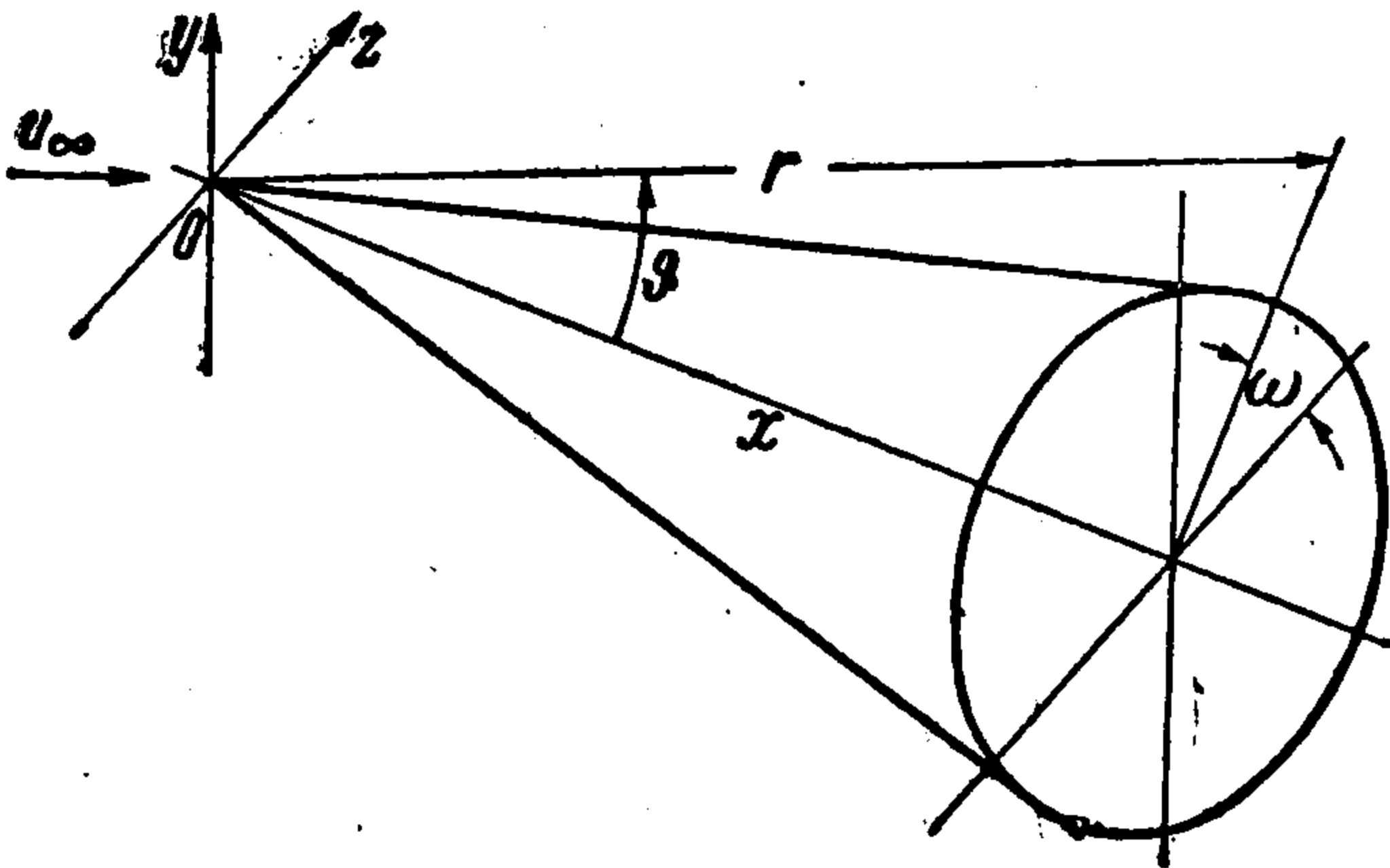


ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО КОНУСА ПОД УГЛОМ АТАКИ

Я. Г. Сапунков (Саратов)

В работе Ченга [1] решалась задача об обтекании конуса гиперзвуковым потоком газа под углом атаки методом разложения по малым параметрам $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ и $\sigma = \sin \alpha / \sin \tau$, где γ — отношение теплоемкостей, α — угол атаки, τ — угол полураствора конуса. В данной заметке решается та же задача, тем же методом. По-



лучено первое приближение решения и исправление его в окрестности поверхности конуса и второе приближение для давления. Но результаты имеют отличие от результатов работы [1].

1. Рассмотрим обтекание круглого конуса с полураствором τ однородным гиперзвуковым потоком газа под углом атаки — α в сферической системе координат r, ϑ, ω с осью, совпадающей с осью конуса (фигура).

Обозначим через u_+, v_+, w_+ компоненты вектора скорости в направлении увеличения r, ϑ, ω через p_+, ρ_+ — давление и плотность. Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{u_+}{u_\infty}, & v &\equiv \frac{v_+}{\varepsilon u_\infty \sin \tau}, & w &\equiv \frac{w_+}{u_\infty \sin \alpha} \\ p &\equiv \frac{p_+}{\rho_\infty u_\infty^2 \sin^2 \tau}, & \rho &\equiv \frac{\varepsilon \rho_+}{\rho_\infty}, & \theta &\equiv \frac{\sin \vartheta - \sin \tau}{\varepsilon \sin \tau} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Будем придерживаться обозначений работы [1]. Уравнения количества движения, неразрывности, энергии примут вид

$$\begin{aligned} \left[I v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{1 + \varepsilon \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] u &= \sin^2 \tau [\varepsilon^2 v^2 + \sigma^2 w^2] \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \sigma^2 \rho \frac{w^2}{1 + \varepsilon \theta} - \varepsilon \rho \left[v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{I(1 + \varepsilon \theta)} \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{u}{I} \right] v \\ \sigma \rho \left[I v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{1 + \varepsilon \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} + u \right] w &= - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \theta} \left[\frac{\partial p}{\partial \omega} + \sigma I \rho v w \right] \\ 2(1 + \varepsilon \theta) \rho u + I \frac{\partial}{\partial \theta} [(1 + \varepsilon \theta) \rho v] + \sigma \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho w) &= 0 \\ \left[I v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{1 + \varepsilon \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$I = \cos \vartheta = [1 - \sin^2 \tau (1 + \varepsilon \theta)^2]^{1/2}$$

На поверхности конуса имеем условие обтекания

$$v = 0 \quad \text{при } \theta = 0$$

На поверхности ударной волны $\theta = \theta^+(\omega)$ имеем условия сохранения массы

$$I [\rho v - I \sigma \sin \omega + (1 + \varepsilon \theta^+) \cos \alpha] = \sigma \frac{\theta_{\omega^+}}{1 + \varepsilon \theta^+} [\rho w - \varepsilon \cos \omega]$$

импульса

$$\begin{aligned} \left[I^2 + \left(\frac{\varepsilon \theta_{\omega^+}}{1 + \varepsilon \theta^+} \right)^2 \right] (p - k \varepsilon) &= \left[I(1 + \varepsilon \theta^+) \cos \alpha - I^2 \sigma \sin \omega + \sigma \varepsilon \frac{\theta_{\omega^+}}{1 + \varepsilon \theta^+} \cos \omega \right]^2 - \\ &- \varepsilon \rho \left[I v - \sigma \frac{\theta_{\omega^+}}{1 + \varepsilon \theta^+} w \right]^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

энергии

$$\left[I^2 + \left(\frac{\varepsilon \theta_{\omega}^+}{1 + \varepsilon \theta^+} \right)^2 \right] \left(\frac{P}{\rho} - k \right) (1 + \varepsilon) + \varepsilon^2 \left[I v - \sigma \frac{\theta_{\omega}^+}{1 + \varepsilon \theta^+} w \right]^2 = \\ = \left[I (1 + \varepsilon \theta^+) \cos \alpha - I^2 \sigma \sin \omega + \sigma \varepsilon \frac{\theta_{\omega}^+}{1 + \varepsilon \theta^+} \cos \omega \right]^2$$

касательных составляющих

$$I \sigma (w - \cos \omega) + \varepsilon \frac{\theta_{\omega}^+}{1 + \varepsilon \theta^+} [\varepsilon V - I \sigma \sin \omega + (1 + \varepsilon \theta^+) \cos \alpha] = 0 \\ u - I \cos \alpha = \sin^2 \tau (1 + \varepsilon \theta^+) \sigma \sin \omega$$

Здесь

$$k = \frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1) M_{\infty}^2 \sin^2 \tau}, \quad \theta_{\omega}^+ = \frac{d\theta^+(\omega)}{d\omega}$$

2. Решение ищем в виде рядов по ε и σ , по типу

$$p = p_{00} + p_{10}\varepsilon + p_{01}\sigma + p_{20}\varepsilon^2 + p_{11}\varepsilon\sigma + p_{02}\sigma^2 + \dots \quad (2.1)$$

Функцию $\theta^+(\omega)$, характеризующую положение ударной волны, также ищем в виде

$$\theta^+ = \theta_{00} + \theta_{10}\varepsilon + \theta_{01}\sigma + \theta_{20}\varepsilon^2 + \theta_{11}\varepsilon\sigma + \theta_{02}\sigma^2 + \dots \quad (2.2)$$

Величина k считается ограниченной.

Подставляя разложения типа (2.1), (2.2) в уравнения и граничные условия, соберем члены с одинаковыми степенями ε и σ , получим уравнения для коэффициентов рядов (2.1) и (2.2). Решения полученных уравнений осуществляются в элементарных функциях. Приведем решения первого приближения

$$u = \cos \tau - \varepsilon \left(\frac{1+k}{2} \right) \sin \tau \operatorname{tg} \tau + \sigma \sin^2 \tau \sin \omega \\ v = -2\theta + \varepsilon \left[\theta (1+k) \operatorname{tg}^2 \tau + \theta^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \tau) - \frac{4\theta^3}{3(1+k)} \right] + \\ + \sigma \frac{\sin \omega}{\cos \tau} \left[\frac{1+k}{3} \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{3/2} - 2\theta \sin^2 \tau \right] \quad (2.3) \\ w = \cos \omega \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} + \varepsilon \cos \omega \left\{ 2(1+k) + \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \left[\frac{k^2}{2(1+k)} - k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1+k}{3 \cos^2 \tau} - \frac{15}{8}(1+k) - \frac{1+k}{4} \operatorname{tg}^2 \tau \right] + \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{3/2} \left[\frac{1+k}{8} \operatorname{tg}^2 \tau - \frac{3}{8}(1+k) \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{5/2} \frac{1+k}{24} \right\} + \sigma \frac{\sin 2\omega}{\cos \tau} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{1+k} \cos^2 \tau \right) \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{2\theta}{1+k} \right) \right] \\ p = 1 + \varepsilon \left(\frac{1+5k}{4} - \frac{\theta^2}{1+k} \right) - \sigma 2 \cos \tau \sin \omega \\ \rho = \frac{1}{1+k} + \varepsilon \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{k}{1+k} \right)^2 - \left(\frac{\theta}{1+k} \right)^2 \right] - \sigma \frac{2k}{(1+k)^2} \cos \tau \sin \omega \\ \theta^+ = \frac{1+k}{2} + \varepsilon \left[\frac{(1+k)^2}{24} (7 + 3 \operatorname{tg}^2 \tau) - \frac{k^2}{2} \right] + \sigma \frac{\sin \omega}{\cos \tau} \left[k \cos^2 \tau - \frac{1+k}{3} \right]$$

Получение приближений более высокого порядка трудностей не представляет и получаются аналогично. В частности, второе приближение для давления имеет вид

$$p = 1 + \varepsilon \left(\frac{1+5k}{4} - \frac{\theta^2}{1+k} \right) - \sigma 2 \cos \tau \sin \omega + \varepsilon^2 \left[\frac{3}{32} (1+k)^2 - \frac{k^2}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{tg}^2 \tau}{4} (1+k)^2 + \frac{(2\theta)^2}{4} \operatorname{tg}^2 \tau - \left(\frac{\theta k}{1+k} \right)^2 - \frac{(2\theta)^2}{16} + \frac{5(2\theta)^3}{24(1+k)} - \right. \\ \left. - \frac{(2\theta)^3 \operatorname{tg}^2 \tau}{8(1+k)} - \frac{11}{96} \frac{(2\theta)^4}{(1+k)^2} \right] + \sigma^2 \left[\cos 2\tau - \cos^2 \omega \times \right. \\ \left. \times \left(\cos^2 \tau + \frac{1}{4} - \frac{\theta^2}{(1+k)^2} \right) \right] + \sigma \varepsilon \frac{\sin \omega}{\cos \tau} \left\{ \frac{4}{15} (1+k) \left[\left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{3/2} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \tau}{2} \left[1 - \frac{(2\theta)^2}{1+k} \right] + \frac{k}{2} \left[\left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^2 \cos^2 \tau + 1 \right] \right\} \quad (2.4)$$

Из (2.4) получим коэффициенты для нормальной и продольной сил

$$C_N = \frac{2N}{\rho_\infty u_\infty^2 \pi r^2 \sin^2 \tau} = \sin \alpha \left\{ 2 \cos^2 \tau + \varepsilon \left[\frac{4}{15} (1+k) - \frac{\sin^2 \tau}{2} - \frac{k}{2} \right] \right\}$$

$$C_X = \frac{2X}{\rho_\infty u_\infty^2 \pi r^2 \sin^2 \tau} = 2 \sin^2 \tau \left\{ 1 + \varepsilon \left(\frac{1+5k}{4} \right) + \right. \\ \left. + \sigma^2 \left(\frac{3 \cos^2 \tau}{2} - \frac{9}{8} \right) + \varepsilon^2 \left[\frac{3}{32} (1+k)^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 \tau}{4} (1+k)^2 \right] \right\} \quad (2.5)$$

3. Энтропия, вычисленная по результатам первого приближения, принимает переменное значение на поверхности конуса, что говорит о том, что решение, полученное данным методом, не годится в окрестности поверхности конуса [2, 3].

В работе [1] показано, что в первом приближении энтропию можно представить в виде

$$S = S_0 + \varepsilon S_{10} + \sigma S_{01}(\zeta) + O(\sigma^2)$$

Здесь

$$\zeta = \theta^{\sigma \varepsilon (1+k) \sec \tau} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \omega + \frac{1}{4} \pi \right) \quad (3.1)$$

Из граничного условия для энтропии можно определить постоянные S_0 , S_{10} и функцию $S_{01}(\zeta)$. Вычисления дают

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = 1 + k + \varepsilon [k + 2(1+k) \ln(1+k)] + 2\sigma \cos \tau \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} \quad (3.2)$$

Как показано в работе [3], выражения для w_0 и v_0 являются правильными и в окрестности поверхности конуса. Выражение (2.4) давления p верно с точностью до величин второго порядка малости. Тогда из (3.2) и (2.3) имеем

$$\rho = \frac{1}{1+k} + \varepsilon \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{k}{1+k} \right)^2 - \left(\frac{\theta}{1+k} \right)^2 \right] - \frac{2\sigma \cos \tau}{(1+k)^2} \left[\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} + (1+k) \sin \omega \right] \quad (3.3)$$

Используя интеграл Бернулли, можно получить

$$u = \cos \tau - \frac{\varepsilon}{2} (1+k) \sin \tau \operatorname{tg} \tau - \sigma \sin^2 \tau \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} \quad (3.4)$$

Вне окрестности поверхности конуса выражения (3.3) и (3.4) переходят в соответствующие им из (2.3). Таким образом, получено первое приближение решения задачи об обтекании кругового конуса под углом атаки гиперзвуковым потоком газа. В полученных здесь выражениях для плотности, формы ударной волны, окружной скорости, давления отсутствуют члены с $\ln(1+k)$; этим они в основном отличаются от результатов работы [1], в то же время в выражении для энтропии этот же член присутствует, а в результатах Ченга его нет.

В частном случае $\sigma = 0$ полученное первое приближение соответствует результатам Г. Г. Черного [4]. Ошибка в результатах Ченга, вероятно, произошла из-за неправильно вычисленной энтропии.

В заключение благодарю Б. М. Булаха за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 5 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheng H. K. Hypersonic flows past a yawd circular cone and other pointed bodies. *Journal of fluid mechanics*, february, 1962, vol. 12, part 2.
2. Ferris A. Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack. *NACA Report*, 1951, No. 01045.
3. Булах Б. М. Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса. *ПММ*, 1962, т. 26, вып. 2.
4. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. *Физматгиз* 1959.