ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Г. В. Плотникова (Москва)

Исследуется устойчивость периодических решений в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд.

Рассматривается неавтономная квазилинейная система

$$\ddot{x} + m^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \tag{1}$$

Здесь μ — малый положительный параметр; f — непрерывная периодическая функция времени t с периодом 2π, разложение которой в ряд Фурье не содержит гармоник m-го порядка (m — целое число); F — аналитическая функция переменных x, $\dot{x}$, μ и непрерывная периодическая периода 2π функция t. Порождающее решение

$$x_0(t) = A_0 \cos mt + \frac{B_0}{m} \sin mt + \varphi(t)$$

зависит от двух произвольных постоянных A_0 и B_0; функция $\varphi(t)$ описывает вынужденные колебания порождающей системы ($\mu = 0$).

Периодическое периода 2π решение уравнения (1), обращающееся при $\mu = 0$ в решение $x_0(t)$, отыскивается методом Пуанкаре [1-3]. В качестве начальных условий берутся

$$x(0) = x_0(0) + \beta_1, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0(0) + \beta_2$$

Здесь β_1 и β_2 — функции μ, равные нулю при $\mu = 0$.

Амплитуды A_0 и B_0 определяются из уравнений основных амплитуд

$$C_1(2\pi) = -\frac{1}{m}\int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\sin mt\,dt = 0 \quad \dot{C}_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\cos mt\,dt = 0 \tag{2}$$

В случае двукратных корней уравнений (2) имеют место соотношения

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial C_1}{\partial A_0} & \dfrac{\partial C_1}{\partial B_0} \\ \dfrac{\partial \dot{C}_1}{\partial A_0} & \dfrac{\partial \dot{C}_1}{\partial B_0} \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta^* = \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Delta}{\partial A_0} & \dfrac{\partial \Delta}{\partial B_0} \\ \dfrac{\partial \dot{C}_1}{\partial A_0} & \dfrac{\partial \dot{C}_1}{\partial B_0} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

Здесь все производные взяты при $t = 2\pi$. При условиях (3) двукратному корню A_0, B_0 уравнений (2) отвечают два решения уравнения (1), построенные в работе [3]

$$x^{(k)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n/2}^{(k)}(t)\,\mu^{n/2} \qquad (k = 1, 2) \tag{4}$$

где $x_{n/2}^{(k)}(t)$ — периодические функции времени. Запись (4) включает в себя и тот случай, когда решения представляются рядами по целым степеням μ.

Исследуем устойчивость периодических решений (4). Уравнение в вариациях для уравнения (1)

$$\ddot{y} + m^2 y - \mu\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_k \dot{y} - \mu\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_k y = 0 \tag{5}$$

Индекс k у скобок означает, что в производные от функции F вместо x и $\dot{x}$ нужно подставить $x^{(k)}(t)$ и $\dot{x}^{(k)}(t)$.

Как известно (см., например [1], стр. 163), функции

$$y_1^{(k)}(t) = \frac{\partial x^{(k)}(t)}{\partial A_0}, \qquad y_2^{(k)}(t) = \frac{\partial x^{(k)}(t)}{\partial B_0}$$

образуют фундаментальную систему уравнений (5) с начальными условиями

$$y_1^{(k)}(0) = 1, \qquad \dot{y}_1^{(k)}(0) = 0, \qquad y_2^{(k)}(0) = 0, \qquad \dot{y}_2^{(k)}(0) = 1$$

Для того чтобы периодические решения уравнения (1) были асимптотически устойчивы, необходимо и достаточно выполнение двух условий ([1], стр. 67—73)

$$y_1^{(k)}(2\pi)\dot{y}_2^{(k)}(2\pi)-y_2^{(k)}(2\pi)\dot{y}_1^{(k)}(2\pi)-y_1^{(k)}(2\pi)-\dot{y}_2^{(k)}(2\pi)+1>0 \qquad (6)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0)}{\partial \dot{x}_0}\,dt<0 \qquad (7)$$

Согласно (4)

$$y_1^{(k)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial x_{n/2}^{(k)}(t)}{\partial A_0}\mu^{n/2},\qquad y_2^{(k)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial x_{n/2}^{(k)}(t)}{\partial B_0}\mu^{n/2} \qquad (8)$$

Условие (6) можно записать в виде

$$L_2^{(k)}\mu^2+L_{5/2}^{(k)}\mu^{5/2}+L_3^{(k)}\mu^3+L_{7/2}^{(k)}\mu^{7/2}+\cdots>0 \qquad (9)$$

где $L_{n/2}^{(k)}$ выражаются через $\partial x_{n/2}^{(k)}/\partial A_0$, $\partial x_{n/2}^{(k)}/\partial B_0$ и их производные по времени при $t=2\pi$. Подставляя вместо этих величин их значения, согласно работе [3] получим

$$L_2^{(k)}=\Delta,\qquad L_{5/2}^{(k)}=A_{1/2}\frac{\partial\Delta}{\partial A_0}+B_{1/2}\frac{\partial\Delta}{\partial B_0}$$

$$L_3^{(k)}=A_1\frac{\partial\Delta}{\partial A_0}+B_1\frac{\partial\Delta}{\partial B_0}+\frac{1}{2}A_{1/2}^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial A_0^2}+\frac{1}{2}B_{1/2}^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial B_0^2}+A_{1/2}B_{1/2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial A_0\partial B_0}-\left(\frac{\partial\Delta_1}{\partial A_0}+\frac{\partial\Delta_2}{\partial B_0}\right)$$

$$L_{7/2}^{(k)}=A_{3/2}\frac{\partial\Delta}{\partial A_0}+B_{3/2}\frac{\partial\Delta}{\partial B_0}+A_{1/2}A_1\frac{\partial^2\Delta}{\partial A_0^2}+B_{1/2}B_1\frac{\partial^2\Delta}{\partial B_0^2}+(A_{1/2}B_1+B_{1/2}A_1)\frac{\partial^2\Delta}{\partial A_0\partial B_0}+$$
$$+\frac{1}{6}A_{1/2}^3\frac{\partial^3\Delta}{\partial A_0^3}+\frac{1}{2}A_{1/2}^2B_{1/2}\frac{\partial^3\Delta}{\partial A_0^2\partial B_0}+\frac{1}{2}A_{1/2}B_{1/2}^2\frac{\partial^3\Delta}{\partial A_0\partial B_0^2}+\frac{1}{6}B_{1/2}^3\frac{\partial^3\Delta}{\partial B_0^3}-$$
$$-A_{1/2}\left(\frac{\partial^2\Delta_1}{\partial A_0^2}+\frac{\partial^2\Delta_2}{\partial A_0\partial B_0}\right)-B_{1/2}\left(\frac{\partial^2\Delta_1}{\partial A_0\partial B_0}+\frac{\partial^2\Delta_2}{\partial B_0^2}\right)$$

Здесь для простоты опущен индекс k в $A_{n/2}^{(k)}$, $B_{n/2}^{(k)}$; кроме того, обозначено

$$\Delta_1=\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\dot{C}_2(2\pi)-\frac{\partial\dot{C}_1}{\partial B_0}C_2(2\pi),\qquad \Delta_2=\frac{\partial\dot{C}_1}{\partial A_0}C_2(2\pi)-\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\dot{C}_2(2\pi)$$

Формулы для $C_2(2\pi)$, $\dot{C}_2(2\pi)$ приведены в работе [2], стр. 853. Величины $A_{n/2}$, $B_{n/2}$ — коэффициенты в разложениях

$$\beta_1=\sum_{n=1}^{\infty}A_{n/2}^{(k)}\mu^{n/2},\qquad \beta_2=\sum_{n=1}^{\infty}B_{n/2}^{(k)}\mu^{n/2}.$$

Неравенство (9) выполняется при достаточно малом μ, если коэффициент при старшем члене больше нуля. В случае двукратных корней $L_2^{(k)}=0$, поэтому нужно исследовать знак первого отличного от нуля коэффициента. Рассмотрим наиболее интересные случаи [3].

1°. Пусть $\Delta_1\neq 0$. В силу $\Delta=0$ имеем $\Delta_2\neq 0$. Периодические решения (1) строятся в виде рядов по степеням $\mu^{1/2}$ (см., [3], стр. 751); для них

$$A_{1/2}^{(k)}=\pm\sqrt{E},\qquad B_{1/2}^{(k)}=\pm\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\sqrt{E},\qquad E=\frac{2\Delta_1}{\Delta^*}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{\partial\dot{C}_1}{\partial B_0}. \qquad (10)$$

Так как рассматриваются лишь вещественные разложения решений, то $E>0$. В формулах (10) и далее верхний знак относится к решению $k=1$, нижний — к решению $k=2$.

Как выяснено ранее ([3], стр. 750), из выражения для Δ^* следует, что ни одна из величин $\partial C_1/\partial A_0$, $\partial\dot{C}_1/\partial A_0$, $\partial C_1/\partial B_0$, $\partial\dot{C}_1/\partial B_0$ не равна нулю. Согласно этому

$$L_{5/2}^{(k)}=\pm\frac{2\Delta_1}{\sqrt{E}}\neq 0$$

и знак Δ_1 решает вопрос об устойчивости при выполнении (7). Если $\Delta_1 > 0$, то устойчиво решение $k = 1$, решение $k = 2$ — неустойчиво. Наоборот, при $\Delta_1 < 0$ решение $k = 1$ неустойчиво, $k = 2$ — устойчиво.

2°. Пусть $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Предположим также, что действительные корни a_1 и a_2 уравнения

$$s = N_{02}a^2 + N_{11}a + N_{20} = 0 \tag{11}$$

простые, т. е. $a_1 \neq a_2$ и, следовательно

$$2N_{02}a_k + N_{11} \neq 0. \tag{12}$$

В формулах (11) и (12) величины N_{02}, N_{11}, N_{20} вычисляются при помощи формул (2.7) работы [3]. Например

$$N_{02} = -\frac{\Delta^*}{2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-2}\left(\frac{\partial \dot{C}_1}{\partial B_0}\right)^{-1} \neq 0.$$

В этом случае $L_{5/2}^{(k)} = 0$, а периодические решения (4) строятся в виде рядов по целым степеням μ. При этом

$$L_3^{(k)} = -\frac{\partial C_1}{\partial B_0}(2N_{02}a_k + N_{11}) \neq 0$$

в силу условия (12). Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial C_1}{\partial B_0}(2N_{02}a_k + N_{11}) < 0 \tag{13}$$

Из двух периодических решений (4) устойчиво только одно. Действительно, левая часть условия (12) характеризует угловой коэффициент касательной к параболе (11) в точках a_1, a_2 пересечения параболы с осью абсцисс. Если в точке a_1 наклон отрицательный, то в точке a_2 — положительный и наоборот. Поэтому условие (13) выполняется лишь в одной из двух точек a_k.

3°. Пусть корни уравнения (11) кратные и величина $K \neq 0$ (см. [3], стр. 752). Очевидно, $L_3^{(k)} = 0$. Оба периодических решения представляются рядами по степеням $\mu^{1/2}$. При этом

$$L_{7/2}^{(k)} = \mp 2N_{02}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\sqrt{-\frac{K}{N_{02}}}$$

Если $N_{02}\partial C_1/\partial B_0 < 0$, то устойчиво решение $k = 1$, решение $k = 2$ неустойчиво. Наоборот, если $N_{02}\,\partial C_1/\partial B_0 > 0$, то решение $k = 2$ устойчиво, решение $k = 1$ неустойчиво.

В рассмотренных случаях условие (6) или (9) всегда выполняется для одного из двух периодических решений (4). Для других случаев анализ условия (6) аналогичен предыдущему. Кроме условия (6), для устойчивости решений (4) необходимо и достаточно выполнение условия (7), которое можно записать иначе

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial B_0} < 0 \tag{14}$$

Таким образом, если выполнено условие (14), то из двух периодических решений (4) уравнения (1), которые соответствуют двукратному корню уравнений основных амплитуд, одно и только одно устойчиво.

Поступила 23 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.