)

$$|\xi_1(0, x, \eta) - \xi_0^*(0, x, \eta)| \leqslant \delta \tag{7.11}$$

где δ — наперед заданное сколь угодно малое число, ξ_1 — соответствует отрезку $[0, T_1]$.

Вследствие интегральной непрерывности из (7.11) следует, что

$$\left| M\left\{\int_0^T \omega(x, \xi_1)\,dt\right\} - M\left\{\int_0^T \omega(x, \xi_0^*)\,dt\right\}\right| \leqslant \gamma(\delta)$$

причем $\gamma \to 0$ при $\delta \to 0$

Отсюда

$$M\left\{\int_0^T \omega(x, \xi_0^*)\,dt\right\} < M\left\{\int_0^T \omega(x, \xi_1)\,dt\right\} + \gamma(\delta) \leqslant v_\infty + \gamma(\delta) \tag{7.12}$$

В силу произвольной малости γ из формул (7.12) вытекает, что при всех $T > 0$

$$M\left\{\int_0^T \omega(x, \xi_0^*)\,dt\right\} \leqslant v_\infty \tag{7.13}$$

Из (7.13) вытекает, что при $T = \infty$ получаем (7.10). Этим завершается доказательство. Итак,

$$v_\infty(0, x, \eta) = \min_\xi M\left\{\int_0^\infty \omega(x, \xi)\,dt\right\} = \lim_{T\to\infty} v^\circ(0, x, \eta)$$

$$\xi_\infty(0, x, \eta) = \lim_{T\to\infty} \xi^\circ(0, x, \eta)$$

Таким образом, из обоснованного в § 5 для линейных систем существования решения на конечном интервале $[0, T]$ и существования допустимого управления при $T = \infty$ следует существование решения оптимальной задачи при $T = \infty$.

Рассмотренный предельный переход может быть использован для приближенных вычислений при $T = \infty$.

§ 8. Изложим решение задачи, когда переходный процесс описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \eta)x + c(t, \eta)\xi + \gamma(t) \tag{8.1}$$

где вектор-функция $\{\gamma_i(t)\}$ — случайная импульсная помеха.

Предполагается, что $\gamma_i(t)$ может быть представлена в виде

$$\gamma_i = \sum_k \mu_i \nu_i(t_k)\,\delta(t - t_k)$$

Здесь $\nu_i(t)$ — случайная величина, вектор $\mu = \{\mu_i\} = \mathrm{const}$, $\delta(t)$ есть δ-функция.

Случайные моменты импульсов t_k распределены по оси t по Пуассону с частотой λ. Можно подсчитать[7] величину единичного скачка i-й координаты $\Delta x_i \approx \mu_i \nu_i$, возникающего за достаточно малый отрезок времени Δt с вероятностью $P[\Delta t] \approx \lambda \Delta t$. Будем считать, что $M\{\nu_i\} = 0$; известна дисперсионная матрица $\|\sigma_{ij}\|_1^n$ с коэффициентами $\sigma_{ij} = M\{\nu_i \nu_j\}$. (Подробное описание таких помех приведено в работе [11], стр. 63.)

В остальном уравнение (8.1) не отличается от (4.1). Качество переходного процесса на отрезке $[0, T]$ оценим интегралом (4.2).

Для уравнения (4.1) при $\{\gamma_i\} \equiv 0$ оптимальная функция $v(t, x, \eta)$ на отрезке $[0, T]$ может быть найдена (§ 4) в виде квадратичной формы (4.3) из уравнений вида (4.5—6) (или (4.6), (4.8)) при заданных начальных условиях (4.4).

При этом условие (2.1) принимает вид

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt}\right)_{\gamma=0} = -\sum_{i,j}^{n} e_{ij} x_i x_j - \xi^2 \tag{8.2}$$

Вычисляя выражение производной $dM\{v\}/dt$ в силу системы (8.1) при $\gamma \neq 0$, получаем [10]

$$\frac{dM\{v\}}{dt} = \left(\frac{dM\{v\}}{dt}\right)_{\gamma=0} + s(t, \eta) \qquad \left(s(t, \eta) = \lambda \sum_{i,j}^{n} b_{ij}(t, \eta)\,\mu_i \mu_j \sigma_{ij}\right) \tag{8.3}$$

где $s(t, \eta)$ — неотрицательная функция.

Построим теперь функцию $V(t, x, \eta)$ следующим образом:

$$V(t, x, \eta) = v(t, x, \eta) + v_1(x, \eta) \tag{8.4}$$

В правой части (8.4) первое слагаемое — найденная выше квадратичная форма, а второе определим условиями

$$\frac{dM\{v_1\}}{dt} = -s(t, \eta), \qquad v_1(T, \eta(T)) = 0 \tag{8.5}$$

Заметим, что, используя (8.5), можно показать, что

$$V(t, x, \eta) = \sum_{i,j}^{n} b_{ij}(t, \eta)\,x_i x_j + M\left\{\int_t^T s(\tau, \eta(\tau))\,d\tau\right\}$$

Учитывая (8.2—5), для производной $dM\{V\}/dt$ в силу уравнения (8.1) получаем

$$\frac{dM\{V\}}{dt} = -\sum_{i\ j}^{n} e_{ij} x_i x_j - \xi^2 \tag{8.6}$$

Можно проверить, что построенная функция $V(t, x, \eta)$ удовлетворяет условию оптимальности (2.2). Таким образом, эта функция является оптимальной. Оптимальное же управление ξ°, соответствующее V, остается тем же, что и в случае $\{\gamma_i\} \equiv 0$, т. е. ξ° находится по формуле (4.6).

Примечание 8.1. Если $\{\gamma_i\} \neq 0$, то

$$M \left\{ \sum_{i, j}^{n} e_{ij} x_i x_j \right\}$$

вообще говоря, не стремится к нулю при $T \to \infty$. Поэтому интеграл (4.2) при $T \to \infty$ не будет сходиться. Оценим качество процесса критерием

$$J^{(\gamma)}(x_0, \eta_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M \left\{ \sum_n x_i^2 + \xi^2 \right\} dt \tag{8.7}$$

Решение задачи в такой постановке осуществляется переходом при $T \to \infty$ от известного для отрезка $[0, T]$ оптимального решения $\{V, \xi^\circ\}$. Предельный переход обосновывается подобно тому, как это сделано выше. В результате получим, что

$$\xi_\infty = \lim_{T \to \infty} \xi^\circ, \qquad \min_\xi J^{(\gamma)}(x_0, \eta_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\{s(t, \eta(t))\}\, dt$$

При оформлении статьи автору стала известна работа Р. Е. Калмана [12], где рассматриваются случайно изменяющиеся системы дискретного типа, причем в доказательствах используется предельный переход, подобный описанному в § 7.

Поступила 1 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 4, 5, 6; 1961, т. XXII, № 4.
2. Красовский Н. Н. и Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 9, 10, 11.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961.
4. Дуб Дж. Вероятностные процессы. ИЛ, 1956.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, 1960.
6. Дынкин Е. Б. Марковские процессы и полугруппы операторов. Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятностей и ее применение, 1956, т. I, № 1.
7. Кац И. Я. и Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. XXIV, № 5.
8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, 1961.
9. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1962, т. XXIV, № 2.
10. Лидский Э. А. О стабилизации стохастических систем. ПММ, 1961, т. XXV, № 5.
11. Лэннинг Дж., Бэттин Р. Случайные процессы в системах автоматического управления. М., ИЛ, 1958.
12. Kalman R. E. Control of randomly varying linear dynamical systems. Proc. of Symposia in Applied Math., 1962, vol. 13.