

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и к о л ь с к и й А. А. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Сб. теорет. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957, стр. 56—63.
2. G u d e r l e y G., H a n t s c h E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwissenschaften, September 1955, B. 3, H. 9, s.s. 305—313.
3. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2, стр. 195—206.
4. R a o G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, No 6, pp. 377—382.
5. G u d e r l e y G. On Rao's method for the computation of exhaust nozzles. Z. Flugwissenschaften, Dezember 1959, B. 7, H. 12, s.s. 345—350.
6. G u d e r l e y K. G., A r m i t a g e J. V., V a l e n t i n e E. M. Nose and inlet shapes of minimum drag in supersonic flow. IAS Paper, 1962, No. 62—116.

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛАХ НАИМЕНЬШЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

А. Л. Гонор

(Москва)

В баллистике и газовой динамике определяются формы тел вращения, имеющие наименьшее сопротивление при заданном удлинении, объеме или при каких-либо других дополнительных условиях.

Из этих решений и из экспериментов стало известно, что придание телу оптимальной формы при гиперзвуковых скоростях обтекания позволяет уменьшить (см., например, [1]) его волновое сопротивление (по сравнению с эквивалентным конусом) примерно на 30—40%.

Ниже делается попытка сформулировать и решить задачу о форме пространственного оптимального тела в гиперзвуковом потоке газа.

Рассмотрим обтекание тела (фиг. 1) в цилиндрической системе координат ρ, φ, z , в которой ось z выбрана по потоку. Предположим, что поверхность тела определяется уравнением

$$\rho = r(\varphi) f(z) \quad (1)$$

Считая длину тела равной единице, а функцию $f(z)$ безразмерной, можно положить $f(1) = 1$.

Давление на поверхности тела будем определять по закону Ньютона, который можно записать в виде

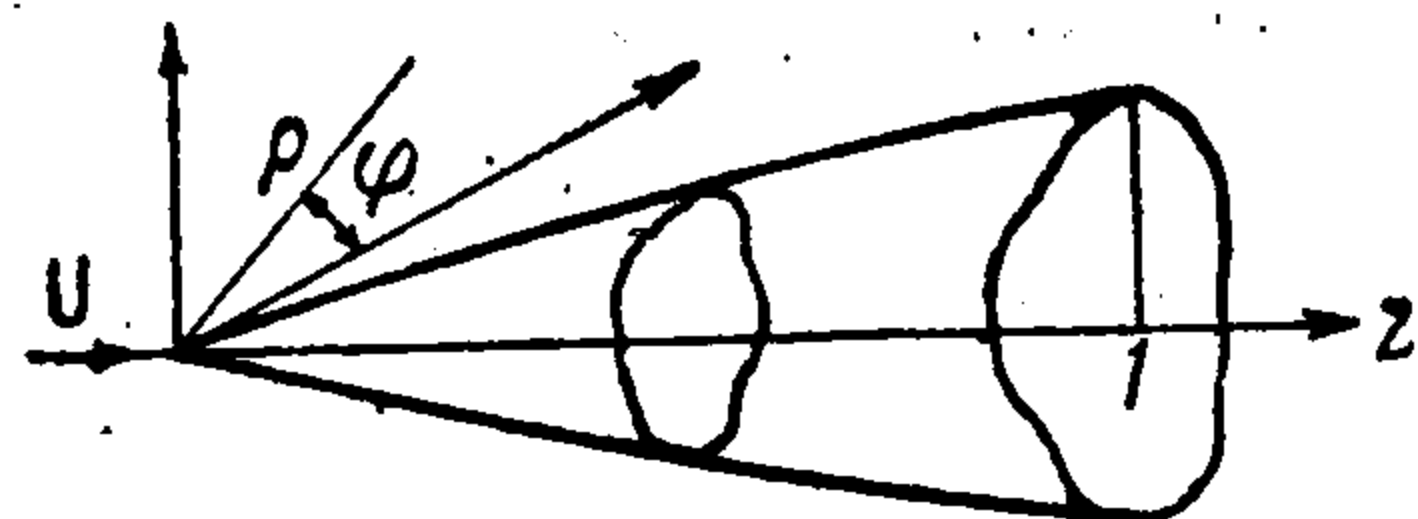
$$C_p = k \cos^2(\mathbf{n}, \mathbf{U}) \left(C_p = \frac{2(p - p_0)}{\rho U^2} \right) \quad (2)$$

где C_p — коэффициент давления, k — коэффициент пропорциональности, \mathbf{n} — вектор нормали; \mathbf{U} — вектор скорости набегающего потока. Используя равенства (1), (2), можно показать, что коэффициент сопротивления тела, отнесенный к площади ми-деля S (при $f'(z) \geq 0$), представляется выражением

$$C_x = \frac{K}{S_1} \int_0^{2\pi} r^4(\varphi) d\varphi \int_0^1 \frac{f(z) f'^3(z) dz}{1 + r'^2/r^2 + r^2 f'^2(z)} \quad (3)$$

Ограничимся теперь рассмотрением тонких тел; тогда величина $r^2 f'^2(z) \ll 1$ и в выражении (3) ею можно пренебречь. В результате получим

$$C_x = \frac{K}{S_1} \int_0^1 f(z) f'^3(z) dz \int_0^{2\pi} \frac{r^4(\varphi) d\varphi}{1 + r'^2/r^2} \quad (4)$$



Фиг. 1

Представление сопротивления в форме (4) позволяет свести задачу о нахождении поверхности оптимального пространственного тела к задачам отдельного определения оптимальной формы меридионального и поперечного контуров. Форма оптимального меридионального контура в рамках закона Ньютона найдена давно и, как известно, для нее $f \sim z^{3/4}$. Для определения поперечного контура сформулируем следующую вариационную задачу. В классе гладких линий $r(\varphi)$ с конечным числом разрывов первой производной найти минимум функционала

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{r^4(\varphi) d\varphi}{1 + r'^2/r^2} \quad \left(S_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) d\varphi \right)$$

при заданной площади миделя S_1 и заданном характерном размере r^0 . Как известно, экстремали для подобного типа вариационных задач должны удовлетворять уравнению Эйлера, составленному для функции

$$F = \frac{r^4}{1 + r'^2/r^2} + \lambda^* r^2$$

Кроме того, вдоль экстремали должно выполняться условие Лежандра $F_{r'r'} \geq 0$, а в точках разрыва производной условия Вейерштрасса — Эрдманна

$$[F - r'F_{r'}]_{\varphi-0} = [F - r'F_{r'}]_{\varphi+0}, \quad [F_{r'}]_{\varphi-0} = [F_{r'}]_{\varphi+0} \quad (5)$$

Выражение для F не содержит явно независимой переменной, поэтому уравнение Эйлера допускает интеграл

$$r_1^4 \left(1 + 3 \frac{r_1'^2}{r_1^2} \right) = (\pm 1 - \lambda r_1^2) \left(1 + \frac{r_1'^2}{r_1^2} \right) \quad \left(\begin{array}{l} r_1 = r(|C|)^{1/4} \\ \lambda = \lambda^* (|C|)^{1/2} \end{array} \right) \quad (6)$$

Здесь C — постоянная интегрирования. Уравнение (6) состоит из двух неприводимых дифференциальных уравнений четвертой степени и содержит, вообще говоря, восемь семейств интегральных кривых. Не останавливаясь на деталях качественного исследования этого уравнения, отметим, что экстремаль с указанными выше свойствами не может содержаться целиком в каком-либо одном семействе интегральных кривых и что четыре из восьми семейств интегральных кривых ни в какой своей части не могут быть экстремалими. Преобразуем теперь уравнение (6) к параметрическому виду при помощи подстановки $r_1^2/r_1'^2 = t^2$ (индекс 1 ниже опущен).

Оставшиеся четыре семейства можно представить в виде

$$r^2 = \frac{(-1)^i 2}{\lambda (1 + \sqrt{1 + (-1)^i q(t, \lambda)})} \quad (i = 0, 1), \quad d\varphi = \pm \frac{1}{2} t \frac{dr^2}{r^2}, \quad q(t, \lambda) = \frac{4t^2(3+t^2)}{\lambda^2(1+t^2)^2} \quad (7)$$

Из формул (7) непосредственно следует, что если $i = 0$, то $\lambda > 0$, если $i = 1$, то $\lambda < 0$. Параметр t в силу условия Лежандра заключен в пределах от 0 до $\sqrt{3}$.

Интегрируя соотношения (7) при $\lambda > 0$, найдем, что решение в параметрической форме имеет вид

$$r^2 = \frac{2}{\lambda (1 + \sqrt{1 + q})}, \quad \varphi = \frac{2}{\lambda^2} \int_0^t \frac{(3-t^2)t^2 dt}{(1 + \sqrt{1 + q}) \sqrt{1 + q} (1 + t^2)^3} \quad (8)$$

Если $\lambda < 0$, то соответственно имеем

$$r^2 = \frac{2}{\lambda (1 + \sqrt{1 - q})}, \quad \varphi = \frac{2}{\lambda^2} \int_0^t \frac{(3-t^2)t^2 dt}{(1 + \sqrt{1 - q}) \sqrt{1 - q} (1 + t^2)^3} \quad (9)$$

Из выражений (8) и (9) определяются только два семейства интегральных кривых. Оставшиеся два семейства получаются при знаке минус во втором соотношении (7).

Если произвести оценку величины угла φ , то оказывается, что наибольшее из всех возможных его значений меньше, чем $\pi/8$.

Следовательно, в интегральных семействах нет замкнутых линий, и все кривые располагаются в некотором угле $0 \leq \varphi \leq \varphi_0 = \varphi(t_0)$.

Рассмотрим теперь третье семейство интегральных кривых, которые получаются при $\lambda > 0$ и знаке минус во втором отношении (7). Нетрудно проверить, что, уменьшая параметр t от значения t_0 до нуля, получим кривые третьего семейства, расположенные в угле $\varphi_0 \leq \varphi \leq 2\varphi_0$. Стыкуя кривые первого и третьего семейств, можно получить интегральные кривые в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\varphi_0$, причем продолжением линий первого семейства будут кривые, симметричные первоначальному относительно плоскости $\varphi = \varphi_0$. Для дальнейшего распространения экстремалей на больший угол следует снова воспользоваться первым семейством интегральных кривых и повторить предыдущее построение. Прделав конечное число подобных построений, можно составить экстремаль, заполняющую угол произвольной величины. Если потребовать при этом, чтобы угол φ_0 был кратным числу 2π , то экстремаль замкнется. Легко заметить, что в точках стыка участков ($t = 0$ и $t = t_0$), из которых составляется экстремаль, производная терпит разрыв, поэтому условия (5) в этих точках, вообще говоря, могут не выполняться. Проверка, однако, показывает, что первое условие (5) выполняется тождественно во всех точках стыка, а второе — только в точках, где $t = 0$, т. е. при максимальных значениях радиуса.

Примем теперь за характерный линейный размер тела минимальное значение радиуса. Вариация радиуса в точках, где $t = t_0$, будет равна нулю и второе условие (5) отпадет. Аналогично можно показать, что решение, описываемое формулами (9), соответствует случаю, когда характерный размер принимается равным максимальному значению радиуса. Выведем соотношения для определения постоянных c , t_0 и λ . В силу замкнутости экстремали имеем равенство

$$\frac{2}{\lambda^2} \int_0^{t_0} \frac{(3-t^2)t^2 dt}{(1+\sqrt{1+q})\sqrt{1+q}(1+t^2)^3} = \frac{\pi}{n} \quad (10)$$

где n — положительное целое число, определяющее количество двойных участков, из которых составляется экстремаль. Переходя к изопериметрическому условию и используя уравнение (8), получим

$$\frac{2}{\lambda^2} \int_0^{t_0} \frac{(3-t^2)t^2 dt}{(1+\sqrt{1+q})^2 \sqrt{1+q}(1+t^2)^3} = \frac{S_1}{nr^{02}(1+\sqrt{1+q_0})} \quad (q_0 = q(t_0, \lambda)) \quad (11)$$

Припоминая теперь, что $r_{\min} = r^0$, найдем третье условие в виде

$$2\sqrt{|c|} = r^{02}\lambda(1+\sqrt{1+q_0}) \quad (12)$$

Исследование соотношений (10) — (12) показывает, что их можно удовлетворить, если n достаточно велико. В частности, параметры λ и t_0 для фиксированного n находятся из условий (10) и (11), а параметр c — из условия (12). Таким образом, можно получить счетное множество экстремалей, удовлетворяющих всем условиям вариационной задачи. При этом форма поперечного сечения целиком определяется параметрами n и S_1/r^{02} , величина же r^0 характеризует только масштаб тела.

Полученное множество экстремалей можно представлять для простоты аналогичным множеством точек экстремума функции типа $y = ax + \sin x$ ($0 < a < 1$). Рассмотрим теперь сопротивление полученных тел. Из формулы (4) имеем

$$C_x / \frac{K}{S_1} \int_0^1 f f^3 dz = \frac{4nr^{04}}{\lambda^2} (1+\sqrt{1+q_0})^2 \int_0^{t_0} \frac{(3-t^2)t^4 dt}{(1+\sqrt{1+q})^3 \sqrt{1+q}(1+t^2)^4} \quad (13)$$

Решение вариационной задачи, определяемое вышеприведенными формулами, представляется достаточно сложным для практических расчетов. Поэтому изучим его более подробно при значениях параметра $t_0 \ll 1$, так как в этом случае решение заметно упрощается.

Действительно, после несложных выкладок из (8) — (13) получаем

$$r^2 = 2/\lambda (1 + \sqrt{1+z^2}) + O(t^4), \quad \varphi = \frac{\lambda}{4\sqrt{3}} \int_0^z \frac{z^2 dz}{(1 + \sqrt{1+z^2}) \sqrt{1+z^2}} + O(t^5)$$

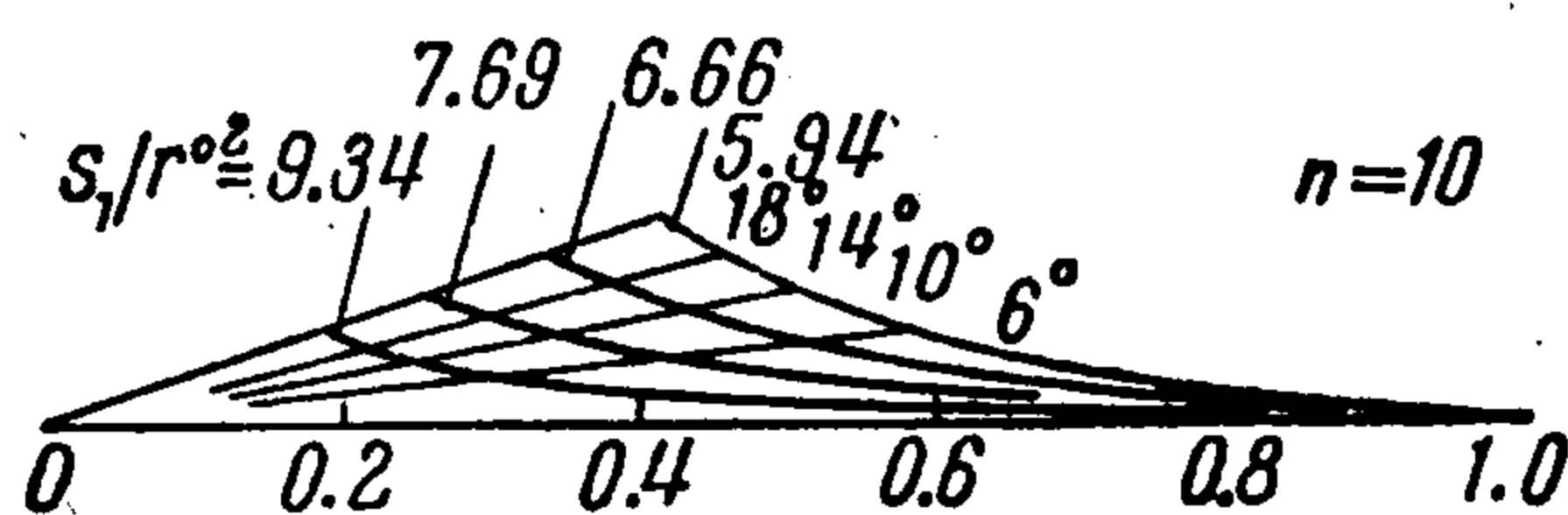
$$\left(z = \frac{t\sqrt{12}}{\lambda} \right)$$

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{3}} \int_0^{z_0} \frac{z^2 dz}{(1 + \sqrt{1+z^2}) \sqrt{1+z^2}} + O(t^5) = \frac{\pi}{n} \quad \left(z_0 = \frac{t_0\sqrt{12}}{\lambda} \right) \quad (14)$$

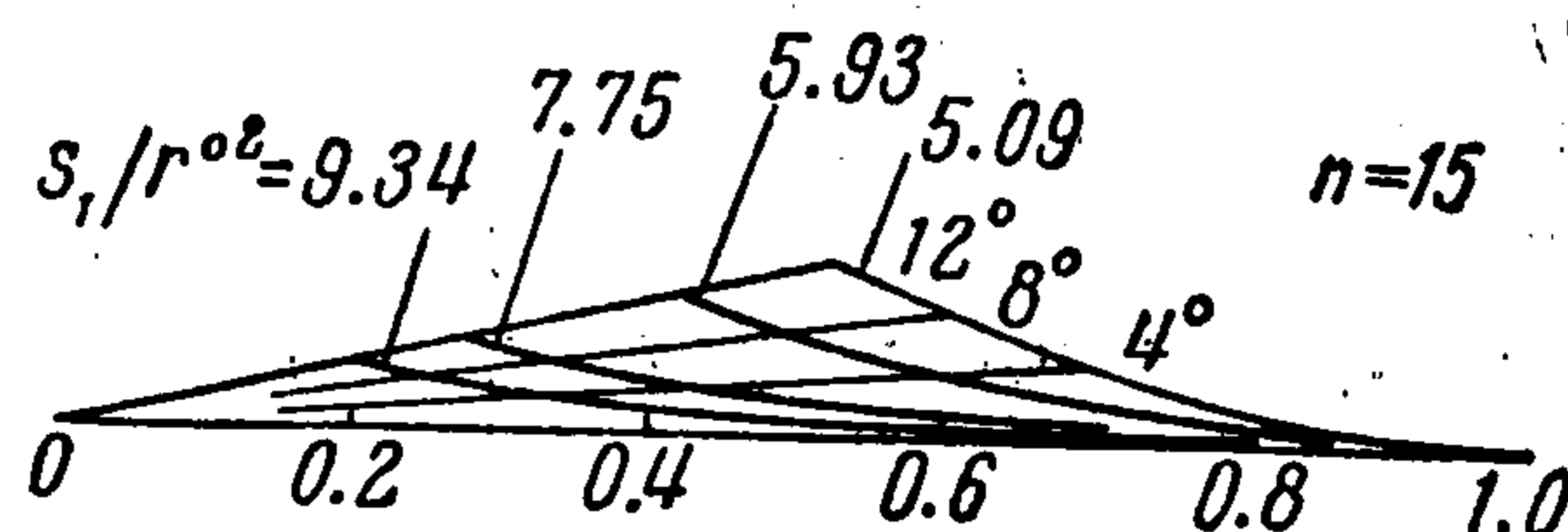
$$\frac{\lambda}{4\sqrt{3}} \int_0^{z_0} \frac{z^2 dz}{(1 + \sqrt{1+z^2})^2 \sqrt{1+z^2}} + O(t^5) = \frac{S_1}{nr^{02} (1 + \sqrt{1+z_0^2})}$$

$$C_x / \frac{K}{S_1} \int_0^1 ff'^3 dz = \frac{nr^{04}\lambda^3}{6\sqrt{3}} (1 + \sqrt{1+z_0^2})^2 \int_0^{z_0} \frac{z^4 dz}{(1 + \sqrt{1+z^2})^3 \sqrt{1+z^2}} + O(t^7)$$

причем все интегралы, входящие в (14), вычисляются в элементарных функциях



Фиг. 2



Фиг. 3

В результате уравнение участка, из которого составляется поперечное сечение тела, примет вид

$$r^2 = \frac{r^{02} (1 + \sqrt{1+z_0^2})}{1 + \sqrt{1+z^2}}, \quad \varphi = \frac{\lambda}{4\sqrt{3}} [z - \ln(z + \sqrt{1+z^2})] \quad (15)$$

$$0 \leq z \leq z_0$$

Параметры этой кривой определяются из условий

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{3}} [z_0 - \ln(z_0 + \sqrt{1+z_0^2})] = \frac{\pi}{n} \quad (16)$$

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{3}} \left[\ln \left| \frac{1+z_0 + \sqrt{1+z_0^2}}{1-z_0 + \sqrt{1+z_0^2}} \right| - \frac{2z_0}{1 + \sqrt{1+z_0^2}} \right] = \frac{S_1}{nr^{02} (1 + \sqrt{1+z_0^2})}$$

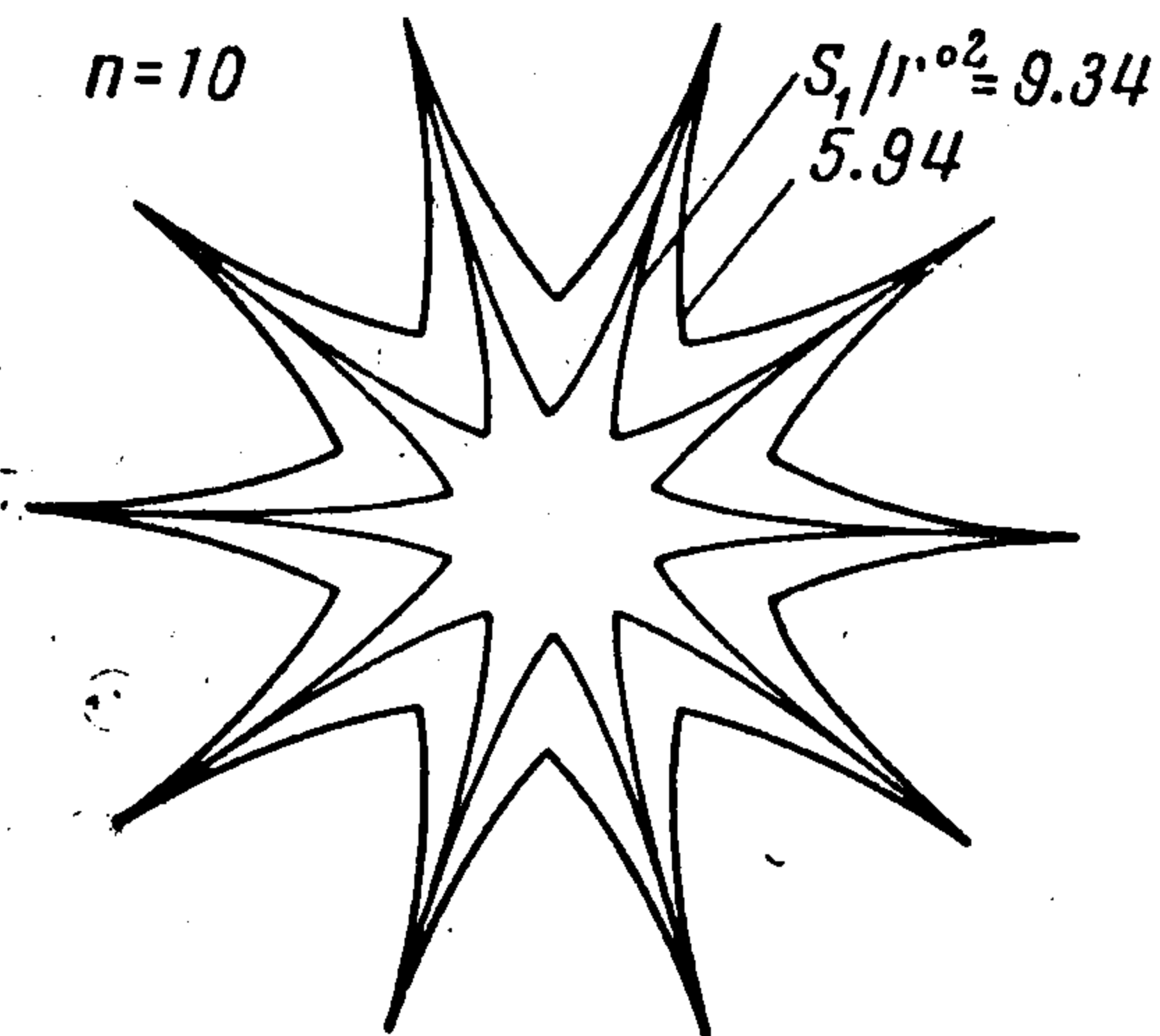
Отметим, что уравнение (15) записано в первоначальных координатах. Коэффициент сопротивления для разобранных случаев можно представить в форме

$$C_x / \frac{K}{S_1} \int_0^1 ff'^3 dz = \frac{nr^{04}\lambda^3}{6\sqrt{3}} (1 + \sqrt{1+z_0^2})^2 \left[\frac{4z_0}{1 + \sqrt{1+z_0^2}} - \right. \\ \left. - 3 \ln \left| \frac{1+z_0 + \sqrt{1+z_0^2}}{1-z_0 + \sqrt{1+z_0^2}} \right| + \frac{2z_0 (1 + \sqrt{1+z_0^2})}{(1 + \sqrt{1+z_0^2})^2 - z_0^2} \right] \quad (17)$$

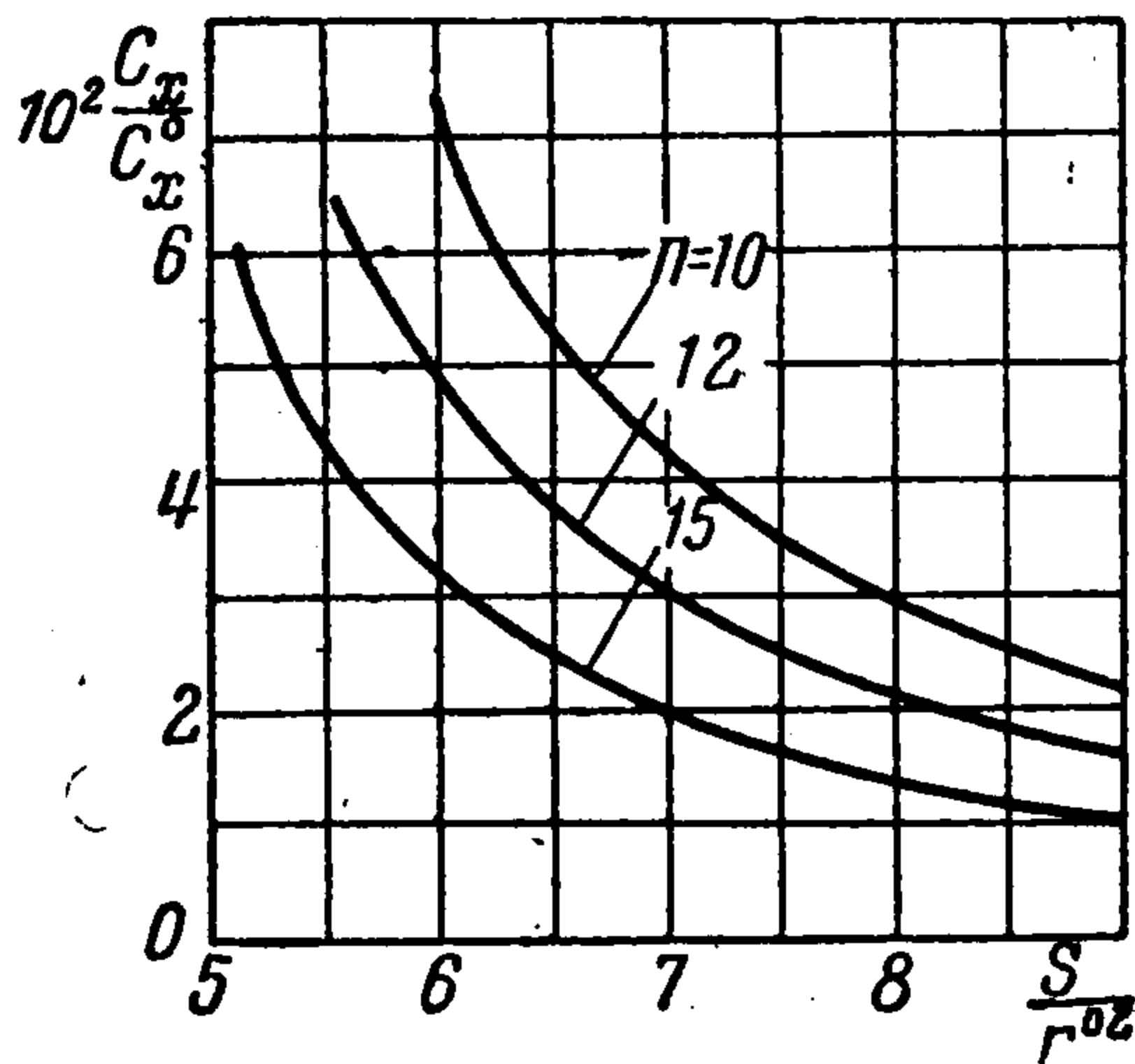
Расчет по полученным формулам поперечного сечения тела не представляет трудностей и для ряда значений параметра S_1 / r^{02} при $n = 10$ и $n = 15$ показан на фиг. 2, 3. Из этих графиков следует, что стенки тела вытянуты вдоль радиуса и имеют отношение $1.9 \leq r_{\max} / r_{\min} \leq 5$. В результате поперечное сечение тела получается звездообразной формы с резко выраженными лучами. На фиг. 4 показан общий вид поперечных сечений тел при $n = 10$ и $S_1 / r^{02} = 5.94$ и 9.34 . Подсчет сопротивления этих тел по формуле (17) показал, что оно меньше сопротивления эквивалентного оп-

тимального тела вращения (одинакового по длине и площади миделя) примерно в двадцать раз. Используя (13), нетрудно проследить, что с увеличением числа лучей n сопротивление уменьшается и в пределе при $n \rightarrow \infty$ становится равным нулю. На фиг. 5 показана зависимость сопротивления C_x , отнесенного к C_x^0 — сопротивлению эквивалентного оптимального по Ньютону тела вращения от параметра S_1 / r^2 при разных значениях числа лучей n .

Как видно из графика, с увеличением числа n кривые располагаются ниже, причем сопротивление уменьшается и в том случае, когда параметр S_1 / r^2 увеличивается.



Фиг. 4



Фиг. 5

Из построенных графиков можно сделать вывод, что сопротивление оптимальных пространственных тел, для которых вариационная задача имеет решение меньше сопротивления эквивалентных оптимальных тел вращения в двадцать раз и более. Этот результат явно завышенный. Дело в том, что поверхность оптимального тела получилась ребристой, а схема обтекания Ньютона в окрестности ребер физически не оправдана, поэтому в более точной постановке такого сильного уменьшения сопротивления наблюдаться не будет. Естественно, что и при $n \rightarrow \infty$ сопротивление тела в действительности останется конечным, и абсолютный оптимум, по-видимому, будет достигаться при конечном числе лучей. Практическое использование оптимальных тел с большим количеством лучей мало эффективно и по причине наличия пограничного слоя.

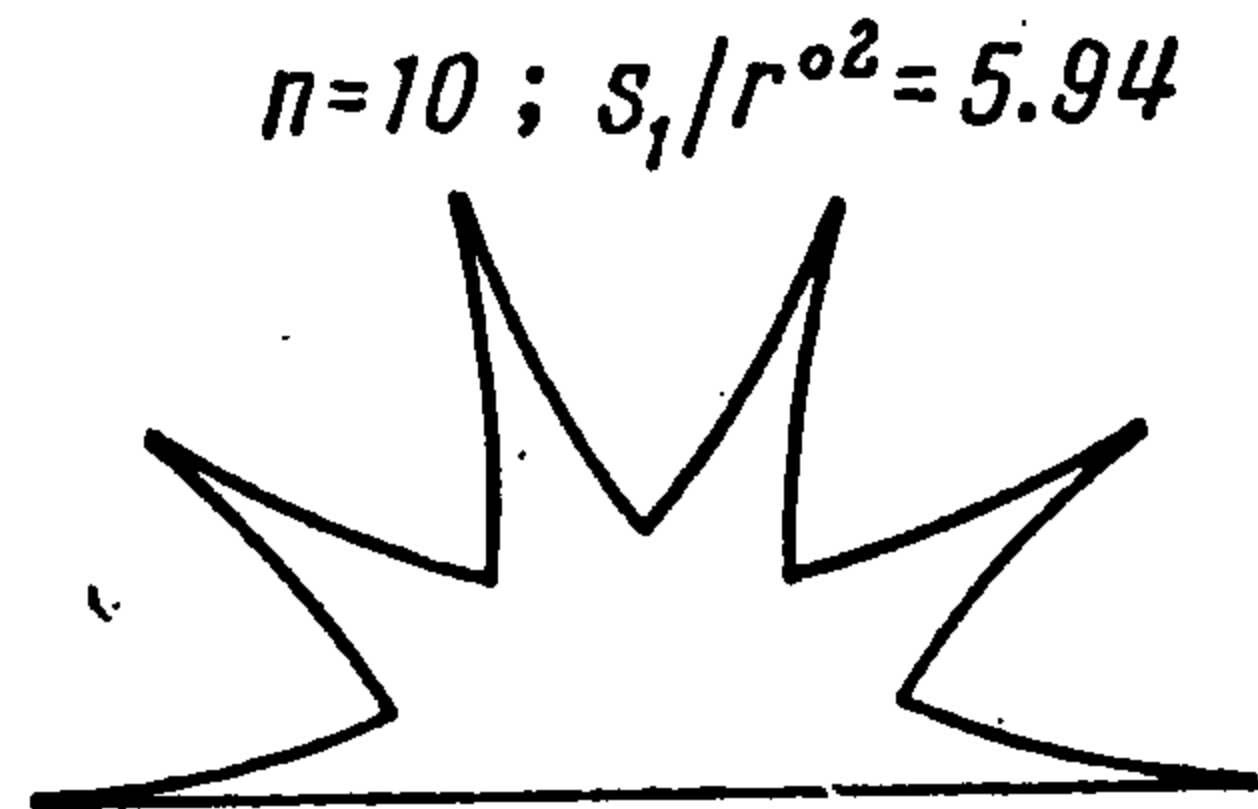
Обратим внимание еще на одно обстоятельство, связанное с найденной формой поперечного сечения оптимальных тел. Согласно схеме обтекания Ньютона сопротивление тела не изменится, если лепестки, из которых оно состоит, переставить в другом порядке. Поэтому появляется возможность создания из основной формы множества других. С математической точки зрения эти формы будут иметь точки разрыва, с физической — лишние поверхности трения. Полученные выше результаты позволяют без труда решить еще одну вариационную задачу, состоящую в определении оптимальной формы тела, одна из боковых граней которого является плоскостью, расположенной по потоку. Решение следует непосредственно из принципа симметрии, и форма поперечного сечения для $n = 10$ показана на фиг. 6.

Автор признателен Г. Г. Черному за обсуждение работы.

Поступила 20 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. Academic press, New York—London, 1959.



Фиг. 6