К ПОСТАНОВКЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В. М. Борисов, Ю. Д. Шмыглевский (Москва)

Уравнения газовой динамики двумерных изоэнергетических и изэнтропических течений в форме контурных интегралов имеют вид

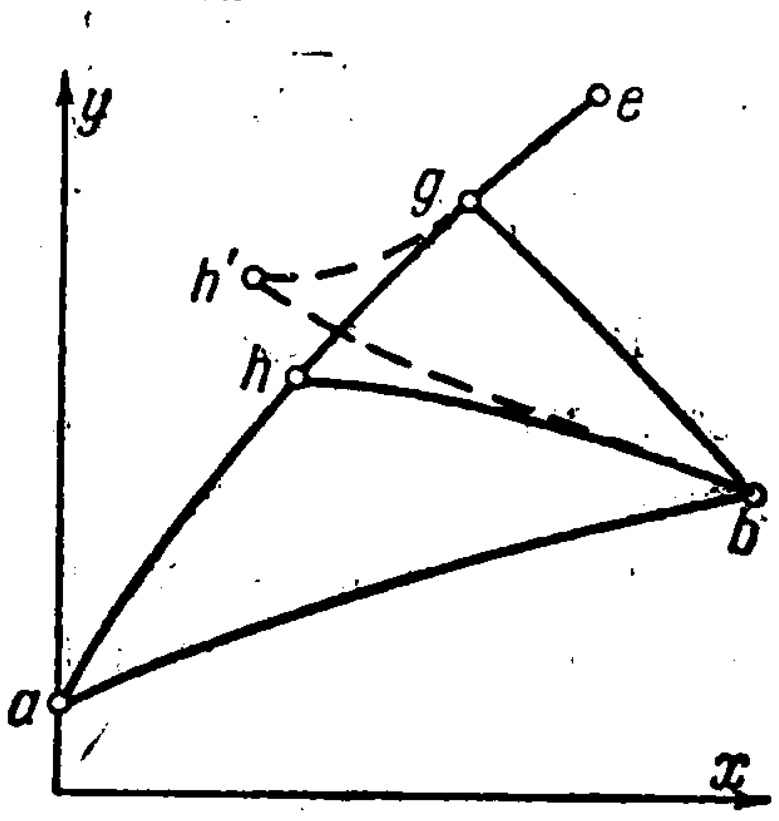
$$\oint f(y, w, \vartheta)\,dx - \varphi(y, w, \vartheta)\,dy = 0 \qquad \begin{pmatrix} w = w(x, y) \\ \vartheta = \vartheta(x, y) \end{pmatrix} \qquad (1)$$
$$\oint F(y, w, \vartheta)\,dx - \Phi(y, w, \vartheta)\,dy = 0$$

где x, y — декартовы координаты в рассматриваемой плоскости течения; w, ϑ — соответственно модуль скорости и угол наклона скорости к оси x. Интегрирование ведется по произвольному замкнутому контуру L. Первое из уравнений (1) может рассматриваться как уравнение движения в проекции на ось x, второе — как уравнение неразрывности.

В дифференциальной форме уравнения (1) имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Одна из возможных постановок задач об отыскании тел с минимальным волновым сопротивлением (или сопел с максимальной тягой) сводится к следующему. Заданы точки a и b и характеристика ae набегающего потока (фигура). Вводится контрольный контур ahb, причем hb — характеристика уравнений (2), приходящая в точку b. Уравнения (1) позволяют записать величину сопротивления χ и нулевой расход газа Ψ через образующую ab в виде



$$\chi = \int_a^h f dx - \varphi dy + \int_h^b f dx - \varphi dy \qquad (3)$$

$$\Psi = 0 = \int_a^h F dx - \Phi dy + \int_h^b F dx - \Phi dy \qquad (4)$$

Для решения задачи необходимо найти функцию w на hb, реализующую экстремум функционала (3) при условиях (4) и

$$X \equiv x_b - x_a = \int_a^h dx + \int_h^b dx \qquad (5)$$

с учетом непрерывности функций w и ϑ в точке h и уравнений характеристики, из которых первое дает связь между dx и dy, второе представляет собой так называемое условие совместности.

Такая постановка вариационных задач учитывает все связи на hb и использована в работах [1–3].

Рао [4] предложил иной подход к формулировке этих задач. В качестве замыкающей линии gb контрольного контура agb выбирается вначале произвольная линия, но связь между w и ϑ на gb не учитывается. Эта связь обусловлена следующими обстоятельствами. Пусть каким-либо путем, например решением вариационной задачи, найдены функции w и ϑ на gb. Тогда решение задачи Коши для уравнений (2) с данными на gb определяет решение в треугольнике $gh'b$. При этом, вообще говоря, найденная характеристика gh' не совпадает с участком gh заданной характеристики ae. Аналогичная картина имеет место и в том случае, когда линии hb и gb меняются ролями. Таким образом постановка задачи [4] является неполной. Пренебрежение одной из связей в общем случае приводит к неверным результатам. Однако полная постановка задачи в данном случае затруднена тем, что связь между w и ϑ на gb в явном виде неизвестна.

Приведенные рассуждения очевидны, но появление поздних работ [5,6], в которых методу Рао уделяется большое внимание и в то же время не отмечается неправильность постановки задачи [4], вызывает возможность ошибок при рассмотрении новых задач. Следует отметить, что обоснование метода Рао в работе [5] касается только выполнения условий совместности на найденной линии gb с характеристическим направлением. Покажем, что правильный конечный результат в работе [4] получен в известной мере случайно. Уравнения (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_w w_x + \varphi_\vartheta \vartheta_x + f_w w_y + f_\vartheta \vartheta_y + f_y &= 0 \\ \Phi_w w_x + \Phi_\vartheta \vartheta_x + F_w w_y + F_\vartheta \vartheta_y + F_y &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

где индексами отмечены частные производные. Уравнения характеристик системы (6) определяются равенством

$$\begin{vmatrix} \varphi_w \tau - f_w & \varphi_\vartheta \tau - f_\vartheta \\ \Phi_w \tau - F_w & \Phi_\vartheta \tau - F_\vartheta \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(\tau = \frac{dy}{dx}\right) \tag{7}$$

В постановке [4] вариационная задача сводится к отысканию функций w и ϑ на gb, реализующих безусловный экстремум функционала

$$I = \int_a^g [\lambda_1 (f - \varphi\tau) + \lambda_2 (F - \Phi\tau) + \lambda_3]\, dx + \int_g^b [\lambda_1 (f - \varphi\tau) + \lambda_2 (F - \Phi\tau) + \lambda_3]\, dx \tag{8}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — постоянные множители Лагранжа. Интеграл по ag является функцией верхнего предела. Производя варьирование, получим, в частности, уравнения Эйлера на gb или части этой линии

$$\lambda_1 (f_w - \varphi_w \tau) + \lambda_2 (F_w - \Phi_w \tau) = 0, \qquad \lambda_1 (f_\vartheta - \varphi_\vartheta \tau) + \lambda_2 (F_\vartheta - \Phi_\vartheta \tau) = 0 \tag{9}$$

Множители λ_1 и λ_2, вообще говоря, не равны нулю, поэтому условие совместности уравнений (9) совпадает с равенством (7) и неожиданно дает уравнение для определения величины $\tau = dy\,/\,dx$.

Пусть теперь рассматривается вариационная задача, в которой условие типа (5) заменено условием более общего вида, не связанным с уравнениями (1):

$$P = \int_a^g U(y, w, \vartheta)\, dx - V(y, w, \vartheta)\, dy + \int_g^b U(y, w, \vartheta)\, dx - V(y, w, \vartheta)\, dy$$

В этом случае функционал типа (8) записывается в форме

$$\begin{aligned} J = &\int_a^g [\lambda_1 (f - \varphi\tau) + \lambda_2 (F - \Phi\tau) + \lambda_3 (U - V\tau)]\, dx + \\ &+ \int_g^b [\lambda_1 (f - \varphi\tau) + \lambda_2 (F - \Phi\tau) + \lambda_3 (U - V\tau)]\, dx \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера на линии gb или ее части имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 (f_w - \varphi_w \tau) + \lambda_2 (F_w - \Phi_w \tau) + \lambda_3 (U_w - V_w \tau) &= 0 \\ \lambda_1 (f_\vartheta - \varphi_\vartheta \tau) + \lambda_2 (F_\vartheta - \Phi_\vartheta \tau) + \lambda_3 (U_\vartheta - V_\vartheta \tau) &= 0 \end{aligned}$$

и не определяют τ. Если в качестве gb выбрана не характеристическая линия, то последние уравнения, как уже отмечалось, приведут к результатам, противоречащим данным на характеристике ae.

Представим, наконец, мысленно, что в постановке исходной задачи учтена связь между w и ϑ на gb. В этом случае выражение под интегралом по gb в равенстве (8) будет иметь дополнительное слагаемое. Соответствующие уравнения Эйлера перестанут быть однородными относительно λ_1 и λ_2. Дополнительное ограничение на τ типа (7) в этом случае не возникает, что показывает непротиворечивость полной постановки задачи. Изложенное переносится и на случай неизэнтропических течений.

Поступила 10 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Сб. теорет. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957, стр. 56—63.
2. Guderley G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwissenschaften, September 1955, B. 3, H. 9, s.s. 305—313.
3. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2, стр. 195—206.
4. Rao G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, No 6, pp. 377—382.
5. Guderley G. On Rao's method for the computation of exhaust nozzles. Z. Flugwissenschaften, Dezember 1959, B. 7, H. 12, s.s. 345—350.
6. Guderley K. G., Armitage J. V., Valentine E. M. Nose and inlet shapes of minimum drag in supersonik flow. IAS Paper, 1962, No. 62—116.

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛАХ НАИМЕНЬШЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

А. Л. Гонор

(Москва)

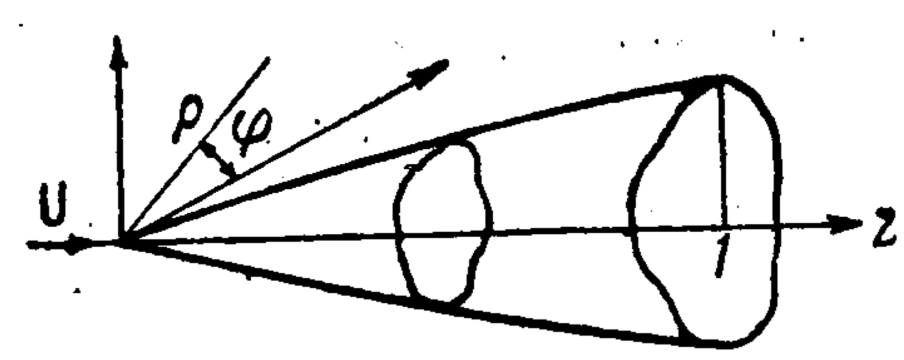
В баллистике и газовой динамике определяются формы тел вращения, имеющие наименьшее сопротивление при заданном удлинении, объеме или при каких-либо других дополнительных условиях.

Из этих решений и из экспериментов стало известно, что придание телу оптимальной формы при гиперзвуковых скоростях обтекания позволяет уменьшить (см., например, [1]) его волновое сопротивление (по сравнению с эквивалентным конусом) примерно на 30—40%.

Ниже делается попытка сформулировать и решить задачу о форме пространственного оптимального тела в гиперзвуковом потоке газа.

Рассмотрим обтекание тела (фиг. 1) в цилиндрической системе координат ρ, φ, z, в которой ось z выбрана по потоку. Предположим, что поверхность тела определяется уравнением

$$\rho = r(\varphi) f(z) \tag{1}$$



Фиг. 1

Считая длину тела равной единице, а функцию $f(z)$ безразмерной, можно положить $f(1) = 1$.

Давление на поверхности тела будем определять по закону Ньютона, который можно записать в виде

$$C_p = k\cos^2(\mathbf{n}, \mathbf{U}) \left(C_p = \frac{2(p - p_0)}{\rho U^2} \right) \tag{2}$$

где C_p — коэффициент давления, k — коэффициент пропорциональности, $\mathbf{n}$ — вектор нормали; $\mathbf{U}$ — вектор скорости набегающего потока. Используя равенства (1), (2), можно показать, что коэффициент сопротивления тела, отнесенный к площади миделя S (при $f'(z) \geqslant 0$), представляется выражением

$$C_x = \frac{K}{S_1} \int_0^{2\pi} r^4(\varphi)\, d\varphi \int_0^1 \frac{f(z) f'^3(z)\, dz}{1 + r'^2 / r^2 + r^2 f'^2(z)} \tag{3}$$

Ограничимся теперь рассмотрением тонких тел; тогда величина $r^2 f'^2(z) \ll 1$ и в выражении (3) ею можно пренебречь. В результате получим

$$C_x = \frac{K}{S_1} \int_0^1 f(z) f'^3(z)\, dz \int_0^{2\pi} \frac{r^4(\varphi)\, d\varphi}{1 + r'^2 / r^2} \tag{4}$$