

которое должно выполняться для всех r , кроме $r = \pm a$. Но по свойству выражения $F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)$ условие (4.9) не имеет места, что и доказывает невозможность существования у системы (3.1) или, что то же самое, у системы (1.1) в рассматриваемом случае общего четвертого алгебраического интеграла.

Как показано в работе [6], задача в этом случае не имеет общего решения, однозначного на всей плоскости t . Следовательно, необходимым и достаточным условием существования четвертого независимого общего алгебраического интеграла системы (1.1) при $A = B$ является условие $x'_0 = y'_0 = 0$.

Поступила 20 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2.
2. Архангельский Ю. А. Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
3. H u s s o n Ed. Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. Ann. d. l. faculté des sciences de l'univ. de Toulouse, 2 Série, 1906, t. VIII, p. 119—152.
4. P o i n c a r é H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, 1892, t. 1.
5. Г у р с а Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 2, ГТТИ, 1933.
6. Архангельский Ю. А. Об однозначных интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКИ В НЬУТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

В. В. Белецкий

(Москва)

Рассмотрим следующее движение тела около закрепленной точки в ньютоновском поле сил. Пусть тело обладает динамической симметрией ($A = B$), закрепленная точка совпадает с центром масс тела и, кроме того, начальные условия таковы: поперечные составляющие угловой скорости равны нулю ($p_0 = q_0 = 0$), а продольная составляющая произвольна ($r_0 \neq 0$). Если бы не было ньютоновского поля сил, то тело в этом случае, как известно, сохраняло бы постоянное направление оси симметрии в пространстве. Поэтому все эффекты в движении оси тела для рассматриваемого примера обуславливаются только наличием ньютоновского поля. Действие ньютоновского поля проступает в этом примере в чистом виде, не будучи осложнено более общими начальными условиями. Именно поэтому исследование указанного движения представляет интерес.

Рассматриваемая задача о движении твердого тела около закрепленной точки интегрируется в квадратурах, как частный случай двух более общих интегрируемых случаев [1-3].

Пусть θ, ψ, φ — углы Эйлера (причем θ — угол между осью симметрии тела и направлением от центра притяжения к неподвижному центру масс тела). Интегралы энергии и кинетического момента имеют тогда вид

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 &= \alpha + m\omega^2 \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \dot{\varphi} &= \beta - br_0 \cos \theta \end{aligned} \quad \left(\omega^2 = \frac{\mu}{R^3}, \quad m = 3 \frac{A-C}{A}, \quad b = \frac{C}{A} \right)$$

Здесь r_0 — составляющая угловой скорости по оси симметрии (r_0 остается постоянным в силу уравнений движения); α и β — постоянные интегрирования; C — продольный, A — поперечный момент инерции; μ — гравитационная постоянная; R — расстояние от центра масс тела до центра притяжения.

Переменные в этой системе легко разделяются и задача сводится к квадратурам

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (1-u^2)[\alpha + m\omega^2 u^2] - [\beta - br_0 u]^2 \equiv f(u), \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1-u^2}, \quad u = \cos \theta$$

Для рассматриваемых начальных данных ($p_0 = q_0 = 0$) имеем

$$\alpha = -m\omega^2 u_0^2, \quad \beta = br_0 u_0$$

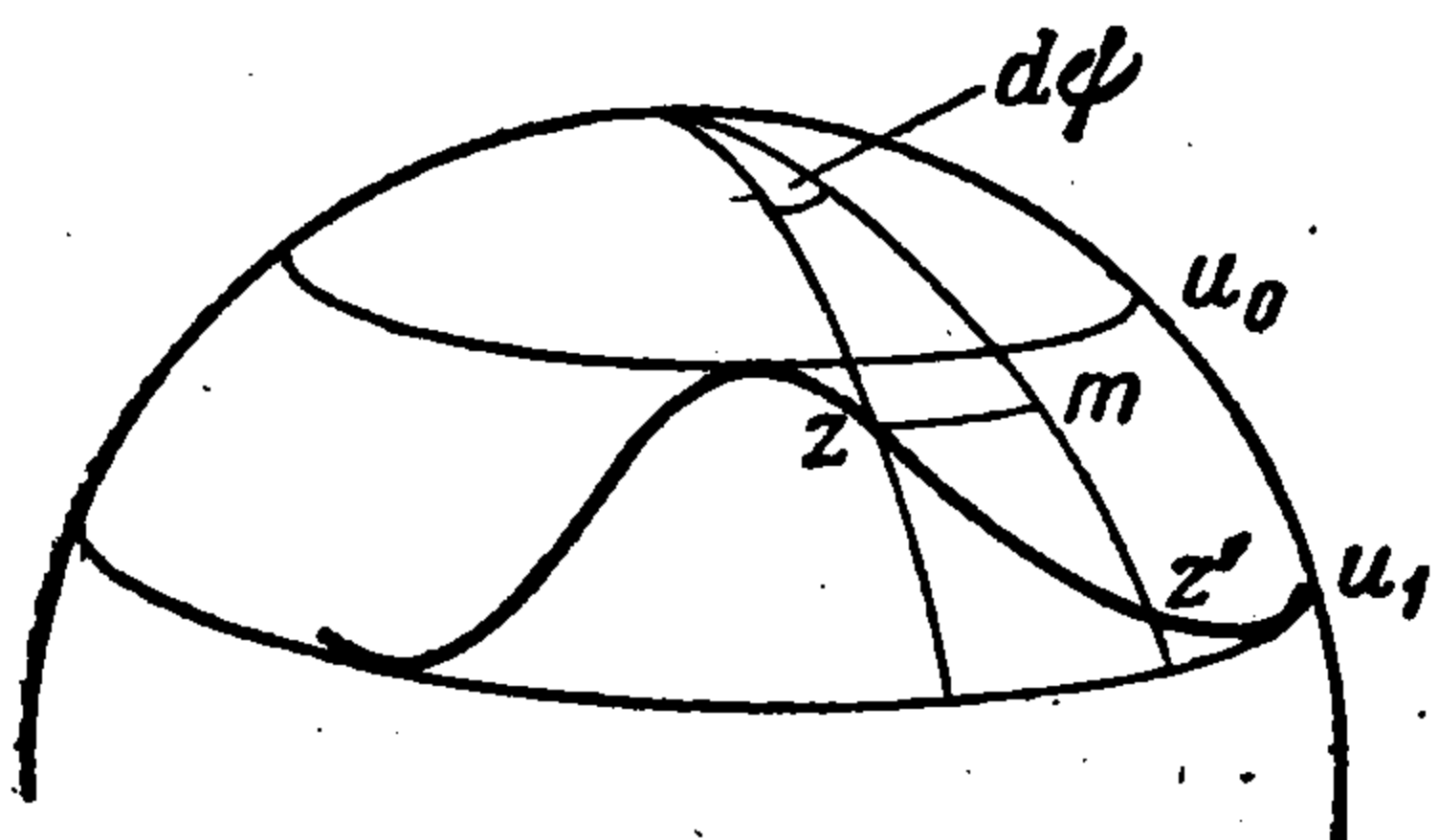
И, следовательно

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u), \quad f(u) = (u_0 - u) \{-(1-u^2)(u+u_0)m\omega^2 - (u_0 - u)b^2 r_0^2\} \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = br_0 \frac{u_0 - u}{1-u^2} \quad (2)$$

Анализ движения можно провести, не занимаясь обращением эллиптических квадратур (1), (2). Из (1) следует, что реальное движение происходит в интервале значений u , ограниченных двумя значениями: начальным u_0 и значением u_1 , связанных с u_0 соотношением

$$u_0 = u_1 \frac{b^2 r_0^2 - (1-u_1)^2 m\omega^2}{b^2 r_0^2 + (1-u_1)^2 m\omega^2} \quad (3)$$



Фиг. 1

На единичной сфере с центром в центре масс тела след оси тела будет описывать, таким образом, кривую (фиг. 1) между параллелями u_0 и u_1 .

Пусть V — угол между кривой, описываемой следом оси тела и меридианом на единичной сфере; $zm = \sin \theta d\psi$, $z'm = d\theta$, как это видно из фиг. 1.

Тогда

$$\operatorname{tg} V = -(1-u^2) \frac{d\psi}{du} = -br_0 \sqrt{1-u^2} \frac{u-u_0}{\sqrt{f(u)}}$$

Отсюда видно, что $\operatorname{tg} V = 0$ при $u = u_0$, т. е. на параллели $u = u_0$ имеется точка возврата; $\operatorname{tg} V = \infty$ при $u = u_1$, т. е. траектория касается параллели u_1 .

На параллели u_0 скорость прецессии (2) равна нулю: $\dot{\psi}(u_0) = 0$; на параллели u_1 скорость прецессии, как легко показать, максимальна $\dot{\psi}(u_1) = \dot{\psi}_{\max}$. Введем среднюю скорость прецессии

$$\langle \dot{\psi} \rangle = \frac{1}{2} [\dot{\psi}(u_0) + \dot{\psi}(u_1)] = \frac{1}{2} \dot{\psi}(u_1) \quad (4)$$

Подставляя (3) в (2) и учитывая (4), получим

$$\langle \dot{\psi} \rangle = -3\omega^2 \frac{A-C}{Cr_0} \frac{\cos \theta_1}{1 + 3 \sin^2 \theta_1 (\omega/r_0)^2 [(A-C)/C] (A/C)} \quad (5)$$

Здесь θ_1 определяется через θ_0 и параметры задачи согласно (3). Если $\omega/r_0 \ll 1$, т. е. действие возмущений мало, то с точностью до членов первого порядка малости

$$\langle \dot{\psi} \rangle \approx -3\omega^2 \frac{A-C}{Cr_0} \cos \theta_0 \quad (6)$$

Рассмотрим формулу (3). Схематически зависимость для разных значений параметра

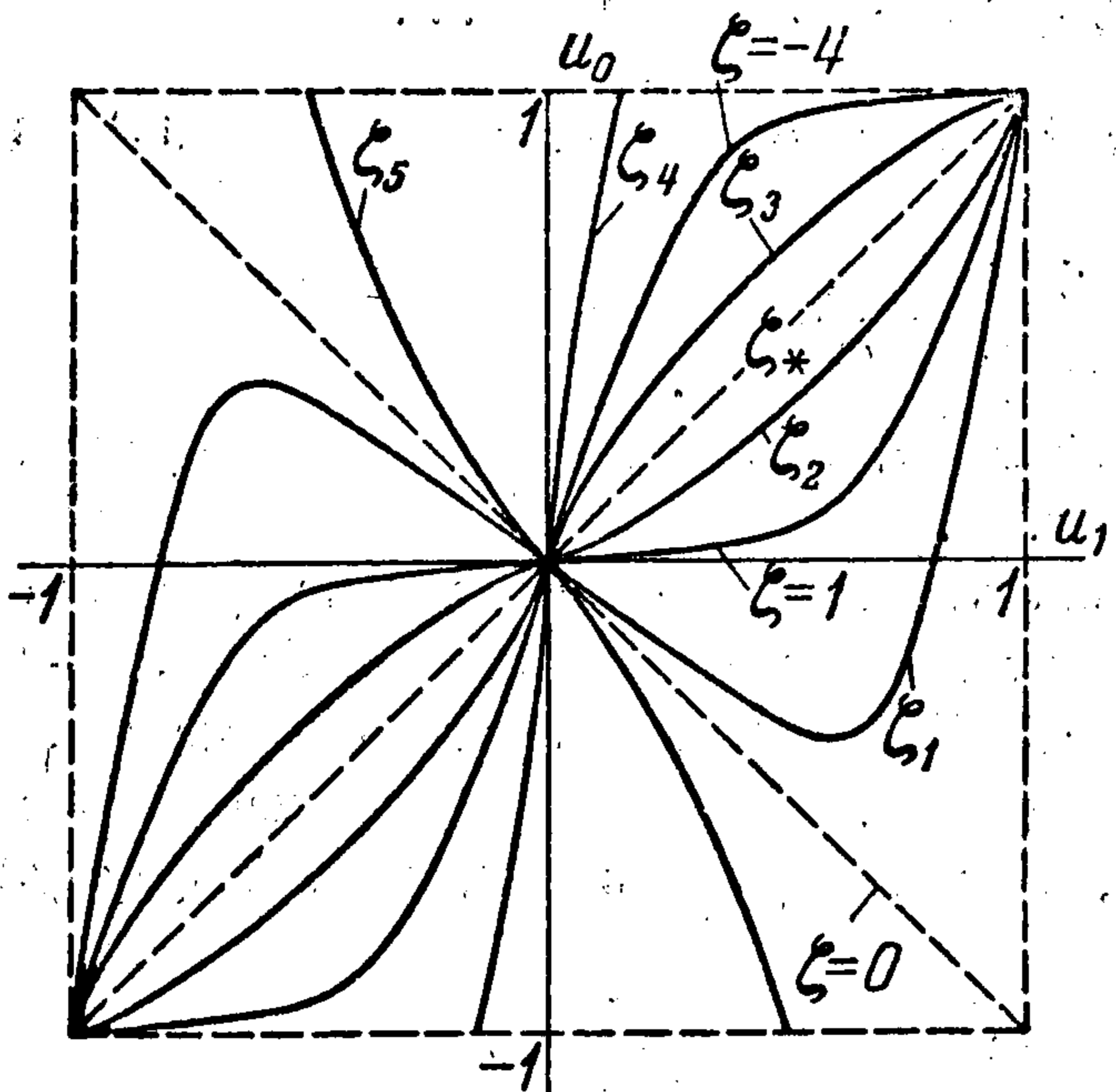
$$\zeta = b^2 r_0^2 / m\omega^2 \quad (7)$$

представлена на фиг. 2. По этим кривым можно понять картину движения. Рассмотрим сначала область $\zeta > 0$ или, что то же, $m > 0$, т. е. вытянутое тело. Эта область заключена между диагоналями $u_0 = \pm u_1$ и содержит в себе ось u_1 . Если $\zeta = \zeta_2 > 1$, то каждому значению u_0 соответствует только одно значение u_1 , тем более близкое к u_0 , чем больше ζ ; при этом $|u_1| > |u_0|$, а знаки u_1 и u_0 совпадают.

Кривая для $\zeta = 1$ касается оси u_1 . При $\zeta = \zeta_1 < 1$ каждому значению u_0 может соответствовать одно или три значения u_1 (полином $f(u)$ будет вместе с u_0 иметь два или четыре действительных корня). Но реальному движению соответствует зна-

чение u_1 , совпадающее по знаку с u_0 (это легко обнаружить, рассматривая по формуле (1) зависимость $f(u)$ в этом случае). Снова будет иметь место условие $|u_1| > |u_0|$.

В рассматриваемом случае ($\zeta > 0$) движение будет иметь следующий характер: параллель u_1 лежит ближе к полюсу единичной сферы, чем параллель u_0 ; кривая, как было указано выше, касается параллели u_1 и имеет на u_0 точку возврата (фиг. 3а). Для сжатого тела $m < 0$, т. е. $\zeta < 0$. В этом случае каждому значению u_0 всегда соответствует одно значение u_1 (фиг. 2). При этом, если $\zeta < -1$ (например $\zeta = \zeta_3$ или $\zeta = \zeta_4$ на фиг. 2), то знак u_1 совпадает со знаком u_0 и $|u_1| < |u_0|$. Точки возврата будут лежать на начальной параллели u_0 , более близкой к полюсу, чем u_1 (фиг. 3б). Если же $\zeta = \zeta_5 > -1$, то знак u_1 противоположен знаку u_0 , и след оси спутника при движении будет пересекать экватор единичной сферы; качественно картина движения будет иметь вид, как на фиг. 3 б.



Фиг. 2

Отметим, что кривая $\zeta = -4$ касается (фиг. 2) горизонталей $u_0 = \pm 1$ в точках $u_1 = \pm 1$. Из этого следует, что движение $u_0 = u_1 = \pm 1$ (вращение вокруг оси, совпадающей с направленным на центр притяжения) будет устойчиво, если $|\zeta| = |\zeta_3| > 4$ и неустойчиво при $|\zeta| = |\zeta_4| < 4$, так как в первом случае бесконечно малому отклонению u_0 от единицы будет соответствовать бесконечно малое отклонение u_1 от единицы, а во втором случае, как видно из фиг. 2, u_1 отклоняется от единицы на конечную величину при сколь угодно малом отклонении u_0 от единицы. При $\zeta > 0$, т. е. для вытянутого тела, как ясно из фиг. 2, движения $u_0 = u_1 = \pm 1$ всегда устойчивы. Таким образом, необходимыми и достаточными условиями устойчивости вращения вокруг вертикально расположенной оси будут условия

$$\zeta > 0, \quad \zeta < -4$$

Этот результат совпадает с одним из результатов статьи [2], где условия устойчивости получены методом Ляпунова — Четаева.

Заметим, что $u_1 \rightarrow \pm 1$ при $\zeta \rightarrow +0$, что соответствует превращению пространственного движения в плоское при $r_0 \rightarrow 0$. В этом случае $\langle \psi \rangle \rightarrow 0$, как видно из (5), и след оси симметрии вытянутого тела будет колебаться, проходя через полюс ($u_1 = +1$ или -1 , в зависимости от знака u_0) между крайними значениями, ограниченными параллелью $\theta_0 = \arccos u_0$.

Если $\zeta \rightarrow -0$, то $u_1 \rightarrow -u_0$ и ось симметрии сжатого тела будет колебаться, проходя экватор между параллелями, отстоящими на одинаковое расстояние от экватора. На фиг. 2 отмечена также предельная линия $\zeta = \zeta_* = \pm \infty$.

Если r_0 близко к нулю, во всяком случае $r_0 \ll \omega$, то (для случая сжатого тела)

$$\langle \psi \rangle \approx \frac{C}{A} r_0 \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0}$$

и период прецессии будет

$$T_\psi = \frac{2\pi A \sin^2 \theta_0}{r_0 C \cos \theta_0}$$

Период нутации будет близок к периоду плоских колебаний [1]

$$T_0 = \frac{4K(k^2)}{\sqrt{3\omega^2(C-A)/C}}, \quad k^2 = \cos^2 \theta_0$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода. Рассмотрим отношение периодов

$$\frac{T_0}{T_\psi} = \frac{2K(\cos^2 \theta_0)}{\pi \sqrt{3(C-A)/C}} \frac{C}{A} \frac{r_0}{\omega} \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \quad (8)$$

Так как

$$\frac{2}{\pi} K(\cos^2 \theta_0) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cos^2 \theta_0 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cos^4 \theta_0 + \dots$$

то для случая небольших колебаний в узкой полосе около экватора ($\theta_0 = 90^\circ - \theta^*$, θ^* — мало) будем приближенно иметь

$$\frac{T_0}{T_\psi} \approx \frac{C/A \sin \theta^*}{\sqrt{3(C-A)/C}} \frac{r_0}{\omega}$$

Так как по предположению $r_0 \ll \omega$ и θ^* мало, то на одном периоде прецессии будет очень много нутационных периодов, т. е. небольшой кусок траектории на единичной сфере будет содержать много «лепестков». Но при увеличении расстояния начальной точки от экватора вместе с амплитудой нутационных колебаний растет и ширина лепестков траектории (за счет роста $K(\cos^2 \theta_0)$ в числителе и уменьшения $\sin^2 \theta_0$ в знаменателе формулы (8)). Отметим еще, что в общем случае разность $\Delta = u_1 - u_0$ косинусов граничных широт, как следует из (3), дается формулой

$$\Delta = 2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1 \frac{\kappa}{1 + \kappa \sin^2 \theta_1} \quad \left(\kappa = \frac{1}{\zeta}\right) \quad (9)$$

Для случая весьма быстрого вращения тела имеем $\omega/r_0 \ll 1$, $\kappa \ll 1$ и из фиг. 2 следует, что $\theta_1 = \theta_0 + \delta$, где δ — мало. Тогда из формулы (3)

$$\Delta = 2\kappa u_0 (1 - u_0^2), \quad \text{или} \quad \Delta = 6 \left(\frac{\omega}{r_0}\right)^2 \left(\frac{A-C}{C}\right) \frac{A}{C} \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 \quad (10)$$

Период прецессии согласно (6) будет в этом случае большой величиной порядка r_0/ω

$$T_\psi = \frac{2\pi}{3[(A-C)/C] \cos \theta_0 \omega} \left(\frac{r_0}{\omega}\right)$$

Оценим период нутационных колебаний для быстро вращающегося тела.

Пусть $u = u_0 + x$, где x — малая величина. Тогда из (1) имеем, оставляя под радикалом члены только первого и второго порядка малости

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x \{2m\omega^2 u_0 (1 - u_0^2) - xb^2 r_0^2\}}$$

Отсюда полупериод нутационных колебаний

$$\frac{\tau}{2} = \int_0^\Delta \frac{dx}{\sqrt{x \{2m\omega^2 u_0 (1 - u_0^2) - xb^2 r_0^2\}}} = \frac{\pi}{br_0}$$

Видим, что колебания угла нутации будут быстрыми. Траектория на единичной сфере будет содержать большое количество мелких лепестков.

В заключение отметим, что при $A \gg C$ движение будет близким к плоским колебаниям (в том же смысле, что и при $r_0 \rightarrow 0$), так как в предельном случае ($C = 0$) формулы (1) и (2) сразу дают плоские колебания.

Поступила 20 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2.
2. Белецкий В. В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
3. Харламова Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сибирск. отд. АН СССР 1959, № 6.