сделать зеркальное отображение относительно оси x фазового портрета (19) и изменить направление движения по траекториям.

В заключение благодарю Н. Н. Баутина за многочисленные советы.

Поступила 2 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Майер А. Г. К теории связанных колебаний двух самовозбужденных генераторов. Уч. зап. Горьковского ун-та, 1935, вып. 2.
2. Mayer A. A Contribution to the Theory of Forced Oscillations in a Generator with two Degrees of Freedom. Technical Physics of the USSR, vol. 3, No. 12.
3. Бутенин Н. В. Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами. ПММ, 1942, т. 6, вып. 5.
4. Бутенин Н. В. Действие внешней синусоидальной силы на автоколебательную систему с гироскопическими силами. Тр. ЛКВВА, 1945, вып. 7.
5. Бутенин Н. В. К теории вынужденных колебаний в нелинейной механической системе с двумя степенями свободы. ПММ, 1949, т. 13, вып. 4.
6. Lotka J. Undamped Oscillations Derived from the Law of Mass Action. The Journal of the American Chemical Society, 1920, vol. 42, № 8, page 1595—1599.
7. Франк-Каменецкий Д. А. Периодические процессы в кинетике окислительных реакций. ДАН СССР, 1939, т. 25, № 8.
8. Франк-Каменецкий Д. А., Сальников И. Е. О возможности автоколебаний в гомогенной химической системе при квадратичном автокатализе. ЖФХ, 1943, т. 17, вып. 2.
9. Чандасекар С. Введение в учение о строении звезд. ИЛ, 1950.
10. Jones C. W. On reducible non-linear differential equations occurring in mechanics. Proc. Roy. Soc., 1953, vol. 217, No. 1130.
11. Lotka J. Elements of physical Biology Baltimore, 1925.
12. Volterra. Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris, 1932.
13. Kostizin V. A. Symbiose, parasitisme et evolution. Hermann, Paris, 1934.
14. Баутин Н. Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Ю. И. Домшлак (Баку)

В работах [1,2] авторы исследуют вопрос устойчивости решений нелинейного уравнения теплопроводности.

Ниже указывается, как, пользуясь теорией полугрупп операторов, сформулировать аналогичные результаты для нелинейного параболического уравнения высшего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu(t, x) + f(t, x, u) \tag{1}$$

с нулевым граничным условием

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \cdots = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\right|_\Gamma = 0, \qquad u(x, 0) = \varphi(x) \tag{2}$$

рассматриваемого в пространстве $L_p(\Omega)$, т. е.

$$\|u\|^p = \int_\Omega |u(t, x)|^p dx, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

Здесь Lu — равномерно эллиптический оператор $2m$-го порядка, коэффициенты которого (зависящие только от x), так же, как и граница Γ ограниченной области Ω в n-мерном пространстве, удовлетворяют некоторым условиям гладкости.

Пусть оператор L представим в виде суммы положительно определенного самосопряженного (в смысле L_2) и кососимметрического операторов. Тогда, как показал М. З. Соломяк [3], оператор L порождает сильно непрерывную при $t \geqslant 0$ полугруппу $T(t)$ ограниченных операторов в $L_p(\Omega)$, удовлетворяющую неравенству

$$\| T(t) \| \leqslant Ce^{-\mu t}, \qquad \mu > 0 \tag{4}$$

При помощи этой полугруппы решение (обобщенное) задачи (1), (2) может быть получено как решение нелинейного интегрального уравнения

$$u(t, x) = T(t)\varphi(x) + \int_0^t T(t-s) f(s, x, u(s, x))\, ds \tag{5}$$

Теорема. Пусть для $u(x) \in L_p(\Omega)$, $\|u\| \leqslant \gamma$, $t \geqslant 0$ имеет место

$$\| f(t, x, u(x)) \| \leqslant k \|u\| + \psi(t) \|u\|^{1+\alpha} \tag{6}$$

где

$$\alpha > 0, \qquad 0 \leqslant k < \frac{\mu}{C}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha(\mu - Ck)t} \psi(t)\, dt < +\infty$$

Тогда каково бы ни было $0 < \varepsilon \leqslant \gamma$ при

$$\|\varphi\| < \delta = \frac{1}{C}\left[\varepsilon^{-\alpha} + C\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha(\mu - Ck)s} \psi(s)\, ds\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) удовлетворяет неравенству

$$\| u(t, x) \| \leqslant \varepsilon e^{-(\mu - Ck)t}$$

т. е. нулевое решение уравнения (1) экспоненциально асимптотически устойчиво.

Доказательство проводится почти так же, как и в работе [2].

Замечание 1. Сильно эллиптический оператор порождает полугруппу с теми же свойствами, что и равномерно эллиптический оператор [3]; поэтому теорему можно было бы сформулировать и для нелинейной параболической системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -L_i u + f_i(t, x, u_1, \ldots, u_r), \qquad u = (u_1, \ldots, u_r) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

где $L = (L_1, \ldots, L_r)$ — сильно эллиптический оператор.

Замечание 2. Если Lu не положительно определен, а лишь полуограничен снизу, причем не имеет чисто мнимых точек спектра, то можно получить аналогичные оценки для ограниченных решений уравнения (1), экспоненциально растущие оценки снизу для неограниченных решений и доказать асимптотическую устойчивость нулевого решения в классе ограниченных решений, как это сделано в статье [4].

Замечание 3. Наличие константы C в оценке (4) существенно, так как для уравнений высших порядков C может быть больше единицы в отличие от случая $m = 1$, когда $C = 1$, как это показано П. Е. Соболевским [5].

Поступила
15 X 1962

Институт математики
и механики АН АзербССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Костандян Б. А. Об устойчивости решения нелинейного уравнения теплопроводности. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
2. Рахматуллина Л. Ф. К вопросу об устойчивости решения нелинейного уравнения теплопроводности. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
3. Соломяк М. З. Аналитичность полугруппы, порожденной эллиптическим оператором в пространстве Lp. ДАН СССР, 1959, т. 127, № 1.
4. Домшлак Ю. И. К теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с постоянным неограниченным оператором. ДАН АзербССР, 1962, № 5.
5. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве. Тр. Моск. матем. об-ва, 1961, т. X.