О НЕКОТОРОЙ ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ОБ ОБТЕКАНИИ СФЕР

Р. Н. Кауфман (Новосибирск)

В предлагаемой статье приводится некоторая полная система решений линеаризованных уравнений Навье—Стокса в случае установившегося движения вязкой жидкости в отсутствие внешних сил, найденная методом разделения переменных работы [1]. Для полученных решений выводятся затем формулы преобразования от одного центра к другому, или формулы переноса, при помощи которых, как это делалось в работе [2], можно решать различные краевые задачи об обтекании сфер, сводящиеся к решению некоторых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Эти решения, выведенные здесь методом работы [1], можно в принципе получить также из общего решения системы (1.1), приведенного Ламбом [3].

§ 1. Система нормальных решений и нахождение для них формул переноса. Рассмотрим линеаризованные уравнения установившегося движения вязкой жидкости при отсутствии внешних сил

$$\nu\Delta\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости. Взяв ротор от левой и правой частей первого уравнения, исключаем p и получаем систему уравнений

$$\operatorname{rot}\Delta\mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

Применяя к системе (1.2) метод разделения переменных работы [1], получим в сферических координатах шесть типов решений (назовем их нормальными): внешние нормальные решения $\mathbf{u}_{ln}$, $\mathbf{v}_{ln}$, $\mathbf{w}_{ln}$ и внутренние нормальные решения $\mathbf{p}_{ln}$, $\mathbf{q}_{ln}$, $\mathbf{r}_{ln}$ (внешние нормальные решения употребляются при решении краевых задач для неограниченных областей, внутренние — для ограниченных).

Решение $\mathbf{u}_{ln}$ и $\mathbf{p}_{ln}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{ln} &= r^{-l}\left(Y_{ln}\mathbf{e}_r - \frac{l-2}{l(l+1)}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{ln}\mathbf{e}_\theta - \frac{l-2}{l(l+1)}\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{ln}\right)\\
\mathbf{p}_{ln} &= r^{l+1}\left(Y_{ln}\mathbf{e}_r + \frac{l+3}{l(l+1)}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{ln}\mathbf{e}_\theta + \frac{l+3}{(l(l+1)}\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{ln}\right)\\
Y_{ln}(\theta,\varphi) &= P_{ln}(\cos\theta)\,e^{in\varphi} \qquad (l=0,1,2,\ldots;\ -l\leqslant n\leqslant l)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь P_{ln} — присоединенные функции Лежандра, определяемые формулой

$$P_{ln}(x) = \frac{(1-x^2)^{n/2}}{2^l\, l!}\frac{d^{l+n}}{dx^{l+n}}(x^2-1)^l$$

Решения же $\mathbf{v}_{ln}$, $\mathbf{w}_{ln}$, $\mathbf{q}_{ln}$ и $\mathbf{r}_{ln}$ совпадают с одноименными решениями статического уравнения упругости работы [2]. Это обясняется тем, что для этих решений $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ (см., например, [2]): следовательно, будучи решениями статического уравнения упругости

$$\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

они удовлетворяют уравнению $\Delta\mathbf{v} = 0$, а значит, и уравнениям (1.2).

Для решений $\mathbf{v}_{ln}$ и $\mathbf{w}_{ln}$ формулы переноса приведены в работе [2].

Найдем формулу переноса для $\mathbf{u}_{ln}$, выражающую это решение, отнесенное к системе сферических координат с началом в точке O_1 (фиг. 1) через внутренние нормальные решения, отнесенные к системе координат с началом в точке O_2 (ось z у обеих систем общая, проходящая через точки O_1 и O_2, а оси x и y параллельны).

Будем ее искать в виде

$$\mathbf{u}_{ln}(r_1, \theta_1, \varphi) = \sum \alpha_{lkn} \mathbf{p}_{kn}(r_2, \theta_2, \varphi) + \sum \beta_{lkn} \mathbf{q}_{kn}(r_2, \theta_2, \varphi) + \sum \gamma_{lkn} \mathbf{r}_{kn}(r_2, \theta_2, \varphi) \quad (1.4)$$

где пределы суммирования определятся одновременно с неизвестными пока коэффициентами α_{lkn}, β_{lkn}, γ_{lkn} (для удобства дальнейших вычислений векторы $\mathbf{r}_{kn}$ берем в этой формуле сокращенными на $[2l(l+1)]^{-1/2}$).

При нахождении коэффициентов будем опираться так же, как это было в работе [2], на формулу переноса для шаровых функций ([3], стр. 136)

$$\frac{Y_{ln}(\theta_1, \varphi)}{r_1^{l+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n}}{d^{l+k+1}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!\,(l-n)!} Y_{kn}(\theta_2, \varphi)\, r_2^k \quad (1.5)$$

где $r_2 < d$ (d — расстояние между точками O_1 и O_2 на фиг. 1).

Учтем, что для решений $\mathbf{r}_{kn}$ и $\mathbf{q}_{kn}$ имеем $\Delta\mathbf{v} = 0$. Для решений же $\mathbf{u}_{ln}$ и $\mathbf{p}_{kn}$ будет $\Delta\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$, где φ — гармоническая функция, так как для решений системы (1.1)

$$\Delta\mathbf{v} = \operatorname{grad}\frac{p}{\nu\rho}$$

а $\operatorname{div}\Delta\mathbf{v} = 0$ в силу второго уравнения этой системы.

Поэтому для нахождения коэффициентов α_{lkn} удобно применить оператор Лапласа к левой и правой частям равенства (1.4). Получим

$$\Delta\mathbf{u}_{ln}(r_1, \theta_1, \varphi) = \sum \alpha_{lkn} \Delta\mathbf{p}_{kn}(r_2, \theta_2, \varphi)$$

или после выписывания этого равенства в φ-ых компонентах

$$\operatorname{grad}_\varphi\left[\frac{(2l-1)Y_{ln}(\theta_1,\varphi)}{(l+1)\,r_1^{l+1}}\right] = \sum \alpha_{lkn} \operatorname{grad}_\varphi\left[\frac{2k+3}{k} Y_{kn}(\theta_2, \varphi)\, r_2^k\right]$$

В силу (1.5) получаем

$$\alpha_{lkn} = \frac{(-1)^{l-n}}{d^{l+k+1}} \frac{(l+k)!}{(k+1)!\,(l-n)!} \frac{k(2l-1)}{(2k+3)(l+1)} \qquad (k = n, n+1, \ldots) \quad (1.6)$$

Используем далее то обстоятельство, что ввиду (1.2)

$$\Delta(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$$

т. е. декартовы компоненты $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ суть гармонические функции. Для решений же $\mathbf{p}_{kn}$ (см., например, [2])

$$\operatorname{rot} p_{kn} = 0$$

Поэтому для нахождения коэффициентов γ_{lkn} удобно взять ротор от левой и правой частей равенства (1.4) и выписать полученное векторное равенство в декартовых компонентах, например, в z-ых. Получим

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{u}_{ln}(r_1, \theta_1, \varphi) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{lkn} \operatorname{rot}_z \mathbf{p}_{kn}(r_2, \theta_2, \varphi) + \sum \gamma_{lkn} \operatorname{rot}_z \mathbf{r}_{kn}(r_2, \theta_2, \varphi), \quad (1.7)$$

После вычисления z-ых компонент роторов соответствующих векторов получим в левой и правой частях (1.7) шаровые функции. Используя (1.5) и (1.6), находим

$$\gamma_{lkn} = \frac{(-1)^{l-n-1}}{d^{l+k}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!\,(l-n)!} \frac{2n(2l-1)}{k(k+1)\,l(l+1)} \qquad (k = n+1, n+2, \ldots) \quad (1.8)$$

Для нахождения коэффициентов β_{lkn} выпишем векторное равенство (1.4) в φ-ых компонентах. При этом используем рекуррентные формулы

$$\frac{P_{ln}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{(l+n-1)(l+n)\,P_{l-1,\,n-1}(x) + P_{l-1,\,n+1}(x)}{2n}$$

$$\frac{P_{ln}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{(l-n+1)(l-n+2)\,P_{l+1,\,n-1}(x) + P_{l+1,\,n+1}(x)}{2n}$$

которые можно получить при помощи формул, имеющихся в работе [4].

Полученное равенство должно выполняться для присоединенных функций со вторым индексом $n-1$ и $n+1$ порознь. Для последних оно имеет вид (после сокращения на $-{}^1/_2\, i$)

$$-\frac{l-2}{l(l+1)}\frac{Y_{l-1,\,n+1}}{r_1^{\,l}}=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{lkn}\frac{k+3}{k(k+1)}Y_{k+1,\,n+1}r_2^{\,k+1}+$$

$$+\sum\beta_{lkn}\frac{Y_{k-1,n+1}}{k}r_2^{\,k-1}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\gamma_{lkn}Y_{k,\,n+1}r_2^{\,k}$$

Используя (1.5), отсюда находим

$$\beta_{lkn}=\frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k-1}}\frac{(k+l-2)!}{(k+n)!\,(l-n)!}\left[\frac{\sigma_{k-1,\,l}+2n^2\tau_{k-l,\,l}}{(k-1)(2k-1)\,l\,(l+1)}\right] \tag{1.9}$$

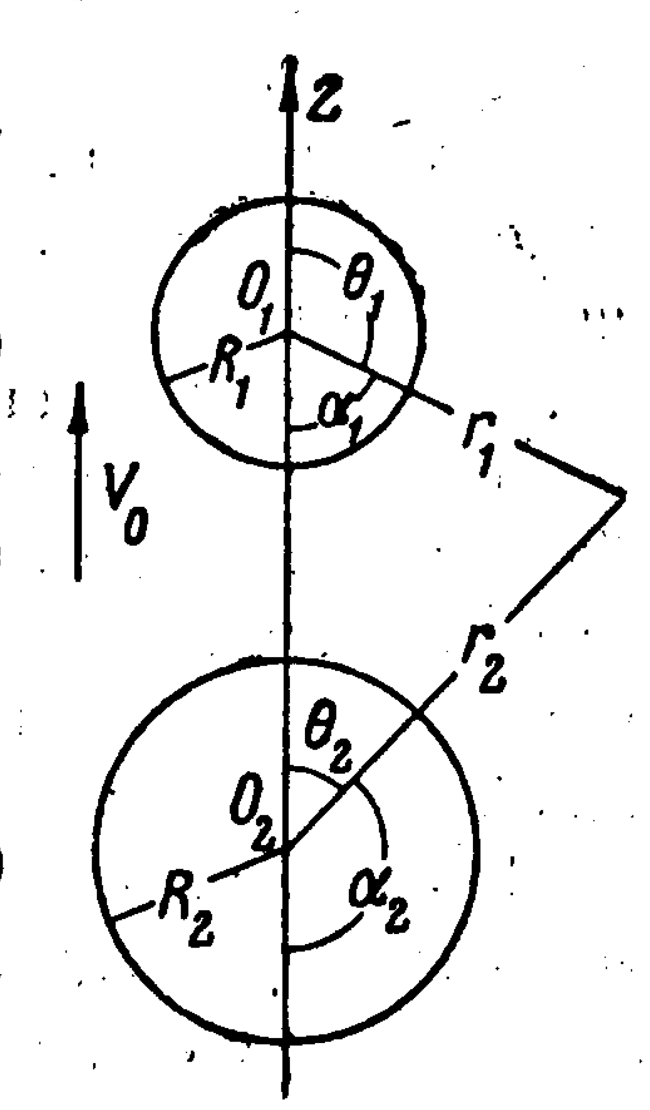
где

$$\sigma_{kl}=l\,[(2l-1)\,k^4+2l\,(l+1)\,k^3+l\,(3l+1)\,k^2+l\,(l+1)\,k] \tag{1.10}$$

$$\tau_{kl}=(l-2)\,k^3+(l^2-3l-1)\,k^2-l\,(l+1)\,k \qquad (k=n+2,\; n+3,\ldots)$$

Формулы переноса для внешних нормальных решений справедливы внутри шара радиуса d с центром в точке O_1 (фиг. 1), так как формула (1.5) имеет место в этой области. Аналогично можно найти формулы переноса для внешности этого шара, а также формулы переноса для внутренних нормальных решений. Для этого нужно использовать соответствующие формулы для шаровых функций [3].

§ 2. Применение полученных решений и формул переноса к решению краевых задач. Рассмотрим в принятых предположениях обтекание вязкой жидкостью двух сфер, если скорость потока на бесконечности равна $\mathbf{v}_0$ и направлена, например, параллельно линии, соединяющей центры сфер (фиг. 1).



Искомый вектор скорости $\mathbf{v}$, являющийся решением уравнений (1.1) или (1.2), должен удовлетворять условиям

$$\mathbf{v}=0 \quad \text{на сферах}, \qquad \mathbf{v}\,|_{\infty}=\mathbf{v}_0 \tag{2.1}$$

Для поставленной задачи имеет место теорема единственности [1]. Решение краевой задачи ищем в виде $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1$, где $\mathbf{v}_1|_{\infty}=0$ в силу условия (2.1).

Так как (см. работу [2])

$$\mathbf{v}_0=|\,\mathbf{v}_0\,|\,(\cos\theta\,\mathbf{e}_r-\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta)=|\,\mathbf{v}_0\,|\,\mathbf{q}_{10} \tag{2.2}$$

то $\mathbf{v}_1$ естественно искать в виде рядов по осесимметрическим решениям $\mathbf{u}_{l0}$ и $\mathbf{v}_{l0}$ ($\mathbf{w}_{l0}\equiv 0$).

Будем искать $\mathbf{v}_1$ в виде рядов по векторам $\mathbf{u}_{l0}$ и $\mathbf{v}_{l0}$, отнесенным к центрам обеих сфер (фиг. 1)

$$\mathbf{v}_1=\sum_{l=0}^{\infty}A_{l1}\,\mathbf{u}_{l0}(r_1,\,\theta_1)\,R_1^{\,l+1}+B_{l1}\,\mathbf{v}_{l0}(r_1,\,\theta_1)\,R_1^{\,l+3}+$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}A_{l2}\,\mathbf{u}_{l0}(r_2,\,\theta_2)\,R_2^{\,l+1}+B_{l2}\,\mathbf{v}_{l0}(r_2,\,\theta_2)\,R_2^{\,l+3} \tag{2.3}$$

Отсюда имеем четыре ряда неизвестных коэффициентов, для определения которых имеются четыре граничных условия

$$\mathbf{v}_{1r}=0 \qquad \mathbf{v}_{1\theta}=0 \tag{2.4}$$

на поверхности каждой сферы.

---

[1] Доказательство ее здесь не приводится. Справедливость этой теоремы вытекает, например, из теоремы единственности для обобщенного решения, доказанной в работе [5].

Для того чтобы потребовать выполнения условий (2.4) на поверхности первой сферы, выражаем $\mathbf{u}_{l0}(r_2, \theta_2)$ и $\mathbf{v}_{l0}(r_2, \theta_2)$ по формулам переноса через нормальные решения, отнесенные к центру этой сферы, т. е. являющиеся функциями r_1 и θ_1; при этом сначала придется использовать углы α_1 и α_2, а затем учесть, что

$$\cos\alpha_i = -\cos\theta_i \qquad (i = 1, 2), \qquad P_{ln}(-x) = (-1)^{l-n} P_{ln}(x)$$

Аналогично поступаем для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности второй сферы.

Получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов, аналогичную системе, полученной в работе [2], но более простую, так как в рассматриваемой задаче отсутствуют зеркальные отображения. Производя, как и в работе [2], замену неизвестных, придем к системе вида

$$z_k + \sum_{l=1}^{\infty} C_{kl} z_l = b_k \qquad (2.5)$$

матрица которой есть вполне непрерывный оператор [2] в гильбертовом пространстве l_2.

В силу справедливости теоремы единственности для данной задачи осуществляется следующий случай альтернативы Фредгольма: система (2.5) имеет единственное решение, принадлежащее l_2, при любых правых частях (b_k обращается в нуль, начиная с некоторого k, поэтому b_k всегда принадлежит l_2). Это решение может быть найдено методом усечения, или редукции и, по крайней мере, в области регулярности методом последовательных приближений (система регулярна при достаточно удаленных шарах).

Доказательство того, что построенные ряды в сумме с $\mathbf{v}_0$ дают решение поставленной краевой задачи, производится так же, как в работе [2].

Аналогично решается задача об обтекании двух сфер, если $\mathbf{v}_0$ направлена перпендикулярно к линии, соединяющей их центры (только здесь придется использовать решения со вторым индексом *1*). Таким образом, в силу линейности рассматриваемых уравнений задача решается для произвольного направления скорости $\mathbf{v}_0$.

Подобным же образом можно решить задачу об обтекании вязкой жидкостью трех и более сфер. При этом, кроме формул переноса, нужно будет использовать также формулы поворота [2], выражающие нормальный вектор в данной системе координат через нормальные векторы, рассматриваемые в системе координат, получающийся из данной некоторым вращением.

Кроме того, аналогично тому, как это делалось в работах [2,6], можно решить краевые задачи (при сделанных упрощениях) об обтекании вязкой жидкостью сферических полостей в полупространстве и слое.

В заключение автор благодарит П. Я. Кочину и И. Н. Векуа за обсуждение работы и замечания.

Поступила
10 X 1962

Новосибирский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. и Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
2. Кауфман Р. Н. Решение некоторых краевых задач статической теории упругости для слоя с шаровой полостью. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.
3. Ламб. Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
4. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, 1952.
5. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.
6. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
7. Ламбина Е. Н. Решение краевой задачи статической теории упругости для полупространства с шаровой полостью при заданных на границе перемещениях. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, 1959, № 2.