

## КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Н. Н. Серебрякова (Горький)

Приводятся результаты качественного исследования системы

$$\frac{dx_1}{dt_1} = x_1 (mx_1 + ny_1 + p), \quad \frac{dy_1}{dt_1} = y_1 (a'x_1 + b'y_1 + c') \quad (0.1)$$

встречающейся в теории колебаний. Различные частные случаи системы (0.1) были исследованы в ряде работ. К системе (0.1) приводят, например, рассуждения по методу Ван-дер-Поля действия внешней силы на систему с двумя степенями свободы, близкую к линейной консервативной [1-5], некоторые вопросы химической кинетики [6-8], астрофизики [9-10], математической биологии [11-13] и т. д.

В работе Джонса [10] неправильные высказывания о поведении сепаратрис циклов у системы (0.1). Доказательство отсутствия предельных циклов у системы (0.1) дано в работе [14].

§ 1. Ни один из коэффициентов  $m$ ,  $n$  и  $p$  не обращается в нуль. При помощи преобразования

$$x_1 = \frac{p}{m} x, \quad y_1 = \frac{p}{n} y, \quad t_1 = \frac{t}{p}$$

система (0.1) может быть приведена к виду

$$\frac{dx}{dt} = x(x + y + 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(ax + by + c) \quad (1.1)$$

Исключая  $t$ , будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(ax + by + c)}{x(x + y + 1)} \quad (1.2)$$

Точки

$$P_1(0,0), \quad P_2\left(0, -\frac{c}{b}\right), \quad P_3(-1,0), \quad P_4\left(\frac{c-b}{b-a}, \frac{a-c}{b-a}\right) \quad \text{при } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$$

— состояния равновесия системы (1.1).

Для исследования характера этих точек найдем корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответствующих характеристических уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = c, \quad \lambda_2 = 1 & \quad \text{для точки } P_1, \\ \lambda_1 = -c, \quad \lambda_2 = (b-c)/b & \quad \text{для точки } P_2, \\ \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = c-a & \quad \text{для точки } P_3 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{ab - bc + c - b \pm \sqrt{(ab - bc + c - b)^2 - 4(b-a)(c-b)(a-c)}}{2(b-a)} \quad \text{для точки } P_4$$

Через точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  проходят интегральные кривые уравнения (1.2); поэтому эти точки могут быть только узлами или седлами.

Если  $(b-a)(c-b)(a-c) < 0$ , то точка  $P_4$  будет состоянием равновесия типа седла. Если же  $(b-a)(c-b)(a-c) > 0$  и  $ab - bc + c - b = 0$ , то в точке  $P_4$  система (1.1) имеет центр [14].

Для выяснения поведения траекторий в бесконечности сделаем отображение фазовой плоскости на сферу Пуанкаре. Выполняя преобразование  $x = 1/z$ ,  $y = \tau/z$ , будем иметь

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-z(\tau + z + 1)}{\tau[(b-1)\tau + (c-1)z + a-1]}$$

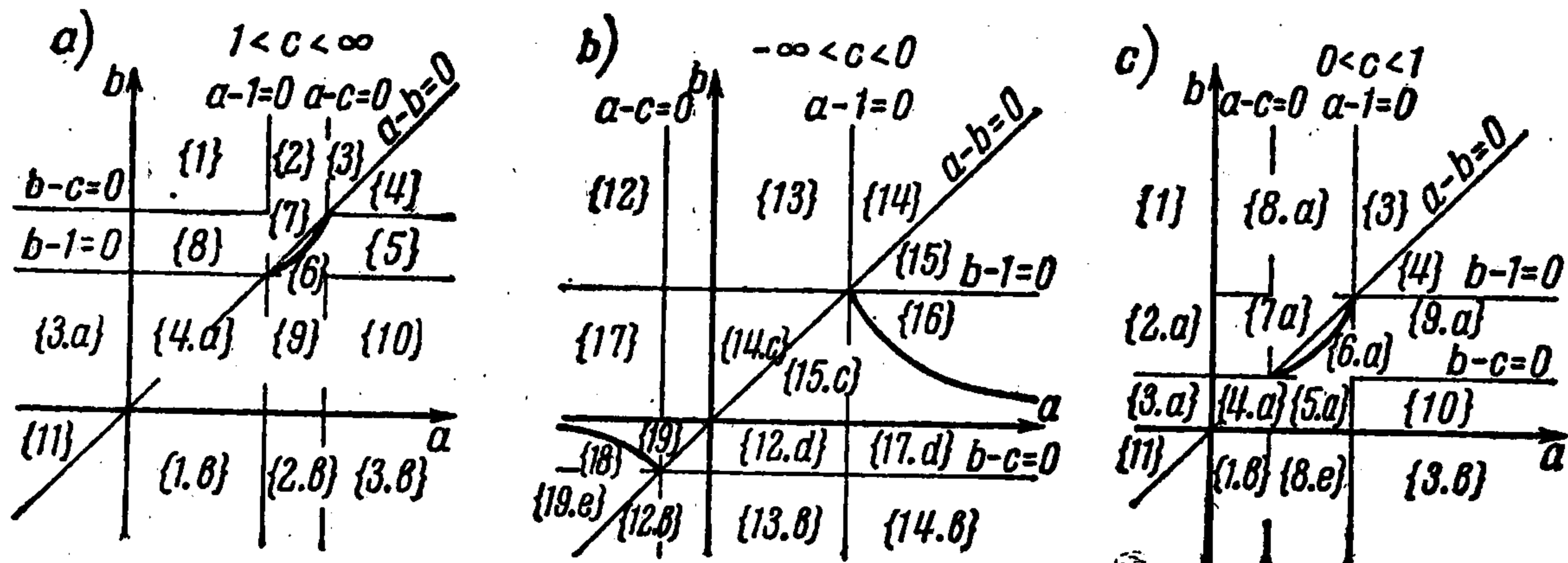
Исследуя это уравнение, найдем на экваторе четыре особые точки  $P_5$ ,  $P_5'$ ,  $P_6$  и  $P_6'$ , расположенные попарно диаметрально противоположно. Точки  $P_5$  и  $P_5'$  совпадают соответственно с положительным и отрицательным «концами» оси  $x$ , а точки

$P_6$  и  $P_6'$  расположены на концах диаметра, угловой коэффициент которого равен  $(a-1)/(1-b)$  (предполагается, что точка  $P_6$  расположена в правой полуплоскости).

Находя корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответствующих характеристических уравнений, будем иметь

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = a-1 \quad \text{для } P_6; \quad \lambda_1 = 1-a, \lambda_2 = (a-b)/(b-1) \quad \text{для } P_6'$$

Выполняя преобразование  $x = \tau/z, y = 1/z$ , легко убедиться, что на экваторе существуют еще две особые точки  $P_7$  и  $P_7'$ , совпадающие соответственно с положительным и отрицательным концами оси  $y$ . Корни характеристического уравнения для точки  $P_7$  будут  $\lambda_1 = -b, \lambda_2 = 1-b$ .



Фиг. 1

Рассмотрим зависимость качественной картины фазовых траекторий системы (1.1) от параметров. Фиксируя параметр  $c$  и нанося на плоскости параметров  $a$  и  $b$  линии  $a-b=0, a-1=0, a-c=0, b-1=0, b-c=0$  и  $ab-bc+c-b=0$  при  $(b-a)(c-b)(a-c) > 0$ , соответствующие бифуркационным значениям параметров  $a$  и  $b$ , получим разбиение плоскости  $a, b$  на области, каждой из которых соответствует определенная качественная картина разбиения на траектории (фиг. 1) нижней полусферы Пуанкаре для системы (1.1). При этом необходимо рассмотреть три случая: 1)  $1 < c < \infty$ , 2)  $-\infty < c < 0$ , 3)  $0 < c < 1$ .

Результаты исследования особых точек  $P_1, \dots, P_7'$  в каждом из этих случаев приведены в табл. 1<sup>1</sup>.

При  $0 < c < 1$  качественные картины фазовых траекторий в областях

- {1}  $(-\infty < a < c, 1 < b < \infty)$ , {3}  $(1 < a < b, 1 < b < \infty)$ , {4}  $(b < a < \infty, 1 < b < \infty)$
- {3a}  $(-\infty < a < b, 0 < b < c)$ , {4a}  $(b < a < c, 0 < b < c)$ , {10}  $(1 < a < \infty, 0 < b < c)$
- {3b}  $(1 < a < \infty, -\infty < b < 0)$ , {1, b}  $(b < a < c, -\infty < b < 0)$ ,
- {11}  $(-\infty < a < b, -\infty < b < 0)$

такие же, как и в соответствующих областях при  $1 < c < \infty$ .

Пусть далее

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad a = b$$

Тогда если  $a = b \neq 1$ , то точка  $P_4$  уходит на экватор, образуя там сложную особую точку типа седло-узел.

Рассмотрим случай, когда  $a = b = 1$ . Точки  $P_1(0, 0), P_2(0, -c), P_3(-1, 0)$  являются состояниями равновесия системы (1.1). Легко видеть, что экватор при этом не является интегральной кривой. В табл. 2 приведены результаты исследования особых точек системы (1.1) при  $a = b = 1$ .

<sup>1</sup> В дальнейшем в таблицах применяются следующие обозначения:  $\alpha_1$  — устойчивый узел,  $\alpha_2$  — неустойчивый узел,  $\beta_1$  — устойчивый фокус,  $\beta_2$  — неустойчивый фокус,  $\gamma$  — седло,  $\gamma\alpha$  — седло-узел,  $\delta$  — сложная особая точка, получившаяся в результате слияния четырех грубых особых точек.

Таблица 1

№	Области	Точки									
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_6'$	$P_7$	$P_7'$	
$1 < c < \infty$											
{1}	$-\infty < a < 1, c < b < \infty$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{2}	$1 < a < c, c < b < \infty$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{3}	$c < a < b, c < b < \infty$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{4}	$b < a < \infty, c < b < \infty$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{5}	$c < a < \infty, 1 < b < c$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{6}	$b < a < c, 1 < b < c$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	* 1, 2, 3	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{7}	$1 < a < b, 1 < b < c$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{8}	$-\infty < a < 1, 1 < b < c$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{9}	$1 < a < c, 0 < b < 1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$
{10}	$c < a < \infty, 0 < b < 1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$
{11}	$-\infty < a < b, -\infty < b < 0$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{1. b}	$b < a < 1, -\infty < b < 0$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{2. b}	$1 < a < c, -\infty < b < 0$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{3. a}	$-\infty < a < b, 0 < b < 1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$
{3. b}	$c < a < \infty, -\infty < b < 0$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{4. a}	$b < a < 1, 0 < b < 1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$
$-\infty < c < 0$											
{12}	$-\infty < a < c, 1 < b < \infty$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{13}	$c < a < 1, 1 < b < \infty$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{14}	$1 < a < b, 1 < b < \infty$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{15}	$b < a < \infty, 1 < b < \infty$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{16}	$1 < a < \infty, 0 < b < 1$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	* 1, 2, 3	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$
{17}	$-\infty < a < c, 0 < b < 1$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$
{18}	$-\infty < a < c, c < b < 0$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	** 1, 2, 3	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{19}	$c < a < b, c < b < 0$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{12. b}	$b < a < c, -\infty < b < c$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{12. d}	$b < a < 1, c < b < 0$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2 (\beta_2)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{13. b}	$c < a < 1, -\infty < b < c$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{14. b}	$1 < a < \infty, -\infty < b < c$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{14. c}	$c < a < b, 0 < b < 1$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$
{15. c}	$b < a < 1, 0 < b < 1$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2 (\beta_2)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$
{17. d}	$1 < a < \infty, c < b < 0$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2 (\beta_2)$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{19. e}	$-\infty < a < b, -\infty < b < c$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
$0 < c < 1$											
{2. a}	$-\infty < a < c, c < b < 1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$
{5. a}	$c < a < 1, 0 < b < c$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$
{6. a}	$b < a < 1, c < b < 1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	* 1, 2, 3	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$
{7. a}	$c < a < b, c < b < 1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$
{8. a}	$c < a < 1, 1 < b < \infty$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{8. e}	$c < a < 1, -\infty < b < 0$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{9. a}	$1 < a < \infty, c < b < 1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_1 (\beta_1)$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$

(1) устойчивый узел (фокус) при  $b - c - ab + bc < 0$  \*  
 (2) центр при  $b - c - ab + bc = 0$  \*\*  
 (3) неустойчивый узел (фокус) при  $b - c - ab + bc > 0$  \*

§ 2. Одновременно обращаются в нуль некоторые коэффициенты первого и второго уравнений<sup>1</sup> системы (0.1) а) Пусть  $p = a' = 0$ . Выполняя преобразование

$$x_1 = \frac{c'}{m} x, \quad y_1 = \frac{c'}{n} y, \quad t_1 = \frac{1}{c'} t \quad (2.1)$$

Таблица 2

$$a = b = 1$$

и исключая параметр  $t$ , получим уравнение

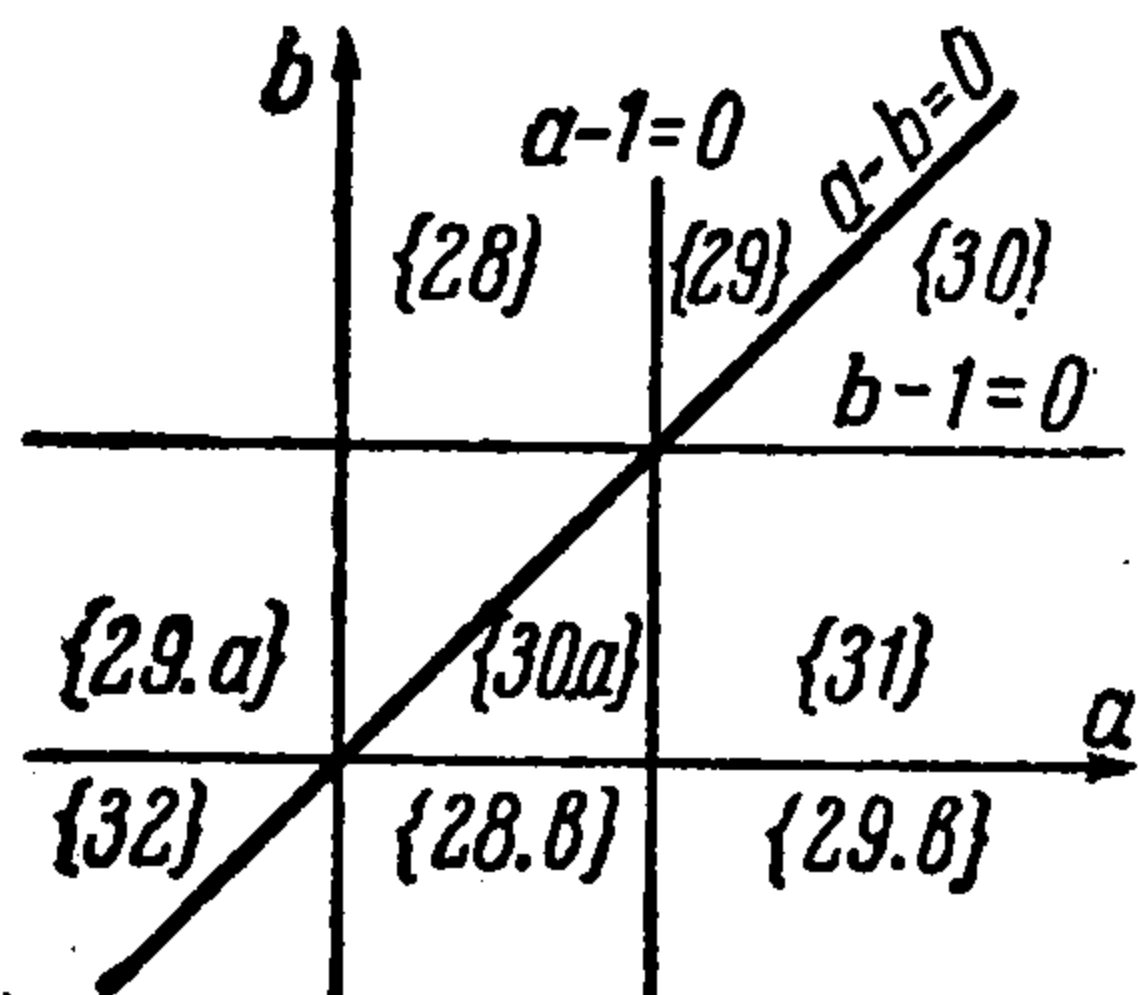
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(by + 1)}{x(x + y)} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) имеет на плоскости  $xy$  три особые точки  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(0, -1/b)$ ,  $P_3(1/b, -1/b)$ . На экваторе существуют

шесть попарно диаметрально противоположных точек:  $P_4$  и  $P_4'$ , совпадающие соответственно с концами положительной и отрицательной оси  $x$ ,  $P_5$  и  $P_5'$ , расположенные на концах диаметра, угловой коэффициент которого равен  $1/(b-1)$ ;  $P_6$  и  $P_6'$ , расположенные соответственно на концах положительной и отрицательной оси  $y$  (точку  $P_5$  предполагаем расположенной в правой полуплоскости). Результаты исследования этих точек приведены в табл. 3.

б) Пусть  $p = b' = 0$ . Выполняя преобразование (2.1) и исключая параметр, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(ax + 1)}{x(x + y)} \quad (2.3)$$



Фиг. 2

На плоскости  $xy$  уравнение (2.3) имеет две особые точки  $P_1(0,0)$  и  $P_2(-1/a, 1/a)$ . На экваторе имеем шесть попарно диаметрально противоположных точек:  $P_3$  и  $P_3'$ , совпадающие соответственно с концами положительной и отрицательной оси  $x$ ;  $P_4$  и  $P_4'$ , расположенные на концах диаметра с угловым коэффициентом, равным

$a-1$ ;  $P_5$  и  $P_5'$ , совпадающие с концами соответственно положительной и отрицательной оси  $y$  (точка  $P_4$  расположена в правой полуплоскости). Результаты исследования этих точек приведены в табл. 4.

Таблица 3

№	Области	Точки									
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_4'$	$P_5$	$P_5'$	$P_6$	$P_6'$	
{22}	$-\infty < b < 0$	$\gamma\alpha$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	
{23}	$0 < b < 1$	$\gamma\alpha$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$	
{24}	$1 < b < \infty$	$\gamma\alpha$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	

Таблица 4

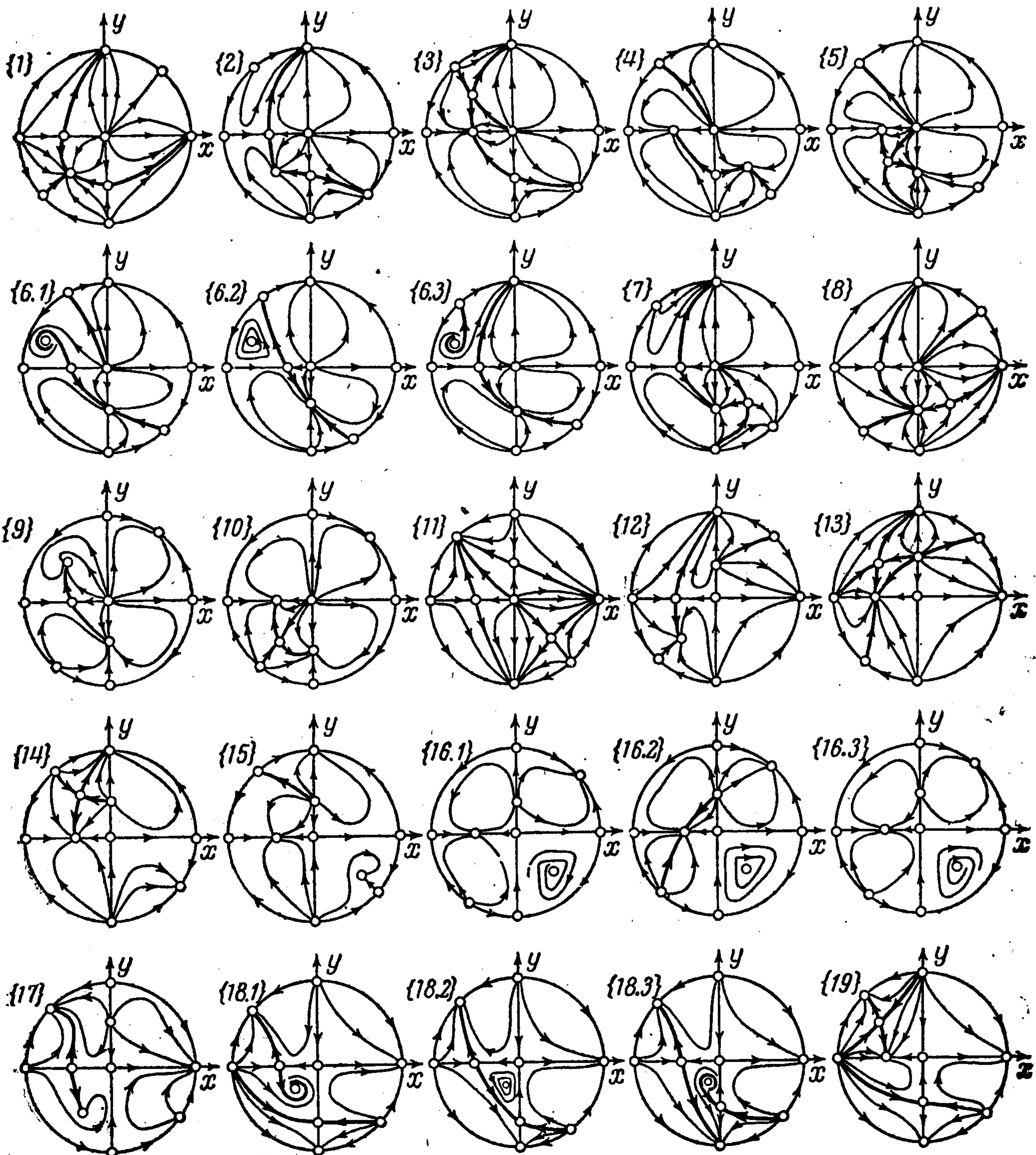
№	Области	Точки									
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_3'$	$P_4$	$P_4'$	$P_5$	$P_5'$		
{25}	$-\infty < a < 0$	$\gamma\alpha$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\alpha_1$		
{26}	$0 < a < 1$	$\gamma\alpha$	$\alpha_1(\beta_1)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$		
{27}	$1 < a < \infty$	$\gamma\alpha$	$\alpha_1(\beta_1)$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\alpha_1$		

<sup>1</sup> Случай, когда обращается в нуль часть коэффициентов  $m, n$  и  $p$ , но не обращается в нуль ни одно из чисел  $a', b'$  и  $c'$ , может быть приведен к рассмотренному при помощи замены переменных.

с) Пусть  $p = c' = 0$ . Полагая в системе (0.1)  $x_1 = x/m$ ,  $y_1 = y/n$  и исключая параметр, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(ax + by)}{x(x + y)} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет в начале координат сложную особую точку. Подобно предыдущему, на экваторе имеем шесть точек:  $P_2$  и  $P_2'$  — концы оси  $x$ ;  $P_3$  и  $P_3'$ , совпадающие с концами диаметра, угловой коэффициент которого равен  $(a - 1) / (1 - b)$ ;  $P_4$  и  $P_4'$  — концы соответственно положительной и отрицательной оси  $y$  (точки  $P_2$  и  $P_3$  расположены в правой полуплоскости). На фиг. 2 изображена плоскость параметров  $a$  и  $b$ . Результаты исследования особых точек в каждой из областей плоскости параметров приведены в табл. 5.



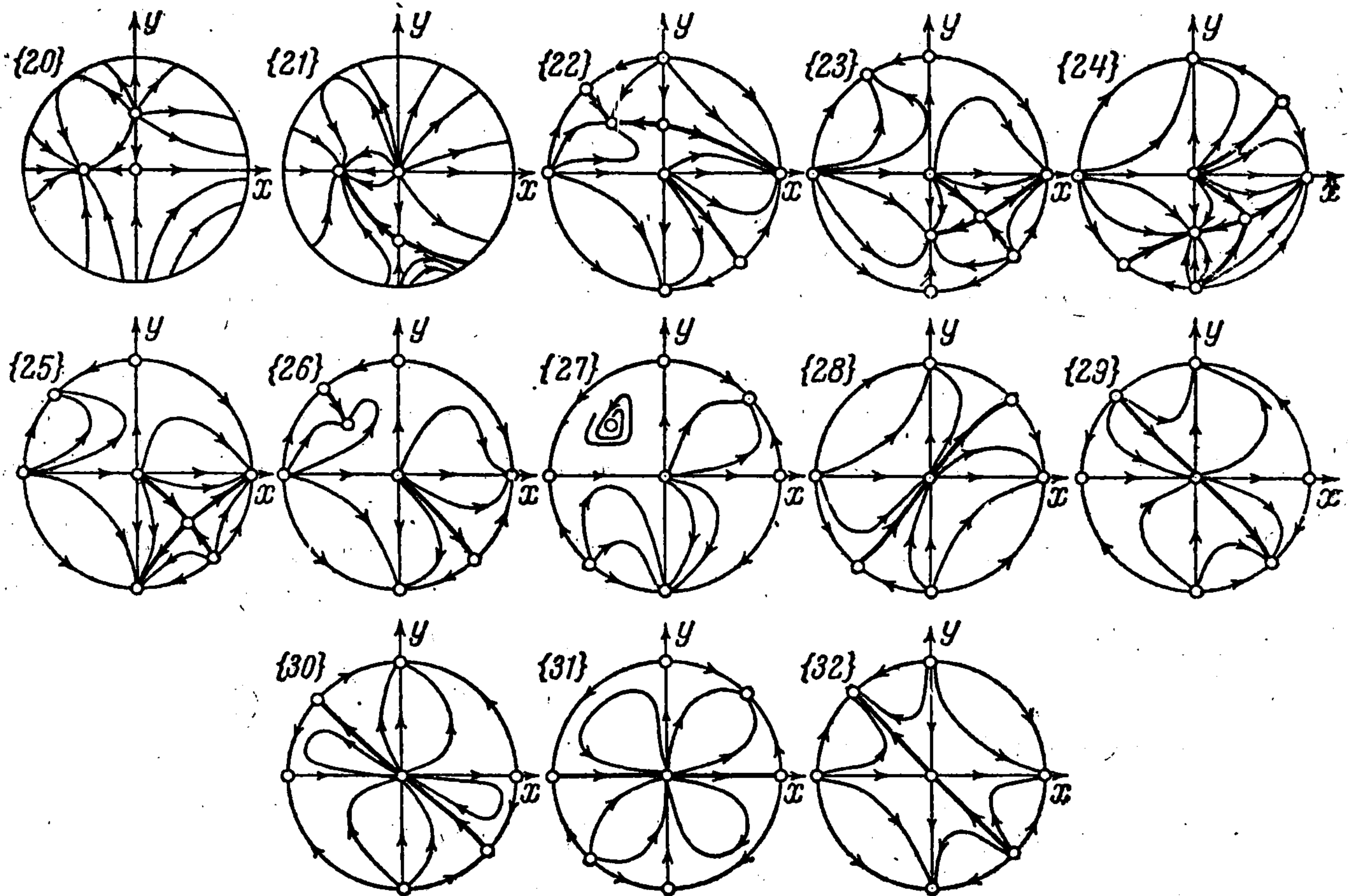
Фиг. 3

§ 3. Результаты исследования. На фиг. 3, 4 приведены качественные картины разбиения на траектории нижней полусферы Пуанкаре для всех рассмотренных случаев. Качественные картины разбиения на траектории для случаев {2.a}, {3.a}, {4.a}, {5.a}, {6.a}, {7.a}, {8.a}, {9.a}, {21.a}, {29.a}, {30.a} могут быть получены в результате поворота на  $90^\circ$  по часовой стрелке и последующего зеркального

Таблица 5

№	Области	Точки						
		$P_1$	$P_2$	$P_2'$	$P_3$	$P_3'$	$P_4$	$P_4'$
{28}	$-\infty < a < 1, 1 < b < \infty$	$\delta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{29}	$1 < a < b, 1 < b < \infty$	$\delta$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{30}	$b < a < \infty, 1 < b < \infty$	$\delta$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
{31}	$1 < a < \infty, 0 < b < 1$	$\delta$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$
{32}	$-\infty < a < b, -\infty < b < 0$	$\delta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{28.b}	$b < a < 1, -\infty < b < 0$	$\delta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{29.a}	$-\infty < a < b, 0 < b < 1$	$\delta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\gamma$	$\gamma$
{29.b}	$1 < a < \infty, -\infty < b < 0$	$\delta$	$\gamma$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_2$	$\alpha_1$
{30.a}	$b < a < 1, 0 < b < 1$	$\delta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$

отображения относительно оси  $x$  фазовых портретов {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {21}, {29}, {30}. Качественные картины для случаев {1.b}, {2.b}, {3.b}, {12.b}, {13.b}, {14.b}, {28.b}, {29.b} получаются в результате зеркального отображения относительно оси  $x$  фазовых портретов {1}, {2}, {3}, {12}, {13}, {14}, {28}, {29}. Качественные картины разбиения на траектории для случаев {14.c} и {15.c} могут быть получены в результате поворота на  $90^\circ$  против часовой стрелки и последующего зеркального отображения относительно оси  $x$  качественных портретов {14} и {15}, если при этом изменить направление движения по траекториям. Аналогично фазовые портреты {12.d} и {17.d} получаются в результате поворота на  $90^\circ$  против часо-



Фиг. 4

вой стрелки фазовых портретов {12} и {17} и изменения направления движения по траекториям. Качественная картина разбиения нижней полусферы на траектории для случая {8.e} может быть получена в результате поворота на  $90^\circ$  по часовой стрелке фазового портрета {8}. Для получения качественного портрета нижней полусферы в случае {19.e), кроме поворота на  $90^\circ$  по часовой стрелке, необходимо

сделать зеркальное отображение относительно оси  $x$  фазового портрета {19} и изменить направление движения по траекториям.

В заключение благодарю Н. Н. Баутина за многочисленные советы.

Поступила 2 VII 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М а й е р А. Г. К теории связанных колебаний двух самовозбужденных генераторов. Уч. зап. Горьковского ун-та, 1935, вып. 2.
2. М а у е р А. A Contribution to the Theory of Forced Oscillations in a Generator with two Degrees of Freedom. Technical Physics of the USSR, vol. 3, No. 12.
3. Б у т е н и н Н. В. Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами. ПММ, 1942, т. 6, вып. 5.
4. Б у т е н и н Н. В. Действие внешней синусоидальной силы на автоколебательную систему с гироскопическими силами. Тр. ЛКВВА, 1945, вып. 7.
5. Б у т е н и н Н. В. К теории вынужденных колебаний в нелинейной механической системе с двумя степенями свободы. ПММ, 1949, т. 13, вып. 4.
6. L o t k a J. Undamped Oscillations Derived from the Law of Mass Action. The Journal of the American Chemical Society, 1920, vol. 42, № 8, page 1595—1599.
7. Ф р а н к - К а м е н е ц к и й Д. А. Периодические процессы в кинетике окислительных реакций. ДАН СССР, 1939, т. 25, № 8.
8. Ф р а н к - К а м е н е ц к и й Д. А., С а л ь н и к о в И. Е. О возможности автоколебаний в гомогенной химической системе при квадратичном автокатализе. ЖФХ, 1943, т. 17, вып. 2.
9. Ч а н д а с е к а р С. Введение в учение о строении звезд. ИЛ, 1950.
10. J o n e s C. W. On reducible non-linear differential equations occurring in mechanics. Proc. Roy. Soc., 1953, vol. 217, No. 1130.
11. L o t k a J. Elements of physical Biology Baltimore, 1925.
12. V o l t e r r a. Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Paris, 1932.
13. K o s t i z i n V. A. Symbiose, parasitisme et evolution. Hermann, Paris, 1934.
14. Б а у т и н Н. Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.

#### ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Ю. И. Домшлак (Баку)

В работах [1,2] авторы исследуют вопрос устойчивости решений нелинейного уравнения теплопроводности.

Ниже указывается, как, пользуясь теорией полугрупп операторов, сформулировать аналогичные результаты для нелинейного параболического уравнения высшего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu(t, x) + f(t, x, u) \quad (1)$$

с нулевым граничным условием

$$u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

рассматриваемого в пространстве  $L_p(\Omega)$ , т. е.

$$\|u\|^p = \int_{\Omega} |u(t, x)|^p dx, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

Здесь  $Lu$  — равномерно эллиптический оператор  $2m$ -го порядка, коэффициенты которого (зависящие только от  $x$ ), так же, как и граница  $\Gamma$  ограниченной области  $\Omega$  в  $n$ -мерном пространстве, удовлетворяют некоторым условиям гладкости.

Пусть оператор  $L$  представим в виде суммы положительно определенного самосопряженного (в смысле  $L_2$ ) и кососимметрического операторов. Тогда, как