Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

ЗАДАЧА МИНИМУМА В ВОПРОСЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Г. К. Пожарицкий, В. В. Румянцев

(Москва)

В развитие идей Ляпунова [1] об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости в работе [2] доказано, что при определенных условиях вопрос об устойчивости установившегося движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, приводится к исследованию условий минимума выражения

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S} + V$$

где V — потенциальная энергия, S — момент инерции системы относительно некоторой неподвижной оси, k_0 — постоянная.

Для случая равновесия, когда $k_0 = 0$, вопрос об устойчивости сводится к задаче минимума потенциальной энергии системы [3]. Эта задача решена в работе [4]; предложенный в ней способ решения задачи о минимуме V пригоден, с некоторыми изменениями, и для решения задачи о минимуме W.

Ниже дается решение задачи о минимуме W для твердого тела с односвязной полостью, частично заполненной жидкостью, в поле внешних сил. Рассмотрены два примера.

1. Вообразим абсолютно твердое тело, имеющее односвязную полость, частично заполненную однородной несжимаемой жидкостью. Допустим, что на тело наложены стационарные связи, допускающие его вращение вокруг некоторой неподвижной прямой, которую примем за ось ζ неподвижной прямоугольной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$. Пусть положение твердого тела относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$ определяется лагранжевыми координатами $q_1, \ldots, q_n\,(n \leqslant 6)$. Предположим, что координата q_n определяет угол поворота тела вокруг оси ζ и является циклической в том смысле, что потенциальная и кинетическая энергии системы не зависят от q_n; потенциальная энергия элемента жидкости $d\tau$ имеет вид $-\rho U_2(\xi, \eta, \zeta)\,d\tau$, где ρ — плотность.

Допустим, что в установившемся движении твердого тела с жидкостью координаты $q_i = 0\,(i = 1, \ldots, n-1)$. Будем рассматривать в окрестности этого установившегося движения область переменных q_i

$$|q_i| \leqslant H \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{1.1}$$

где $H > 0$ — достаточно малая постоянная величина. Пусть q_i суть значения координат некоторой фиксированной точки, принадлежащей области (1.1). Выясним, какова должна быть форма свободной поверхности жидкости, чтобы при данных q_i выражение W имело экстремум.

Для решения этого вопроса найдем первую вариацию W при фиксированных q_i и приравняем ее нулю

$$\delta W = -\rho \int\limits_{\tau} \left[\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S^2}\delta(\xi^2+\eta^2)+\delta U_2(\xi,\eta,\zeta)\right] d\tau = 0$$

Здесь τ обозначает объем жидкости, $U_2(\xi, \eta, \zeta)$ — силовую функцию массовых сил, действующих на жидкость, S — момент инерции системы относительно оси ζ при данных q_i и искомой форме свободной поверхности жидкости. Варьирование под знаком интеграла дает

$$\int\limits_{\tau} \left[\frac{k_0^2}{S^2}(\xi\delta\xi+\eta\delta\eta)+\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\delta\xi+\frac{\partial U_2}{\partial \eta}\delta\eta+\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\delta\zeta\right] d\tau = 0 \qquad (1.2)$$

Вариации координат частиц жидкости связаны внутри области τ уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \delta\xi}{\partial \xi}+\frac{\partial \delta\eta}{\partial \eta}+\frac{\partial \delta\zeta}{\partial \zeta}=0 \qquad (1.3)$$

а на смачиваемых стенках σ_1 полости — условием непроницаемости

$$l\delta\xi+m\delta\eta+n\delta\zeta=0 \qquad (1.4)$$

где l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к σ_1. Умножая уравнение (1.3) на неопределенный множитель Лагранжа $\lambda(\xi, \eta, \zeta)$, интегрируя по всему объему τ жидкости и складывая с уравнением (1.2), получаем

$$\int\limits_{\tau} \left[\frac{k_0^2}{S^2}(\xi\delta\xi+\eta\delta\eta)+\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\delta\xi+\frac{\partial U_2}{\partial \eta}\delta\eta+\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\delta\zeta+\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\frac{\partial \delta\xi}{\partial \xi}+\frac{\partial \delta\eta}{\partial \eta}+\frac{\partial \delta\zeta}{\partial \zeta}\right)\right] d\tau = 0$$

Так как

$$\int\limits_{\tau} \lambda\frac{\partial \delta\xi}{\partial \xi}d\tau = \int\limits_{\sigma}\lambda l\delta\xi\, d\sigma - \int\limits_{\tau}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\delta\xi\, d\tau$$

то выше написанное уравнение принимает вид

$$\int\limits_{\tau}\left\{\left(\frac{k_0^2}{S^2}\xi+\frac{\partial U_2}{\partial \xi}-\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)\delta\xi+\left(\frac{k_0^2}{S^2}\eta+\frac{\partial U_2}{\partial \eta}-\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)\delta\eta+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}-\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}\right)\delta\zeta\right\}d\tau+\int\limits_{\sigma}\lambda(l\delta\xi+m\delta\eta+n\delta\zeta)\,d\sigma = 0 \qquad (1.5)$$

где σ обозначает границу области τ, состоящую из смачиваемых стенок полости σ_1 и свободной поверхности жидкости σ_c.

Известно [5], что неопределенный множитель $\lambda(\xi, \eta, \zeta)$ можно интерпретировать здесь как гидродинамическое давление $p(\xi, \eta, \zeta)$. Так как на свободной поверхности жидкости давление остается постоянным, равным давлению в воздушном пузыре p_0, а на поверхности σ_1 выполняется условие (1.4), то

$$\int\limits_{\sigma}\lambda(l\delta\xi+m\delta\eta+n\delta\zeta)\,d\sigma = p_0\int\limits_{\sigma_c}(l\delta\xi+m\delta\eta+n\delta\zeta)\,d\sigma$$

В силу несжимаемости жидкости последний интеграл равен нулю. Тогда равенство (1.5) возможно тогда и только тогда, когда выполняются уравнения

$$\frac{k_0^2}{S^2}\xi+\frac{\partial U_2}{\partial \xi}=\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}, \qquad \frac{k_0^2}{S^2}\eta+\frac{\partial U_2}{\partial \eta}=\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}=\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \tag{1.6}$$

Отсюда находим уравнение свободной поверхности σ_c жидкости

$$F(\xi,\eta,\zeta)=\frac{k_0^2}{2S^2}(\xi^2+\eta^2)+U_2(\xi,\ \eta,\ \zeta)=c \tag{1.7}$$

дающее экстремум выражения W при фиксированных q_i. Постоянная c определяется количеством жидкости в данной полости тела.

Для установившегося движения, когда $q_i=0$ $(i=1,\ldots,n-1)$, уравнение (1.7) переходит в уравнение свободной поверхности жидкости в этом движении [2]

$$F_0(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\frac{1}{2}\omega^2(\xi^2+\eta^2)+U_2(\xi,\ \eta,\ \zeta)=c_0 \tag{1.8}$$

Здесь ω — величина угловой скорости равномерного вращения всей системы как одного твердого тела, причем $k_0=S_0\omega$, где S_0 — момент инерции системы в установившемся движении.

Так как жидкость не оказывает сопротивления растяжению, то силы, действующие на ее частицы, расположенные на свободной поверхности, направлены внутрь жидкости, поэтому в установившемся движении жидкость должна быть расположена с той стороны поверхности (1.8), где функция $F_0(\xi,\eta,\zeta)>c_0$. Односвязную область, занятую жидкостью в этом движении, обозначим через D_0; для всех ее точек $F_0\geqslant c_0$.

Из возможных положений жидкости при $q_i\neq 0$ выберем только такие, где всюду внутри жидкости $F(\xi,\eta,\zeta)>c$. Эту область, ограниченную поверхностью (1.7) и стенками σ_1 полости, обозначим через D.

Выясним теперь характер экстремума выражения W при фиксированных значениях q_i из области (1.1), когда жидкость заполняет область D. При этом будем предполагать, что величина c_0 не является экстремальной из всех значений, принимаемых функцией F_0 в окрестности поверхности $F_0=c_0$. Геометрическое место точек пересечения поверхности (1.8) со стенками σ_1 полости представляет собой некоторую замкнутую кривую M, являющуюся границей свободной поверхности жидкости (1.8).

Вообразим единичные векторы нормали $n_1(m)$ к поверхности (1.8) в точке m кривой M, направленный в сторону $F_0<c_0$, и нормали $n_2(m)$ к поверхности стенки полости, направленный внутрь полости. Будем предполагать, что угол $\theta(m)$, образуемый этими векторами, при обходе точкой m кривой M изменяется непрерывно между постоянными пределами $0<\theta_1\leqslant\theta(m)\leqslant\theta_2<\pi$.

Рассмотрим также двупараметрическое семейство поверхностей

$$F=\frac{k_0^2}{2(S_0+\Delta S)^2}(\xi^2+\eta^2)+U_2(\xi,\eta,\zeta)=c_0+\Delta c \tag{1.9}$$

непрерывно зависящих от ΔS и Δc, предполагаемых достаточно малыми по абсолютным величинам. Предположим, что единичный вектор нормали n_1 к поверхностям (1.9) непрерывно зависит от $\xi, \eta, \zeta, \Delta S$, Δc в достаточно малой окрестности кривой M и что вектор n_2 непрерывно зависит от точек поверхности стенки полости в той же окрестности.

При сделанных предположениях нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения [4].

При любых q_i, Δc, ΔS, численно достаточно малых, существует односвязная область D', ограниченная поверхностью стенок полости, отклоненной в положение q_i, и поверхностью (1.9); эта область не содержит точек $F < c_0 + \Delta c$ и непрерывно переходит в область D_0 при

$$q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_{n-1}^2 + (\Delta c)^2 + (\Delta S)^2 \to 0$$

На основании сказанного очевидно, что постоянную H, определяющую область (1.1), при сделанных предположениях всегда можно выбрать столь малой, чтобы для любых q_i из области (1.1) поверхность (1.7) принадлежала семейству (1.9); при этом ΔS и Δc, определяемые из условия сохранения объема жидкости, будут непрерывными функциями координат q_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, уничтожающимися при $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$, а удаление l поверхности (1.7) от поверхности (1.8) внутри полости тела не будет превышать H.

При некоторых фиксированных q_i из области (1.1) рассмотрим область D, ограниченную стенками полости в отклоненном положении и поверхностью (1.7), где постоянная $c = c_0 + \Delta c$ определена. Пусть $\gamma < c_0 + \Delta c$ есть некоторая постоянная такая, что область $D'(\gamma)$, ограниченная поверхностью стенок полости и поверхностью $F = \gamma$ и непрерывно переходящая в область D при $\gamma \to c_0 + \Delta c$, не содержит точек $F < \gamma$. Рассмотрим какое-либо возможное положение жидкости, целиком заполняющей область $D'' \subset D'(\gamma)$, и найдем изменение выражения W при фиксированных q_i при переходе жидкости из области D в область D''. Будем иметь

$$W'' - W = -\rho \int\limits_{D''} F d\tau + \rho \int\limits_{D} F d\tau + \frac{k_0^2}{2S_0^3}(\Delta S)^2$$

Эта разность положительна, если область D'' отличается от области D. Действительно, разность первых двух членов представляет изменение потенциальной энергии жидкости в силовом поле

$$F = \frac{k_0^2}{2S^2}(\xi^2 + \eta^2) + U_2$$

при переносе некоторой части жидкости из области $F \geqslant c_0 + \Delta c$ в область, где $F < c_0 + \Delta c$; при этом потенциальная энергия жидкости, очевидно, возрастает. Третье слагаемое положительно. Итак, расположение жидкости в области D реализует минимум измененной потенциальной энергии жидкости по отношению ко всем возможным ее положениям в области $D'(\gamma)$. Следовательно, справедлива следующая лемма.

Лемма. При фиксированных значениях q_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ выражение W имеет минимум, если свободная поверхность жидкости определяется уравнением (1.7).

Как следствие из этой леммы отметим, что для случая равновесия твердого тела с жидкостью, когда $k_0 = 0$, выражение $W = V$ при фиксированных q_i имеет минимум [4], если свободная поверхность жидкости представляется уравнением

$$U_2(\xi, \eta, \zeta) = \text{const}$$

При любой данной совокупности значений q_i из области (1.1) твердому телу с жидкостью в его полости можно поставить в соответствие некоторое твердое тело, которое будем называть преобразованным, состоящее из данного твердого тела и затвердевшей жидкости со свободной поверхностью (1.7).

Тогда, согласно лемме, выражение W для преобразованного тела имеет минимум по сравнению со всеми возможными для жидкости достаточно близкими к (1.7) свободными поверхностями.

Теорема. Для того чтобы выражение W в установившемся движении твердого тела с жидкостью в его полости имело минимум, необходимо и достаточно наличие минимума W при $q_i = 0$ для преобразованных твердых тел в области (1.1).

Доказательство. Пусть выражение W для всевозможных преобразованных твердых тел в области (1.1) имеет минимум W_0 при $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$; тогда $W - W_0 > 0$. Для твердого тела с жидкостью разность $W - W_0$ будет, согласно лемме, тем более положительной, чем доказывается достаточность. Докажем необходимость. Допустим, что выражение W для твердого тела с жидкостью имеет минимум при $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Это означает [2], что при всевозможных системах значений координат q_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, удаления l и уклонения Δ таких, что $|q_i| \leqslant H$, $l \leqslant H$, $\Delta \geqslant \varepsilon l$, все значения, принимаемые разностью $W - W_0$, будут оставаться положительными, обращаясь в нуль только при $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $l = 0$, $\Delta = 0$. Следовательно, эта разность будет положительна и при значениях удаления $l < H$, характеризующих переход от формы жидкости в невозмущенном движении к формам, определяемым уравнением (1.7) при любых q_i из области (1.1). А это и означает, что выражение W имеет минимум W_0 для преобразованных тел при $q_i = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, задача о минимуме выражения W приводится к задаче о минимуме функции конечного числа переменных, каковой является выражение W для твердого тела с жидкостью, ограниченной стенками σ_1 полости и свободной поверхностью (1.7).

2. Найдем изменение величины W для преобразованного твердого тела при переходе от положения, отвечающего установившемуся движению системы при $q_i = 0$, к возмущенному положению в области (1.1). Этот переход можно мыслить осуществленным в два этапа: 1) смещением в возмущенное положение всей системы как одного твердого тела, 2) дефор-

мированием формы жидкости путем наложения на ее свободную поверхность слоя τ_1, объем которого равен нулю, в форму со свободной поверхностью (1.7).

При этом приращение величины W представится в виде [1]

$$\Delta W = \Delta_1 W + \Delta_2 W \tag{2.1}$$

Здесь Δ_1 — приращение при смещении в возмущенное положение всей системы как твердого тела, а Δ_2 — приращение при последующей деформации свободной поверхности жидкости в поверхность (1.7). Аналогично

$$\Delta S = \Delta_1 S + \Delta_2 S$$

С точностью до малых второго порядка относительно q_i будем иметь

$$\Delta_1 W = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \ldots$$

$$\Delta_2 W = -\rho \int_{\tau_1} \left[\frac{1}{2} \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) + U_2 (\xi, \eta, \zeta) \right] d\tau + \frac{\omega^2}{2S_0} [(\Delta_2 S)^2 + 2\Delta_1 S \Delta_2 S] + \ldots \tag{2.2}$$

где индекс 0 означает, что соответствующая величина вычисляется для невозмущенного положения системы.

Для вычисления $\Delta_2 W$ удобно ввести в рассмотрение подвижную систему осей координат xyz, жестко связанную с твердым телом, ось z которой в невозмущенном положении системы пусть совпадает с осью ζ.

Подинтегральную функцию в выражении для $\Delta_2 W$, преобразованную к переменным x, y, z, обозначим через $\Phi(x, y, z, q_i)$. Уравнение свободной поверхности (1.8) затвердевшей жидкости в переменных x, y, z имеет вид

$$\Phi(x, y, z, 0) = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + U_2 (x, y, z) = c_0 \tag{2.3}$$

Предположим, что уравнение (2.3) возможно однозначно разрешить относительно одной из переменных x, y, z, для определенности пусть относительно переменной z; для этого достаточно, чтобы ни в одной точке поверхности (2.3) непрерывная производная $(\partial \Phi / \partial z)_0$ не уничтожалась. Это требование несущественно и вводится лишь для упрощения формул. Обозначим через Q область плоскости xy, ограниченную проекцией на эту плоскость замкнутой кривой M, представляющей собой геометрическое место точек пересечения поверхности (2.3) со стенками σ_1 полости. Поверхность (1.7) в подвижных осях примет вид

$$\Phi_1 (x, y, z, q_i) = c \tag{2.4}$$

где постоянная $c = c_0 + \Delta c$ определяется из условия равенства объемов жидкости в полости тела со свободными поверхностями (2.3) и (2.4). Последнее условие эквивалентно тому, что объем деформирующего слоя τ_1 должен быть равен нулю

$$\int_{\tau_1} d\tau = 0$$

В первом приближении это уравнение равносильно следующему

$$\iint_Q dx\,dy \int_{z_0}^{z_1} dz = 0$$

где z_0 и z_1 обозначают соответственно значения переменной z для точек поверхностей (2.3) и (2.4). Заменяя переменную z новой переменной [4] $\mu = \Phi(x, y, z, q_i) - c_0$, последнее уравнение с той же точностью представим в виде

$$\iint_Q \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 (\mu_1 - \mu_0)\,dx\,dy = 0 \tag{2.5}$$

где с точностью до малых первого порядка

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \Phi(x, y, z_0, q_i) - c_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \cdots \\ \mu_1 &= \Phi(x, y, z_1, q_i) - c_0 = \Delta c + \frac{\omega^2}{S_0}(x^2 + y^2)\,\Delta S + \cdots\end{aligned} \tag{2.6}$$

так как в первом приближении функции $\Phi(x, y, z, q_i)$ и $\Phi_1(x, y, z, q_i)$ отличаются лишь на слагаемое $(\omega^2 / S_0)(x^2 + y^2)\,\Delta S$.

Подставляя значения μ_0 и μ_1 в (2.5), получаем линейное уравнение, связывающее Δc с $\Delta_2 S$. Второе подобное уравнение получается вычислением в первом приближении величины

$$\Delta_2 S = \rho \int_{\tau_1} (\xi^2 + \eta^2)\,d\tau = \rho \iint_Q \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 (x^2 + y^2)(\mu_1 - \mu_0)\,dx\,dy \tag{2.7}$$

Уравнения (2.5) и (2.7) при учете (2.6) принимают вид

$$\iint \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 \left[\Delta c + \frac{\omega^2}{S_0}(x^2 + y^2)\,\Delta S - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right)_0 q_i\right] dx\,dy = 0$$

$$\rho \iint \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 (x^2 + y^2)\left[\Delta c + \frac{\omega^2}{S_0}(x^2 + y^2)\,\Delta S - \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right)_0 q_i\right] dx\,dy = \Delta_2 S$$

и позволяют, как нетрудно видеть, однозначно определить Δc и $\Delta_2 S$ как линейные функции q_i. Отметим, что если

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_0 = 0, \quad \iint_Q \mu_0 \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 dx\,dy = \iint_Q \mu_0 \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 (x^2 + y^2)\,dx\,dy = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{2.8}$$

то $\Delta c = 0$, $\Delta_2 S = 0$ в первом приближении.

Интеграл в выражении для $\Delta_2 W$ обозначим через J. Будем иметь

$$J = \rho \int_{\tau_1} \Phi(x, y, z, q_i)\,d\tau = \frac{1}{2} \rho \iint_Q \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 (\mu_1^2 - \mu_0^2)\,dx\,dy \tag{2.9}$$

Таким образом, получаем

$$\Delta_2 W = -\frac{1}{2} \rho \iint_Q \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)_0 (\mu_1^2 - \mu_0^2)\,dx\,dy + \frac{\omega^2}{2S_0}[(\Delta_2 S)^2 + 2\Delta_1 S\,\Delta_2 S] + \cdots \tag{2.10}$$

По формуле (2.1) величина ΔW представляется в виде квадратичной формы переменных $q_1, \ldots, q_{n-1}$. Условия определенной положительности последней будут условиями минимума W для твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, в поле сил с потенциальной энергией V.

3. *Пример. Устойчивость вращения тяжелого твердого тела, имеющего полость с тяжелой жидкостью* [2]. Рассмотрим в однородном поле сил тяжести твердое тело с одной неподвижной точкой, имеющее полость, частично заполненную жидкостью. Ось ζ неподвижной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в неподвижной точке O тела направим вертикально вверх, а подвижные оси x, y, z совместим с главными осями инерции тела для точки O.

Косинусы углов, образуемых осью ζ с подвижными осями x, y, z, обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, причем, очевидно, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Пусть невозмущенное движение представляет собой равномерное вращение всей системы как одного твердого тела вокруг оси z, совмещенной с осью ζ, с угловой скоростью ω, и при этом ось z является главной центральной осью инерции системы. Уравнение свободной поверхности жидкости (2.3) имеет вид

$$\Phi(x, y, z, 0) = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - gz = c \tag{3.1}$$

где g — ускорение силы тяжести. В невозмущенном движении $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$. В возмущенном положении системы ее потенциальная энергия и момент инерции относительно оси ζ равны соответственно

$$V = Mg(X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3) \tag{3.2}$$

$$S = A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - 2D\gamma_3\gamma_2 - 2E\gamma_3\gamma_1 - 2F\gamma_1\gamma_2$$

Здесь M — масса, X, Y, Z — координаты центра тяжести, A, B, C, D, E, F — моменты инерции и произведения инерции системы.

Функция $\Phi(x, y, z, q_i)$ в данном случае имеет вид

$$\Phi(x, y, z, \gamma_i) = \frac{1}{2}\omega^2[x^2 + y^2 - x^2\gamma_1^2 - y^2\gamma_2^2 + z^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2xy\gamma_1\gamma_2 -$$
$$- 2z(x\gamma_1 + y\gamma_2)\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}] - g(x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}) \tag{3.3}$$

Предположим, что область Q представляет собой кольцо, ограниченное окружностями с радиусами R_1 и R_2 $(R_1 > R_2)$. При этом, как легко видеть, имеют место равенства (2.8) и $\Delta c = 0$, $\Delta_2 S = 0$. Тогда

$$J = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)a, \qquad a = \pi\rho g\int_{R_2}^{R_1}\left[\frac{\omega^2}{g^2}\left(\frac{\omega^2}{2}r^2 - c\right) + 1\right]^2 r^3\,dr$$

Таким образом, по формуле (2.1) находим

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{[(C_0 - A_0)\omega^2 - MgZ_0 - a]\gamma_1^2 +$$
$$+ [(C_0 - B_0)\omega^2 - MgZ_0 - a]\gamma_2^2\} + \cdots \tag{3.4}$$

Условия минимума W в этом случае сводятся к одному неравенству

$$(C_0 - A_0)\omega^2 - MgZ_0 - a > 0 \tag{3.5}$$

если принять без уменьшения общности, что $A_0 \geqslant B_0$.

Если жидкость невесома, то ее свободная поверхность есть поверхность кругового цилиндра

$$r^2 = x^2 + y^2 = b^2 \tag{3.6}$$

Вместо (3.3) будем иметь в этом случае

$$\Phi(r, \theta, z, \gamma_i) = \frac{1}{2}\omega^2 [r^2 - r^2(\cos^2\theta\gamma_1^2 + \sin^2\theta\gamma_2^2) + \tag{3.7}$$

$$+ z^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\gamma_1\gamma_2 - 2rz(\cos\theta\gamma_1 + \sin\theta\gamma_2)\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}]$$

причем

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_0 = \omega^2 b, \quad \mu_0 = -\omega^2 bz(\cos\theta\gamma_1 + \sin\theta\gamma_2) \tag{3.8}$$

Предположим, что цилиндр (3.6) пересекается с поверхностью σ_1 полости по окружностям с центрами на оси z в точках с координатами $z = h + d$ и $z = h - d$. Условие сохранения объема жидкости в первом приближении примет вид

$$\int_{\tau_1} d\tau = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{h-d}^{h+d} dz \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left(r\frac{\partial r}{\partial\Phi}\right)_0 d\mu = \frac{1}{\omega^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{h-d}^{h+d} \Big[\Delta c + \frac{\omega^2}{S_0} b^2\Delta_2 S +$$

$$+ \omega^2 bz(\cos\theta\gamma_1 + \sin\theta\gamma_2)\Big] dz = \frac{4\pi d}{\omega^2}\left(\Delta c + \frac{\omega^2}{S_0} b^2 \Delta_2 S\right) = 0$$

Далее в первом приближении найдем

$$\Delta_2 S = \rho \int_{\tau_1} r^2 d\tau = \frac{4\pi d}{\omega^2} b^2 \rho \left(\Delta c + \frac{\omega^2}{S_0} b^2 \Delta_2 S\right)$$

Из двух последних уравнений следует, что в первом приближении

$$\Delta_2 S = 0, \quad \Delta c = 0$$

Наконец, находим

$$J = \omega^2 \pi b^2 \rho d \frac{3h^2 + d^2}{3}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

Условие минимума W в этом случае сводится к одному неравенству [2]

$$\left(C_0 - A_0 - 2\pi\rho b^2 d \frac{3h^2 + d^2}{3}\right)\omega^2 - MgZ_0 > 0 \quad \text{при} \quad A_0 \geqslant B_0 \tag{3.9}$$

4. *Пример. Устойчивость стационарного вращения карусельного гидроканала.* (Все обозначения примера вводятся независимо от предыдущего). Вообразим тяжелое твердое тело, могущее вращаться вокруг вертикальной оси Oz, с полостью, имеющей форму прямого кругового цилиндра с радиусом R и высотой H. Пусть полость частично заполнена тяжелой, несжимаемой жидкостью плотности ρ с объемом $V = \varepsilon\pi R^2 H$. Пусть в некоторой точке A твердого тела приложена упругая сила F, проходящая через ось z в точке P перпендикулярно к ней и пропорциональная расстоянию точки A до оси z. Предположим также, что на тело наложены идеальные связи, оставляющие горизонтальными основания цилиндра (полости) и оставляющие постоянным расстояние $OA = l$. Пусть B есть центр тяжести тела с полостью, целиком заполненной жидкостью, m — масса этой воображаемой системы, а d^2 — ее центральный радиус инерции вокруг оси, параллельной оси z. Проектируя A и B на плоскость, содержащую неподвижные оси x и y, получим точки a и b. Пусть ψ — угол между осью x и направлением ba, φ — угол между ba и Ob и пусть $Ob = r'$. Тогда, так как величина ba постоянна и равна e, получим

$$(Oa)^2 = r'^2 + e^2 + 2r'e\cos\varphi, \quad (OP)^2 = l^2 - (Oa)^2 = l^2 - r'^2 - 2r'e\cos\varphi - e^2.$$

Измененной потенциальной энергии системы можно придать вид

$$W' = \frac{k^2}{m(d^2 + r'^2) - J_p} + mg(OP) + \frac{\mu m (Oa)^2}{2} - \rho g \int\limits_D z d\tau \qquad \left(J_p = \rho \int\limits_D r'^2 d\tau\right)$$

$$(r^2 = x^2 + y^2)$$

где μm — характеристика упругой силы F, а D — область, свободная от жидкости.

При стационарном вращении с угловой скоростью ω вокруг оси z область D ограничена параболоидом

$$z - \beta r^2 = -\alpha_1, \qquad \beta = \frac{\omega^2}{2g} \tag{4.1}$$

причем ω^2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{k^2}{(m(d^2 + r_0'^2) - J_p)^2} \tag{4.2}$$

Сообщим системе возможное перемещение $\delta r = \xi$, $\delta\varphi = \eta$, при котором параболоид (4.1) переместится как твердая стенка вдоль оси z на величину $\delta(OP)$. Уравнение его приобретает вид

$$z - \beta r^2 = -\alpha_1 + \delta(OP) \tag{4.3}$$

и он ограничит область D'.

При этом перемещении величина $J_p(D) = J_p(D')$ не изменяется, а силы тяжести совершат работу $m_1 g\delta(OP)$, где m_1 — действительная масса системы. Приравнивая нулю первую вариацию измененной потенциальной энергии δW, при этом перемещении, получаем

$$\delta W = m_1 g \delta(OP) - \omega^2 m r_0'^2 \xi + \mu m (Oa) = 0$$

или

$$\mu r_0' + \mu e \cos\varphi_0 - \nu g \frac{r_0' + e\cos\varphi_0}{\sqrt{l^2 - r_0'^2 - e^2 - 2r_0' e\cos\varphi_0}} - \omega^2 r_0' = 0$$

$$r_0' e \sin\varphi \left[-\mu + \frac{\nu g}{\sqrt{l^2 + r_0'^2 - e^2 - 2r_0' e\cos\varphi_0}}\right] = 0 \qquad \left(\nu = \frac{m_1}{m}\right)$$

Второе уравнение допускает два решения $\varphi_0=0$, $\varphi_0=\pi$. Первое решение оставляет точку b на e ближе к оси z, чем точку a, а второе на e дальше. Решения r_0', полученные обращением в нуль квадратной скобки, сравнимы с l и поэтому оставим их в стороне. Решение первого уравнения, обращающееся в нуль вместе с e, ищем в виде ряда $r_0' = a_1 e + a_2 e^2 + \ldots$

Полагая $\varphi_0 = 0, \pi$, имеем

$$\mu r_0' \pm \mu e - \nu g \frac{r_0' \pm e}{\sqrt{l^2 - r_0'^2 - e^2 \mp 2r_0' e}} - \omega^2 r_0' = 0$$

Ограничиваясь первым членом, получим

$$r_0' = \pm \frac{\nu g / l - \mu}{\mu - \nu g / l - \omega^2} e = a_1 e$$

Решение $\varphi_0 = 0$ оказывается возможным, если $\nu g / l < \mu < \omega^2 + \nu g / l$, а $\varphi_0 = \pi$, если $\mu < \nu g / l$, либо если $\mu > \omega^2 + \nu g l$. Вычислим теперь вторую вариацию функции W при указанном перемещении системы

$$\begin{aligned}\Delta_1 W = \Bigg[&\frac{m^2 r_0'^2 (\mu + \sigma\omega^2) + (m^2 d^2 - J_p)(\mu - \omega^2)}{m(d^2 + r_0'^2) - J_p} - \\ &- \frac{l^2 m_1 g}{(l^2 - r_0'^2 - e^2 - 2r_0' e\cos\varphi_0)^{3/2}}\Bigg] \xi^2 - \\ &- r_0' e\cos\varphi_0 \left[m\mu - \frac{m_1 g}{\sqrt{l^2 - r_0'^2 - e^2 - 2r_0' e\cos\varphi_0}}\right] \eta^2\end{aligned} \tag{4.4}$$

Коэффициент при η^2 положителен только при $\varphi_0 = \pi$. Вычислим затем изменение функции W при переходе от параболоида (4.3) к параболоиду

$$z - \beta' r^2 = -\alpha_1 + \delta(OP) - \Delta\alpha_1 \qquad \left(\beta' g = \frac{k^2}{[m(d^2 + (r_0' + \xi)^2) - J_p(D'')]^2}\right) \tag{4.5}$$

Здесь D'' есть область, ограниченная параболоидом (4.5).

В указанном вычислении для удобства отклонимся от схемы, развитой в статье, так как сравнение будет делаться не с «замороженной» поверхностью $z - \beta r^2 = -\alpha_1$, а с поверхностью, смещенной на $\delta(OP)$ вниз, это, однако, не сыграет роли, так как изменение функции W при переходе к поверхности (4.3) учтено в формуле (4.4), а все остальные рассуждения при изменении поверхности сравнения не изменятся.

Из условия сохранения объема имеем

$$\alpha_1 = R^2\beta(1-\varepsilon) - \frac{H}{2}, \qquad \Delta\alpha_1 = R^2(1-\varepsilon)\Delta\beta \tag{4.6}$$

По определению

$$J_p = \rho \int\limits_{D''} r^2 d\tau = \frac{\rho\pi R^4 (1-\varepsilon)^2 H}{2} - \frac{\rho\pi H^3}{24\beta^2} \tag{4.7}$$

$$\Delta J_p = -\Delta_1 J = -\frac{\rho\pi H^3}{12\beta^3}\Delta\beta, \qquad \Delta\beta = -\frac{2k^2}{(m(d^2 + r_0'^2) - J_p)^2}[2mr_0'\xi - \Delta J_p] \tag{4.8}$$

Вычисляя изменение $\Delta_2 W$, находим

$$\Delta_2 W = -\frac{1}{2}\iint v^2 dx' dy' \frac{\partial z'}{\partial \Phi} - \frac{k^2}{J_0^3}(\Delta J_p)^2$$

$$v = \rho g [r^2 - R^2(1-\varepsilon)]\Delta\beta, \qquad x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi$$

где $x'y'z'$ — подвижные оси. Из (4.7) и (4.8) получаем

$$\left[1 + \frac{\rho\pi H^3}{\rho\beta^2[m(d^2 + r_0'^2) - J_p]}\right]\Delta\beta = -\frac{4\beta m r_0'}{m(d^2 + r_0'^2)J_p}\xi$$

Интегрируя и используя (4.8), получаем

$$\Delta_2 W = -\frac{2\rho\omega^2 H^3 m^2 r_0'^2}{[{}^3/_2\,\omega^4/g^2)[m(d^2 + r'^2) - J_p] + \rho\pi H^3][m(d^2 + r_0'^2) - J_p]}\xi^2$$

Окончательно достаточное условие устойчивости режима

$$\varphi_0 = \pi \text{ при } \mu m > m\omega^2 + m_1 g / l$$

будет иметь вид

$$\frac{m^2 r_0'^2(\mu + 3\omega^2) + (md^2 - J_p)(\mu - \omega^2)}{m(d^2 + r_0'^2) - J_p} - \frac{l^2 m_1 g}{(l^2 - r_0'^2 - e^2 + 2r_0'e)^{3/2}} -$$

$$- \frac{2\rho\omega^2 H^3 m^2 r_0'^2}{[3/2(\omega^4/g^2[m(d^2 + r_0'^2) - J_p] + \rho\pi H^3][m(d^2 + r_0'^2) - J_p]} > 0$$

Эта задача в предположении $\omega = \text{const}$ была рассмотрена в работе [6].

Поступила 17 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч., АН СССР, 1959, т. III.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости равновесия твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.
4. Пожарицкий Г. К. Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
5. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. II, Гостехиздат, 1950.
6. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости стационарного вращения карусельного гидроканала. ПМТФ, 1962, № 4.