Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КАБИНЕ СПУТНИКА

А. И. Лурье

(Ленинград)

1. Рассмотрение задачи начнем со случая свободного полета спутника. Тогда уравнение движения его центра инерции C записывается в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{OC}$ — вектор-радиус точки C, имеющий начало в центре Земли; μ — произведение ее массы и постоянной тяготения [1]. Силы негравитационного происхождения по предположению отсутствуют.

Положение точки M, падающей в кабине спутника, определим вектором-радиусом $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{CM}$; ее уравнение движения будет

$$\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}|^3}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}) \tag{1.2}$$

Исключив из него $\ddot{\mathbf{r}}$ при помощи уравнения (1.1) и ограничившись линейными относительно $\boldsymbol{\rho}$ слагаемыми, придем к уравнению

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mu}{r^3}\left(3\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\rho}}{r^2}\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}\right) \tag{1.3}$$

правая часть которого характеризует неоднородность поля тяготения в кабине спутника. Это — уравнение в вариациях для уравнения движения центра инерции (1.1). Общий интеграл последнего, содержащий шесть постоянных, за которые можно принять эллиптические элементы орбиты

$$a,\ e,\ t_0,\ \Omega,\ i,\ \omega \tag{1.4}$$

известен; производные вектора-радиуса $\mathbf{r}$ по этим постоянным, как известно, представляют решения уравнения в вариациях (1.3).

---

[1] Пренебрегаем слагаемыми, зависящими от несферичности Земли, а также слагаемыми, пропорциональными квадратам отношений главных центральных радиусов инерции к радиусу-вектору $\mathbf{r}$. При учете последней поправки в правую часть уравнения (1.1) следует внести слагаемое

$$+\frac{3\mu}{Mr^5}\mathbf{r}\cdot\left(-\frac{1}{2}E\vartheta + \frac{5E}{2r^2}\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\Theta}^c\cdot\mathbf{r} - \boldsymbol{\Theta}^c\right)$$

в котором $\boldsymbol{\Theta}^c$ — центральный тензор инерции спутника, ϑ — первый инвариант этого тензора (сумма центральных моментов инерции), E — единичный тензор, M — масса спутника. При учете этой поправки в правую часть уравнения (1.2), по-видимому, пришлось бы также внести слагаемые, зависящие от притяжения точки массами в спутнике.

Составив некоторые линейные относительно этих производных выражения, придем к системе функций

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \left[\frac{r}{a} - \frac{3n(t-t_0)}{2\sqrt{1-e^2}}\, e\sin\varphi\right]\mathbf{e}_r - \frac{3n(t-t_0)}{2\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi \\
\mathbf{q}_2 &= -\cos\varphi\,\mathbf{e}_r + \frac{2+e\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \qquad (\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_r) \\
\mathbf{q}_3 &= \sin\varphi\,\mathbf{e}_r + \frac{2+e\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \qquad (\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r) \\
\mathbf{q}_4 &= \frac{r}{a}\mathbf{e}_\varphi, \qquad \mathbf{q}_5 = \frac{r}{a}\cos\varphi\,\mathbf{e}_3, \qquad q_6 = \frac{r}{a}\sin\varphi\,\mathbf{e}_3
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Здесь $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы орбитального триэдра спутника; $\mathbf{e}_3$ — нормаль к плоскости орбиты.

Через φ обозначена истинная аномалия, выражение радиуса-вектора r имеет вид:

$$
r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}
\tag{1.6}
$$

Постоянные t_0 и n обозначают время прохождения перигея и среднее движение (круговую частоту обращения на орбите). Учитывая хорошо известные в теории кеплерова движения соотношения

$$
\dot\varphi = n\sqrt{1-e^2}\,\frac{a^2}{r^2}, \qquad \dot r = \frac{nea}{\sqrt{1-e^2}}\sin\varphi, \qquad \dot{\mathbf{e}}_r = \dot\varphi\mathbf{e}_\varphi, \qquad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot\varphi\mathbf{e}_r, \qquad \dot{\mathbf{e}}_3 = 0
\tag{1.7}
$$

составим теперь выражения производных векторов $\mathbf{q}_s$ по времени:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1 &= -n\left\{\left[\frac{e\sin\varphi}{2\sqrt{1-e^2}} - \frac{3}{2}n(t-t_0)\frac{a^2}{r^2}\right]\mathbf{e}_r + \frac{1+e\cos\varphi}{2\sqrt{1-e^2}}\mathbf{e}_\varphi\right\} \\
\dot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{n}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a}{r}\left(-\sin\varphi\mathbf{e}_r + \frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\mathbf{e}_\varphi\right) \\
\dot{\mathbf{q}}_3 &= -\frac{n}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a}{r}\left(\cos\varphi\mathbf{e}_r + \frac{\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}\mathbf{e}_\varphi\right) \\
\dot{\mathbf{q}}_4 &= \frac{n}{\sqrt{1-e^2}}[(1+e\cos\varphi)\mathbf{e}_r + e\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi] \\
\dot{\mathbf{q}}_5 &= \frac{-n}{\sqrt{1-e^2}}\sin\varphi\mathbf{e}_3, \quad \dot{\mathbf{q}}_6 = \frac{n}{\sqrt{1-e^2}}(\cos\varphi+e)\,\mathbf{e}_3
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Векторы $\mathbf{q}_s$ и $\dot{\mathbf{q}}_s$ образуют систему интегралов уравнения движения (1.3) точки M. Квадратную 6×6 матрицу проекций этих векторов на оси орбитального триэдра можно в последующем рассмотрении заменить двумя матрицами 4×4 и 2×2:

$$
\begin{Vmatrix}
\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{e}_r & \mathbf{q}_2\cdot\mathbf{e}_r & \mathbf{q}_3\cdot\mathbf{e}_r & \mathbf{q}_4\cdot\mathbf{e}_r \\
\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{q}_2\cdot\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{q}_3\cdot\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{q}_4\cdot\mathbf{e}_\varphi \\
\dot{\mathbf{q}}_1\cdot\mathbf{e}_r & \dot{\mathbf{q}}_2\cdot\mathbf{e}_r & \dot{\mathbf{q}}_3\cdot\mathbf{e}_r & \dot{\mathbf{q}}_4\cdot\mathbf{e}_r \\
\dot{\mathbf{q}}_1\cdot\mathbf{e}_\varphi & \dot{\mathbf{q}}_2\cdot\mathbf{e}_\varphi & \dot{\mathbf{q}}_3\cdot\mathbf{e}_\varphi & \dot{\mathbf{q}}_4\cdot\mathbf{e}_\varphi
\end{Vmatrix} = \alpha, \qquad
\begin{Vmatrix}
\mathbf{q}_5\cdot\mathbf{e}_3 & \mathbf{q}_6\cdot\mathbf{e}_3 \\
\dot{\mathbf{q}}_5\cdot\mathbf{e}_3 & \dot{\mathbf{q}}_6\cdot\mathbf{e}_3
\end{Vmatrix} = \beta
\tag{1.9}
$$

Определители $|\alpha|$ и $|\beta|$ этих матриц являются вронскианами двух систем линейных уравнений четвертого и второго порядков, получающихся при проектировании векторного уравнения (1.3) на оси орбитального триэдра; диагональные элементы в матрицах коэффициентов правых частей этих уравнений отсутствуют, поэтому вронскианы постоянны; их легко вычислить, полагая $t = t_0$ и $\varphi = 0$. Находим

$$|\alpha| = -\tfrac{1}{2}n^2, \qquad |\beta| = n\sqrt{1-e^2} \tag{1.10}$$

Таким образом, решения (1.5) и (1.8) линейно независимы; они остаются таковыми и в случае круговой орбиты (при $e = 0$). Это достигнуто благодаря тому, что были выбраны надлежащие линейные комбинации производных вектора-радиуса $\mathbf{r}$ по постоянным (1.4).

Ниже понадобится знание обратных матриц

$$\gamma = \alpha^{-1}, \qquad \delta = \beta^{-1} \tag{1.11}$$

Вычисление γ достаточно громоздко, но его можно частично избежать, учитывая наличие связи элементов третьей и четвертой строк этой матрицы с производными эллиптических элементов, известными в теории возмущений эллиптических элементов. Выражение матриц γ и δ приведено в конце статьи (стр. 9).

Векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, определяющие положение падающей точки M в кабине спутника и ее скорость в системе осей с началом в центре инерции C и движущихся поступательно, теперь представляются в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{s=1}^{6} C_s \mathbf{q}_s, \qquad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{s=1}^{6} C_s \dot{\mathbf{q}}_s \tag{1.12}$$

Мы будем считать известным вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ системы осей $Cxyz$, неизменно связанных со спутником. Тогда, обозначая через $\overset{*}{\boldsymbol{\rho}}$ вектор скорости точки M относительно этих осей (относительно кабины), имеем

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \overset{*}{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \tag{1.13}$$

Поэтому, приняв здесь и во всем дальнейшем, что отделение точки M от кабины происходит с нулевой относительной скоростью, имеем такие начальные условия

$$t = t_*, \qquad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^\circ, \qquad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega}^\circ \times \boldsymbol{\rho}^\circ \tag{1.14}$$

Заметим, что при таком безударном отделении точки M вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ останется непрерывным. Выражения постоянных C_s в решении (1.12) теперь записывается в виде:

$$C_s = \gamma_{s1}{}^\circ \boldsymbol{\rho}^\circ \cdot \mathbf{e}_r{}^\circ + \gamma_{s2}{}^\circ \boldsymbol{\rho}^\circ \cdot \mathbf{e}_\varphi{}^\circ + \gamma_{s3}{}^\circ (\boldsymbol{\omega}^\circ \times \boldsymbol{\rho}^\circ) \cdot \mathbf{e}_r{}^\circ + \gamma_{s4}{}^\circ (\boldsymbol{\omega}^\circ \times \boldsymbol{\rho}^\circ) \cdot \mathbf{e}_\varphi^\circ$$
$$(s = 1, 2, 3, 4) \tag{1.15}$$
$$C_{4+k} = \delta_{k1}{}^\circ \boldsymbol{\rho}^\circ \cdot \mathbf{e}_3 + \delta_{k2}{}^\circ (\boldsymbol{\omega}^\circ \times \boldsymbol{\rho}^\circ) \cdot \mathbf{e}_3 \qquad (k = 1, 2)$$

Сравнительно простое выражение вектора $\boldsymbol{\rho}$ получим в частном случае, когда отделение точки M от кабины происходит в момент прохождения перигея ($t_* = t_0$, $\varphi = 0$) и спутник в этот момент стабилизирован в орбитальных осях ($\omega^\circ = \mathbf{e}_3\dot\varphi^\circ$). Тогда

$$\rho = \left[\frac{2(2+e)}{1-e^2}\mathbf{q}_1 + \frac{3(1+e)}{1-e}\mathbf{q}_2\right]\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_r^\circ + \frac{1}{1-e}\mathbf{q}_4\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_\varphi^\circ + \frac{(1+e)\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \qquad (1.16)$$

а в случае круговой орбиты ($e = 0$, $\varphi = nt$)

$$\rho - \rho_0 = \mathbf{e}_3\times\rho^\circ\sin\varphi - \rho^\circ(1-\cos\varphi) + \\ + 3\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_r^\circ\times[(1-\cos\varphi)\mathbf{e}_r - 2(\varphi-\sin\varphi)\mathbf{e}_\varphi] \qquad (1.17)$$

На круговой орбите в общем случае (т. е. при $\omega^\circ \neq \mathbf{e}_3 n$) получаем (можно принять $t_* = 0$)

$$\rho - \rho^\circ = \frac{1}{n}\omega^\circ\times\rho^\circ\sin\varphi + \\ + (1-\cos\varphi)\left\{-\rho^\circ + \left[\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_r^\circ + 2\left(\frac{\omega^\circ}{n}\times\rho^\circ\right)\cdot\mathbf{e}_\varphi^\circ\right]\mathbf{e}_r - \right. \\ \left. - 2\left[\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_\varphi^\circ + \frac{1}{n}(\omega^\circ\times\rho^\circ)\cdot\mathbf{e}_r^\circ\right]\mathbf{e}_\varphi\right\} - \\ - 3(\varphi-\sin\varphi)\left[\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_r^\circ + \frac{1}{n}(\omega^\circ\times\rho^\circ)\cdot\mathbf{e}_\varphi^\circ\right]\mathbf{e}_\varphi + \\ + \sin\varphi\left\{\left[\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_\varphi^\circ + \frac{1}{n}(\omega^\circ\times\rho^\circ)\cdot\mathbf{e}_r^\circ\right](\mathbf{e}_r^\circ - \mathbf{e}_r^\circ) - \right. \\ \left. - \left[\rho^\circ\cdot\mathbf{e}_r^\circ - \frac{1}{n}(\omega^\circ\times\rho^\circ)\cdot\mathbf{e}_\varphi^\circ\right](\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\varphi^\circ)\right\} \qquad (1.18)$$

При $\omega^\circ = \mathbf{e}_3 n$ возвращаемся к выражению (1.17); в стабилизированном (при $t = 0$) в инерциальных осях спутнике $\omega^\circ = 0$ и слагаемые первой степени относительно $\varphi = nt$ отпадают.

Пренебрегая неоднородностью поля тяготения на протяжении спутника и при тех же начальных условиях (1.14), имели бы

$$\ddot\rho = 0, \qquad \rho - \rho^\circ = \frac{1}{n}\omega^\circ\times\rho^\circ nt \qquad (1.19)$$

и сравнение с (1.18) показывает, что влияние неоднородности обнаруживается в слагаемых порядка $(nt)^2$.

Возвращаясь к (1.18), совместим инерциальные оси с орбитальными осями в момент $t = 0$ (т. е. с направлениями $\mathbf{e}_r^\circ$, $\mathbf{e}_\varphi^\circ$, $\mathbf{e}_3$) и обозначим через ψ, ϑ, χ эйлеровы углы, определяющие в этих осях направления осей системы $Cxyz$. Здесь ψ (тангаж) — угол поворота вокруг нормали к плоскости орбиты $\mathbf{e}_3$, ϑ (рысканье) — угол поворота вокруг смещенного при этом повороте направления $\mathbf{e}_r^\circ$ (вертикали в спутнике до поворота), χ (крен) — угол поворота вокруг сместившегося при двух первых поворотах направления $\mathbf{e}_\varphi^\circ$. Последнее направление называем осью Cx, а осями Cy и Cz будут направления, в которые сместились $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_r^\circ$. Считая эйлеровы углы малыми, имеем следующие таблицы косинусов:

(1.20)

	x	y	z
$\mathbf{e}_\varphi^\circ$	1	$-\vartheta$	ψ
$\mathbf{e}_3^\circ$	ϑ	1	$-\chi$
$\mathbf{e}_r^\circ$	$-\psi$	χ	1

	x	y	z
$\mathbf{e}_\varphi$	$\cos\varphi + \psi\sin\varphi$	$-\vartheta\cos\varphi - \chi\sin\varphi$	$\psi\cos\varphi - \sin\varphi$
$\mathbf{e}_3$	ϑ	1	$-\chi$
$\mathbf{e}_r$	$\sin\varphi - \psi\cos\varphi$	$-\vartheta\sin\varphi + \chi\cos\varphi$	$\cos\varphi + \psi\sin\varphi$

и выражение вектора угловой скорости

$$\frac{1}{n}\omega = \left(\frac{\dot{\chi}}{n} + \vartheta\right)\mathrm{i}_x + \left(\frac{\dot{\psi}}{n} + 1\right)\mathrm{i}_y + \left(\frac{\dot{\vartheta}}{n} - \chi\right)\mathrm{i}_z \tag{1.21}$$

Теперь нетрудно написать выражения текущих координат x, y, z (проекций ρ) падающей точки через ее начальные координаты x_0, y_0, z_0. В эти формулы войдут углы ψ, ϑ, χ, их начальные значения (в момент отделения точки от кабины) и начальные значения их производных.

2. Более трудна задача о падении точки в кабине спутника, когда на спутник действуют и негравитационные силы; ускорение, создаваемое этими силами, назовем f. Тогда уравнение движения центра инерции спутника будет

$$\ddot{\mathrm{r}}^* = -\frac{\mu}{r^{*3}}\mathrm{r}^* + \mathrm{f} \tag{2.1}$$

Уравнение движения точки M, конечно, сохранит вид (1.2), а по исключении $\ddot{\mathrm{r}}^*$, вместо (1.3) придем к уравнению

$$\ddot{\rho} = \frac{\mu}{r^{*}_3}\left(3\,\frac{\mathrm{r}^*\cdot\rho}{r^2}\mathrm{r}^* - \rho\right) - \mathrm{f} \tag{2.2}$$

Сохранение в нем слагаемых первой группы, порядок которых $g|\rho|/r \approx 10^{-6} - 10^{-7}g$, имеет смысл лишь для достаточно малых значений $|\mathrm{f}|$, т. е. для сил порядка, скажем, $1-10$ *г* на тонну. Но для таких сил и даже для сил, превосходящих их на несколько порядков (скажем, 1 *кГ* на тонну), слагаемое f в правой части (2.1) будет весьма мало по сравнению с силой притяжения и для небольших промежутков времени (одного, двух оборотов) допустимо рассматривать f как слагаемое, возмущающее основное кеплерово движение центра инерции спутника. Поэтому, полагая

$$\mathrm{r}^* = \mathrm{r} + \delta\mathrm{r} \tag{2.3}$$

где r — определяет кеплерово движение и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1), приходим к неоднородному линейному дифференциальному уравнению

$$(\delta\mathrm{r})^{\cdot\cdot} = \frac{\mu}{r^3}\left(3\,\frac{\mathrm{r}\cdot\delta\mathrm{r}}{r^2}\mathrm{r} - \delta\mathrm{r}\right) + \mathrm{f} \tag{2.4}$$

в котором f принимается заданным на кеплеровой (а не на истинной) орбите центра инерции спутника.

Общее решение соответствующего однородного уравнения известно. Применяя метод вариации постоянных, полагаем

$$\delta\mathrm{r} = \sum_{s=1}^{6} D_s(t)\,\mathrm{q}_s, \qquad (\delta\mathrm{r})^{\cdot} = \sum_{s=1}^{6} D_s(t)\,\dot{\mathrm{q}}_s \tag{2.5}$$

и для определения $D_s(t)$ приходим к системе линейных уравнений

$$\sum_{s=1}^{6} \dot{D}_s(t)\,\mathrm{q}_s = 0. \qquad \sum_{s=1}^{6} \dot{D}_s(t)\,\dot{\mathrm{q}}_s = \mathrm{f} \tag{2.6}$$

При помощи матриц γ и δ получаем (2.7)

$$D_s(t)=\int_{t_*}^{t}(\gamma_{s3}\mathbf{e}_r+\gamma_{s4}\mathbf{e}_\varphi)\cdot\mathbf{f}dt \quad (s=1,2,3,4),\qquad D_{4+k}=\int_{t_*}^{t}\delta_{k2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_3\,dt \quad (k=1,2)$$

и тогда

$$\delta\mathbf{r}=0,\qquad (\delta\mathbf{r})^{\cdot}=0 \qquad \text{при } t=t_* \tag{2.8}$$

Теперь введем в рассмотрение геометрическую сумму $\boldsymbol{\rho}+\delta\mathbf{r}$; тогда, пренебрегая величинами порядка произведений $|\boldsymbol{\rho}|\,|\delta\mathbf{r}|$ из уравнений (2.2) и (2.4) получим однородное линейное уравнение

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}+(\delta\mathbf{r})^{\cdot\cdot}=\frac{\mu}{r^3}\left[3\frac{\mathbf{r}}{r^2}\mathbf{r}\cdot(\boldsymbol{\rho}+\delta\mathbf{r})-(\boldsymbol{\rho}+\delta\mathbf{r})\right] \tag{2.9}$$

решение которого вида (1.12) известно. Итак

$$\boldsymbol{\rho}=\sum_{s=1}^{6}\mathbf{q}_s\,C_s-\delta\mathbf{r} \tag{2.10}$$

причем вследствие (2.8) постоянные C_s определяются теми же формулами (1.15), что и ранее.

Наиболее интересен случай силы аэродинамического сопротивления; ускорение, создаваемое этой силой, может иметь тот же порядок величины, что и ускорение, определяемое неоднородностью поля тяготения, так что применение приведенных соотношений вполне уместно.

Выражение $\mathbf{f}$ здесь представляется в виде

$$\mathbf{f}=-\lambda(r,v)\,\mathbf{v}=-\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\lambda(r,v)\left[e\sin\varphi\mathbf{e}_r+(1+e\cos\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right] \tag{2.11}$$

В случае круговой орбиты весьма простое вычисление дает по вышеприведенным формулам

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}^*+\frac{2\lambda(a,an)}{n}a\left[\mathbf{e}_r(\varphi-\sin\varphi)+2\mathbf{e}_\varphi\left(1-\cos\varphi-\frac{3}{8}\varphi^2\right)\right] \tag{2.12}$$

где ρ^* определяется формулой (1.18). Отбросив в (2.2) слагаемые, обусловленные неоднородностью поля тяготения, имеем

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}=-\mathbf{f},\qquad \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}^*-\int_{t_*}^{t}(t-t')\,\mathbf{f}(t')\,dt' \tag{2.13}$$

причем здесь $\boldsymbol{\rho}^*$ определяется по (1.19). Заменив вектор $\mathbf{f}(t')$ его проекциями на оси орбитального триедра центра инерции спутника и замечая, что оси в точке t получаются путем поворота вокруг $\mathbf{e}_3$ на угол $\varphi-\varphi'$ осей в точке t', представим (2.13) еще в виде (2.14)

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}^*-\mathbf{e}_r\int_{t_*}^{t}(t-t')\left[\mathbf{f}(t')\cdot\mathbf{e}_r'\cos(\varphi-\varphi')+\mathbf{f}(t')\cdot\mathbf{e}_\varphi'\sin(\varphi-\varphi')\right]dt'-$$
$$-\mathbf{e}_\varphi\int_{t_*}^{t}(t-t')\left[-\mathbf{f}(t')\cdot\mathbf{e}_r'\sin(\varphi-\varphi')+\mathbf{f}(t')\cdot\mathbf{e}_\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\right]dt'$$

Например, для силы аэродинамического сопротивления (2.11) и при движении по круговой орбите

$$\rho = \rho^* + \frac{a\lambda\,(a,\,an)}{n}\,[\mathbf{e}_r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \mathbf{e}_\varphi(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)] \quad (2.15)$$

Низшие члены разложения в ряд по степеням φ слагаемого, определяемого наличием силы $\mathbf{f}$, совпадают с получаемыми по формуле (2.12). Неоднородность поля тяготения на протяжении кабины обнаруживается при длительных падениях.

Приложение. Элементы матриц γ и δ имеют выражения

$$\gamma_{11} = 2\frac{a^2}{r^2}, \qquad \gamma_{12} = 0, \qquad \gamma_{13} = \frac{2e\sin\varphi}{n\sqrt{1-e^2}}, \qquad \gamma_{14} = \frac{2(1+e\cos\varphi)}{n\sqrt{1-e^2}}$$

$$\gamma_{21} = \frac{(1+e\cos\varphi)(e+\cos\varphi)}{1-e^2}, \qquad \gamma_{22} = \sin\varphi, \qquad \gamma_{23} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n}\sin\varphi,$$

$$\gamma_{24} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n}\,\frac{e + 2\cos\varphi + e\cos^2\varphi}{1+e\cos\varphi}$$

$$\gamma_{31} = \frac{3n(t-t_0)}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{a^2}{r^2}\,e - \frac{1+e\cos\varphi+e^2}{1-e^2}\sin\varphi, \qquad \gamma_{32} = \cos\varphi,$$

$$\gamma_{33} = \frac{1}{n}\left[3\,\frac{n(t-t_0)}{1-e^2}\,e^2\sin\varphi - \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\varphi}\,(2e - \cos\varphi - e\cos\varphi)\right]$$

$$\gamma_{34} = \frac{1}{n}\left[-\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\varphi}\,(2+e\cos\varphi)\sin\varphi + \frac{3n(t-t_0)}{1-e^2}\,(1+e\cos\varphi)\,e\right]$$

$$\gamma_{41} = \frac{3n(t-t_0)}{(1-e^2)^{3/2}}\,\frac{a^2}{r^2} - e\sin\varphi\,\frac{2+e\cos\varphi}{(1-e^2)^2}, \qquad \gamma_{42} = \frac{-1}{1-e^2}$$

$$\gamma_{43} = \frac{1}{n}\left[3\,\frac{n(t-t_0)}{(1-e^2)^2}\,e\sin\varphi + \frac{e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi - 2}{\sqrt{1-e^2}\,(1+e\cos\varphi)}\right],$$

$$\gamma_{44} = \frac{1}{n}\left[-e\sin\varphi\,\frac{2+e\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2}\,(1+e\cos\varphi)} + 3\,\frac{n(t-t_0)}{(1-e^2)^2}\,(1+e\cos\varphi)\right]$$

$$\delta_{11} = \frac{\cos\varphi + e}{1-e^2}, \qquad \delta_{12} = -\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}{n(1+e\cos\varphi)}, \qquad \delta_{21} = \frac{\sin\varphi}{1-e^2}, \qquad \delta_{22} = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos\varphi}{n(1+e\cos\varphi)}$$

Если обозначить

$$x_1 = \mathbf{q}_s\cdot\mathbf{e}_r, \quad x_2 = \mathbf{q}_s\cdot\mathbf{e}_\varphi, \quad x_3 = \dot{\mathbf{q}}_s\cdot\mathbf{e}_r, \quad x_4 = \dot{\mathbf{q}}_s\cdot\mathbf{e}_\varphi, \quad x_5 = \mathbf{q}_s\cdot\mathbf{e}_3, \quad x_6 = \dot{\mathbf{q}}_s\cdot\mathbf{e}_3$$

то векторное уравнение (1.3) представится системой уравнений

$$\dot{x}_1 = \dot\varphi\,x_2 + x_3, \qquad \dot{x}_3 = \dot\varphi x_4 + \frac{2\mu}{r^3}\,x_1, \qquad \dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_2 = -\dot\varphi x_1 + x_4, \qquad \dot{x}_4 = -\dot\varphi x_3 - \frac{\mu}{r^3}\,x_2, \qquad \dot{x}_6 = -\frac{\mu}{r_3}\,x_5$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{y}_1 = \dot\varphi y_2 - \frac{2\mu}{r^3}\,y_3, \qquad \dot{y}_3 = -y_1 + \dot\varphi y_4, \qquad \dot{y}_5 = \frac{\mu}{r^3}\,y_6$$

$$\dot{y}_2 = -\dot\varphi y_1 + \frac{\mu}{r^3}\,y_4, \qquad \dot{y}_4 = -y_2 - \dot\varphi y_3, \qquad \dot{y}_6 = -y_5$$

и $\gamma_{sr} = y_r$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ будут ее решениями; это может служить для проверки вычисления.

Поступила 23 X 1962