ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Ю. А. Архангельский (Москва)

Показано, что в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки под действием ньютоновского поля сил четвертый алгебраический интеграл существует только в случае, аналогичном случаю Эйлера в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле сил тяжести и в случае, аналогичном случаю Лагранжа.

1. Как известно [1], приближенные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием центрального ньютоновского поля сил

$$\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=y_0'\gamma''-z_0'\gamma'+\alpha(C-B)\gamma'\gamma'', &&\frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma''\\
&B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr=z_0'\gamma-x_0'\gamma''+\alpha(A-C)\gamma''\gamma, &&\frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma \qquad (1.1)\\
&C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=x_0'\gamma'-y_0'\gamma+\alpha(B-A)\gamma\gamma', &&\frac{d\gamma''}{dt}=q\gamma-p\gamma'
\end{aligned}$$

$$\left(x_0'=Mgx_0,\ y_0'=Mgy_0,\ z_0'=Mgz_0,\ \alpha=\frac{3g}{R}\right)$$

имеют три первых независимых алгебраических интеграла: интеграл живой силы, интеграл площадей и тривиальный интеграл

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2-2(x_0'\gamma+y_0'\gamma'+z_0'\gamma'')+\alpha(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)=\text{const} \qquad (1.2)$$

$$Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=\text{const},\qquad \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$$

Система уравнений (1.1) не содержит явно время t, кроме того, она имеет последний множитель Якоби, равный единице; поэтому существование четвертого интеграла для системы (1.1), который оказался алгебраическим

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2-\alpha(BC\gamma^2+AC\gamma'^2+AB\gamma''^2)=\text{const}\quad \text{при } x_0'=y_0'=z_0'=0$$

$$r=\text{const}\quad \text{при } A=B,\ x_0'=y_0'=0$$

позволяет в этих двух случаях свести задачу к квадратурам. Возникает вопрос, в каких еще случаях возможно существование четвертого алгебраического интеграла. Ясно, что доказанное в работе [2] условие, чтобы эллипсоид инерции был эллипсоидом вращения, является необходимым, но не достаточным условием для существования нового четвертого алгебраического интеграла.

Покажем, что при $A=B$ и $\alpha\neq 0$ четвертый алгебраический интеграл возможен только в случае $x_0'=y_0'=0$, являющемся аналогом случая Лагранжа в классической задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

2. Введем новые переменные y_1, y_2, z_1, z_2 вместо p, q, γ, γ'

$$y_1=p+iq,\qquad y_2=p-iq,\qquad z_1=\gamma+i\gamma',\qquad z_2=\gamma-i\gamma'\qquad (i=\sqrt{-1})$$

и, заменяя t на $-it$, перепишем систему (1.1) (предполагая, конечно, что $A=B$ и $y_0'=0$) в виде

$$\begin{aligned}
A\frac{dy_1}{dt}&=-(A-C)\,ry_1+z_0'z_1-x_0'\gamma''+\alpha(A-C)\gamma''z_1\\
A\frac{dy_2}{dt}&=(A-C)\,ry_2-z_0'z_2+x_0'\gamma''-\alpha(A-C)\gamma''z_2
\end{aligned}\qquad (2.1)$$

$$2C\frac{dr}{dt}=x_0'(z_2-z_1),\qquad \frac{dz_1}{dt}=y_1\gamma''-rz_1,$$

$$\frac{dz_2}{dt}=rz_2-y_2\gamma'',\qquad 2\frac{d\gamma''}{dt}=y_2z_1-y_1z_2$$

Эта система имеет следующие первые интегралы:

$$Ay_1y_2+Cr^2-x_0'(z_1+z_2)-2z_0'\gamma''-\alpha(A-C)\gamma''^2=\text{const} \qquad (2.2)$$

$$A(y_1z_2+z_1y_2)+2Cr\gamma''=\text{const},\qquad z_1z_2+\gamma''^2=\text{const}.$$

Введем произвольный параметр λ при помощи замены $y_1, y_2, r, z_1, z_2, \gamma'', t$ на $\lambda^2 y_1, \lambda y_2, \lambda r, \lambda^3 z_1, \lambda^2 z_2, \lambda^3\gamma'', t/\lambda$; тогда система (2.1) и ее первые интегралы (2.2) перепишутся так:

$$A\frac{dy_1}{dt} = -(A-C)\,ry_1 + z_0'z_1 - x_0'\gamma'' + \lambda^3\alpha(A-C)\gamma''z_1$$

$$A\frac{dy_2}{dt} = (A-C)\,ry_2 - z_0'z_2 + \lambda x_0'\gamma'' - \lambda^3\alpha(A-C)\gamma''z_2 \tag{2.3}$$

$$2C\frac{dr}{dt} = x_0'(z_2 - \lambda z_1), \quad \frac{dz_1}{dt} = -rz_1 + \lambda y_1\gamma'', \quad \frac{dz_2}{dt} = rz_2 - \lambda y_2\gamma'', \quad 2\frac{d\gamma''}{dt} = y_2z_1 - y_1z_2$$

$$Cr^2 - x_0'z_2 + \lambda(Ay_1y_2 - x_0'z_1 - 2z_0'\gamma'') - \lambda^4\alpha(A-C)\gamma''^2 = h_1$$

$$A(y_1z_2 + z_1y_2) + 2Cr\gamma'' = h_2, \qquad z_1z_2 + \lambda\gamma''^2 = h_3 \tag{2.4}$$

где h_1, h_2, h_3 — некоторые произвольные постоянные.

Рассматривая систему уравнений, получающуюся из системы (2.3) при $\alpha = 0$, Гюссон [3] доказал, что в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле сил тяжести в случае, когда эллипсоид инерции относительно неподвижной точки есть эллипсоид вращения, четвертый алгебраический интеграл может быть только в случаях Лагранжа ($A = B$, $x_0' = y_0' = 0$) и Ковалевской ($A = B = 2C$, $y_0' = z_0' = 0$). Для доказательства использовались первые три члена разложения в ряды по степеням параметра λ, который полагался малым, общего интеграла полученной системы уравнений. При этом принималось во внимание, что правые части полученной системы уравнений и ее первые интегралы являются полиномами от $y_1, y_2, r, z_1, z_2, \gamma''$ и λ.

Так как первые три члена разложения в ряды по степеням малого параметра λ общего интеграла системы (2.3) не зависят от α и правые части системы (2.3) и соотношения (2.4) являются также полиномами от $y_1, y_2, r, z_1, z_2, \gamma'', \lambda$, то результат Гюссона должен рассматриваться как необходимое условие существования нового четвертого алгебраического интеграла изучаемой задачи.

3. Найдем теперь необходимые и достаточные условия существования нового четвертого алгебраического интеграла, для чего покажем, что система уравнений (2.1), переписанная для случая $A = B = 2C$, $y_0' = z_0' = 0$ в виде

$$2\frac{dy_1}{dt} = -ry_1 - c\gamma'' + \alpha\gamma''z_1, \qquad 2\frac{dy_2}{dt} = ry_2 + c\gamma'' - \alpha\gamma''z_2, \qquad 2\frac{dr}{dt} = c(z_2 - z_1)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = y_1\gamma'' - rz_1, \qquad \frac{dz_2}{dt} = rz_2 - y_2\gamma'', \qquad 2\frac{d\gamma''}{dt} = y_2z_1 - y_1z_2 \qquad \left(c = \frac{x_0'}{C}\right) \tag{3.1}$$

имеет только три первых алгебраических интеграла

$$2y_1y_2 + r^2 - c(z_1 + z_2) - \alpha\gamma''^2 = \mathrm{const}$$

$$y_1z_2 + z_1y_2 + r\gamma'' = \mathrm{const}, \qquad z_1z_2 + \gamma''^2 = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

Заменяя в системе (3.1) величины

$$y_1,\ y_2,\ r,\ z_2,\ t \quad \text{на}\ \lambda^{1/2}y_1, \qquad \lambda^{-1/2}y_2, \qquad \lambda^{-1/2}r, \qquad \lambda^{-1}z_2, \qquad \lambda^{1/2}t$$

где λ — произвольный параметр, получим систему уравнений

$$2\frac{dy_1}{dt} = -ry_1 - c\gamma'' + \alpha\gamma''z_1, \qquad 2\frac{dy_2}{dt} = ry_2 - \alpha\gamma''z_2 + \lambda c\gamma''$$

$$2\frac{dr}{dt} = c(z_2 - \lambda z_1), \qquad \frac{dz_1}{dt} = -rz_1 + \lambda y_1\gamma'' \tag{3.3}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = rz_2 - \lambda y_2\gamma'', \qquad 2\frac{d\gamma''}{dt} = y_2z_1 - y_1z_2$$

которой удовлетворяют следующие первые алгебраические интегралы:

$$r^2 - cz_2 + \lambda(2y_1y_2 - cz_1 - \alpha\gamma''^2) = h_1$$

$$y_1z_2 + z_1y_2 + r\gamma'' = h_2, \qquad z_1z_2 + \lambda\gamma''^2 = h_3 \tag{3.4}$$

Здесь h_1, h_2, h_3 — некоторые произвольные постоянные, являющиеся такими функциями от λ, что при $\lambda = 1$ интегралы (3.4) обращаются в переписанные для этого случая интегралы (1.2). Из работы Гюссона [3] следует, что если система (3.1) имеет четвертый алгебраический интеграл, то система

$$\frac{dy_2}{dr} = \frac{ry_2 - \alpha\gamma'' z_2 + \lambda c\gamma''}{c(z_2 - \lambda z_1)}, \qquad \frac{d\gamma''}{dr} = \frac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{c(z_2 - \lambda z_1)} \tag{3.5}$$

в которой величины y_1, z_1, z_2 заменены из (3.4), имеет алгебраический интеграл

$$F(h_1, h_2, h_3, y_2, \gamma'', r) = \text{const}$$

Этот интеграл разлагается в окрестности точки $\lambda = 0$ в степенной ряд по степеням $\lambda^{1/p}$ (p — целое число)

$$F_0(y_2, \gamma'', r) + \lambda^{1/p} F_1(y_2, \gamma'', r) + \ldots + \lambda F_p(y_2, \gamma'', r) + \ldots = \text{const} \tag{3.6}$$

с коэффициентами, представляющими алгебраические функции всех своих аргументов.

В этом разложении F_0 обязательно зависит хотя бы от одной из величин y_2 или γ''. Кроме того, при λ достаточно малом, общее решение $y_2(r)$ и $\gamma''(r)$ системы (3.5) можно разложить в ряды [4] по целым степеням параметра λ

$$\gamma'' = \gamma_3^{(0)} + \lambda\gamma_3^{(1)} + \ldots, \qquad y_2 = y_2^{(0)} + \lambda y_2^{(1)} + \ldots \tag{3.7}$$

При этом коэффициенты $\gamma_3^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $\gamma_3^{(1)}$, $y_2^{(1)}$ будут определяться из уравнений

$$\frac{dy_2^{(0)}}{dr} = \frac{1}{cz_2^{(0)}}\{ry_2^{(0)} - \alpha\gamma_3^{(0)}z_2^{(0)}\}, \qquad \frac{d\gamma_3^{(0)}}{dr} = \frac{1}{cz_2^{(0)}}\{y_2^{(0)}z_1^{(0)} - y_1^{(0)}z_2^{(0)}\} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2^{(1)}}{dr} &= \frac{1}{cz_2^{(0)}}\Big\{ry_2^{(1)} - \alpha(\gamma_3^{(0)}z_2^{(1)} + z_2^{(0)}\gamma_3^{(1)}) + c\gamma_3^{(0)} - \\ &\qquad - \frac{1}{z_2^{(0)}}(z_2^{(1)} - z_1^{(1)})(ry_2^{(0)} - \alpha\gamma_3^{(0)}z_2^{(0)})\Big\} \\ \frac{d\gamma_3^{(1)}}{dr} &= \frac{1}{cz_2^{(0)}}\Big\{y_2^{(0)}z_1^{(1)} + z_1^{(0)}y_2^{(1)} - y_1^{(0)}z_2^{(1)} - z_2^{(0)}y_1^{(1)} - \\ &\qquad - \frac{1}{z_2^{(0)}}(z_2^{(1)} - z_1^{(0)})(y_2^{(0)}z_1^{(0)} - y_1^{(0)}z_2^{(0)})\Big\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Разложения функций

$$y_1 = y_1^{(0)} + \lambda y_1^{(1)} + \ldots, \quad z_1 = z_1^{(0)} + \lambda z_1^{(1)} + \ldots, \quad z_2 = z_2^{(0)} + \lambda z_2^{(1)} + \ldots \tag{3.10}$$

вместе с разложением (3.7) должны удовлетворять [5] системе (3.4).

Подстановка разложения (3.7) в формулу (3.6) дает

$$\begin{aligned} F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) + \lambda^{1/p} F_1(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) + \ldots + \lambda\Big[y_2^{(1)}\frac{\partial F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)}{\partial y_2^{(0)}} + \\ + \gamma_3^{(1)}\frac{\partial F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)}{\partial\gamma_3^{(0)}} + F_p(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)\Big] + \ldots + \lambda^2(\ldots) + \ldots = \text{const} \end{aligned}$$

Это соотношение позволяет представить первые интегралы, которыми в этом случае должны обладать системы (3.8) и (3.9) соответственно в виде

$$F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) = \text{const} \tag{3.11}$$

$$y_2^{(1)}\frac{\partial F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)}{\partial y_2^{(0)}} + \gamma_3^{(1)}\frac{\partial F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)}{\partial\gamma_3^{(0)}} + F_p(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r) = \text{const} \tag{3.12}$$

причем левая часть выражения (3.11) будет обязательно зависеть хотя бы от одной из переменных $y_2^{(0)}$ или $\gamma_3^{(0)}$.

4. Для доказательства высказанного в п. 3 утверждения достаточно показать, что существует решение системы (3.3), для которого нельзя найти четвертого алгебраического интеграла. Рассмотрим частное решение, определенное следующими значениями произвольных постоянных в формулах (3.4):

$$h_1 = a^2, \qquad h_2 = \lambda^2, \qquad h_3 = \lambda^2 \qquad (a \text{ не зависит от } \lambda)$$

Подставляя разложения (3.7) и (3.10) в формулы (3.4), которые для рассматриваемого частного решения перепишутся в виде

$$r^2 - cz_2 + \lambda(2y_1y_2 - cz_1 - \alpha\gamma''^2) = a^2, \quad y_1z_2 + z_1y_2 + r\gamma'' = \lambda^2, \quad z_1z_2 + \lambda\gamma''^2 = \lambda^2 \tag{4.1}$$

будем иметь выражения

$$y_1^{(0)} = -\frac{cr\gamma_3^{(0)}}{r^2 - a^2}, \qquad z_1^{(0)} = 0, \qquad cz_2^{(0)} = r^2 - a^2 \tag{4.2}$$

и соотношения для получения величин $y_1^{(1)}$, $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$

$$y_1^{(1)}z_2^{(0)} = -(y_1^{(0)}z_2^{(1)} + y_2^{(0)}z_1^{(1)} + r\gamma_3^{(1)}), \qquad z_1^{(1)}z_2^{(0)} = -(\gamma_3^{(0)2} - z_1^{(0)}z_2^{(1)})$$
$$cz_2^{(1)} = 2y_1^{(0)}y_2^{(0)} - \alpha\gamma_3^{(0)2} - cz_1^{(0)} \tag{4.3}$$

Тогда уравнениям (3.8), представленным при помощи (4.2) в виде

$$\frac{dy_2^{(0)}}{dr} = \frac{r}{r^2 - a^2}y_2^{(0)} - \frac{\alpha}{c}\gamma_3^{(0)}, \qquad \frac{d\gamma_3^{(0)}}{dr} = \frac{r}{r^2 - a^2}\gamma_3^{(0)} \tag{4.4}$$

будут удовлетворять частные решения

$$y_2^{(0)} = -\frac{\alpha}{c}r(r^2 - a^2)^{1/2}, \qquad \gamma_3^{(0)} = (r^2 - a^2)^{1/2} \tag{4.5}$$

Для нахождения величин $y_2^{(1)}$ и $\gamma_3^{(1)}$ подставим соотношения (4.2), (4.3), (4.5) в уравнение (3.9) и, сделав замену переменных по формулам

$$y_1^{(1)} = (r^2 - a^2)^{1/2}Y, \qquad \gamma_3^{(1)} = (r^2 - a^2)^{1/2}\Gamma$$

получим систему (4.6)

$$\frac{dY}{dr} = -\frac{\alpha}{c}\Gamma + \frac{1}{r^2 - a^2}\left[\frac{2\alpha^2a^4}{c(r^2 - a^2)} + \frac{\alpha^2r^2}{c} + \frac{2\alpha^2a^2}{c} + c\right], \qquad \frac{d\Gamma}{dr} = \frac{\alpha r}{r^2 - \alpha^2}\left(1 - \frac{2a^2}{r^2 - a^2}\right)$$

Интегрируя последнее уравнение (4.6), будем иметь

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2}\ln(r^2 - \alpha^2) + \frac{a^2\alpha}{r^2 - a^2} + \text{const}$$

Подставив это выражение в первое уравнение (4.6), получим после интегрирования

$$Y = -\frac{\alpha^2}{2c}r\ln(r^2 - a^2) + S\ln\frac{r - a}{r + a} + \varphi_1(r), \qquad S = \frac{1}{2a}\left(\frac{2\alpha^2a^2}{c} + c\right)$$

Здесь и в последующих формулах $\varphi_i(r)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ обозначает некоторую алгебраическую функцию r. Переходя к прежним переменным, будем иметь

$$y_2^{(1)} = -\frac{\alpha^2}{2c}r(r^2 - a^2)^{1/2}\ln(r^2 - a^2) + S(r^2 - a^2)^{1/2}\ln\frac{r - a}{r + a} + \varphi_2(r)$$
$$\gamma_3^{(1)} = \frac{\alpha}{2}(r^2 - a^2)^{1/2}\ln(r^2 - a^2) + \varphi_3(r) \tag{4.7}$$

Как указывалось выше, если исходная система (3.1) обладает четвертым алгебраическим интегралом, то система (3.9) должна иметь алгебраический интеграл (3.12), который при помощи соотношений (4.5) и (4.7) приводится к виду

$$\left[S\frac{\partial F_0}{\partial y_2^{(0)}}\right]\ln\frac{r - a}{r + a} + \left[-\frac{\alpha^2}{2c}r\frac{\partial F_0}{\partial y_2^{(0)}} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma_3^{(0)}}\right]\ln(r^2 - a^2) = \varphi_4(r) \tag{4.8}$$

Здесь выражения в квадратных скобках в силу соотношения (4.5) и предположений, сделанных относительно функции $F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)$, будут алгебраическими функциями r. Функцию $\ln(r^2 - a^2)$ нельзя представить [3] в виде алгебраической зависимости от r и $\ln[(r - a)/(r + a)]$; следовательно, левая часть выражения (4.8) может быть алгебраической функцией r при условии обращения в нуль выражений в квадратных скобках. Отсюда следует условие

$$\frac{\partial F_0}{\partial y_2^{(0)}} = \frac{\partial F_0}{\partial \gamma_3^{(0)}} = 0 \qquad (S \neq 0) \tag{4.9}$$

которое должно выполняться для всех r, кроме $r=\pm a$. Но по свойству выражения $F_0(y_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)}, r)$ условие (4.9) не имеет места, что и доказывает невозможность существования у системы (3.1) или, что то же самое, у системы (1.1) в рассматриваемом случае общего четвертого алгебраического интеграла.

Как показано в работе [6], задача в этом случае не имеет общего решения, однозначного на всей плоскости t. Следовательно, необходимым и достаточным условием существования четвертого независимого общего алгебраического интеграла системы (1.1) при $A = B$ является условие $x_0' = y_0' = 0$.

Поступила 20 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2.
2. Архангельский Ю. А. Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
3. Husson Ed. Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. Ann. d. l. faculté des sciences de l'univ. de Toulouse, 2 Série, 1906, t. VIII, p. 119—152.
4. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, 1892, t. 1.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 2, ГТТИ, 1933.
6. Архангельский Ю. А. Об однозначных интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКИ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

В. В. Белецкий

(Москва)

Рассмотрим следующее движение тела около закрепленной точки в ньютоновском поле сил. Пусть тело обладает динамической симметрией ($A = B$), закрепленная точка совпадает с центром масс тела и, кроме того, начальные условия таковы: поперечные составляющие угловой скорости равны нулю ($p_0 = q_0 = 0$), а продольная составляющая произвольна ($r_0 \neq 0$). Если бы не было ньютоновского поля сил, то тело в этом случае, как известно, сохраняло бы постоянное направление оси симметрии в пространстве. Поэтому все эффекты в движении оси тела для рассматриваемого примера обуславливаются только наличием ньютоновского поля. Действие ньютоновского поля проступает в этом примере в чистом виде, не будучи осложнено более общими начальными условиями. Именно поэтому исследование указанного движения представляет интерес.

Рассматриваемая задача о движении твердого тела около закрепленной точки интегрируется в квадратурах, как частный случай двух более общих интегрируемых случаев [1-3].

Пусть θ, ψ, φ — углы Эйлера (причем θ — угол между осью симметрии тела и направлением от центра притяжения к неподвижному центру масс тела). Интегралы энергии и кинетического момента имеют тогда вид

$$\sin^2\theta\dot\psi^2 + \dot\theta^2 = \alpha + m\omega^2\cos^2\theta \qquad \left(\omega^2 = \frac{\mu}{R^3}, \quad m = 3\frac{A-C}{A}, \quad b = \frac{C}{A}\right)$$
$$\sin^2\theta\dot\psi = \beta - br_0\cos\theta$$

Здесь r_0 — составляющая угловой скорости по оси симметрии (r_0 остается постоянным в силу уравнений движения); α и β — постоянные интегрирования; C — продольный, A — поперечный момент инерции; μ — гравитационная постоянная; R — расстояние от центра масс тела до центра притяжения.