

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В. И. Розенблюм (Ленинград)

Ввиду известной аналогии [1] между уравнениями установившейся ползучести и уравнениями теории упруго-пластических деформаций (или нелинейной упругости) при анализе ползучести оболочек применимы соотношения между усилиями, моментами и деформациями срединной поверхности, выведенные на базе гипотез Кирхгофа для случая упруго-пластической оболочки с упрочнением [2]. При решении конкретных задач часто вводятся из различных соображений те или иные упрощения [3,4], иногда не вполне последовательно [5]. Установленная недавно Друккером и Каладиным [6,7] теорема о вложенных поверхностях постоянной скорости диссипации позволяет подойти к этому вопросу с более общей точки зрения. В результате оказывается возможным вывести упрощенные соотношения между усилиями, моментами и деформациями, структура которых позволяет эффективно использовать вариационные методы решения, в частности, — метод, указанный Л. М. Качановым [8].

1. Будем исходить из степенного закона ползучести, которому соответствуют уравнения установившейся ползучести, имеющие вид [1]

$$\dot{\epsilon}_x = B_1 \sigma_x^m \quad (\text{одноосное растяжение}) \quad (1.1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{общий случай}) \quad (1.2)$$

где

$$\Lambda = 3^{\frac{m+1}{2}} \frac{B_1}{m+1} T^{m+1}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij} - 3\sigma^2}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{mn} \delta_{mn}$$

Скорость диссипации энергии на единицу объема  $D$  выражается соотношением

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{ij}} = (m+1) \Lambda \quad (1.3)$$

Пусть ползущее тело нагружено в некоторых точках сосредоточенными воздействиями  $Q_i$  (усилиями или моментами).

Введем вместо  $B_1$  две новые постоянные  $\sigma_N, \dot{\epsilon}_N$ , связанные соотношением

$$\dot{\epsilon}_N = B_1 \sigma_N^m \quad (1.4)$$

и приравняем среднюю скорость диссипации энергии в объеме тела  $V$  «номинальной» скорости диссипации  $D_N = \sigma_N \dot{\epsilon}_N$ , в результате получим

$$\frac{1}{V} \int D dV = \sigma_N \dot{\epsilon}_N \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) определяет гиперповерхность в прямоугольных осях  $Q_i$  и  $\sigma_N$ .

Теорема Друккера, Каладина заключается в том, что поверхности (1.5), построенные для возрастающих значений  $m$ , оказываются вложенными одна в другую.

2. Рассмотрим вначале случай осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки, приводящий к простой графической интерпретации. Скорости деформации в осевом и окружном направлениях выражаются известными формулами

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_1 + \kappa_1 z, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_2 \quad \left( \kappa_1 = - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (2.1)$$

где  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$  — скорости относительного удлинения срединной поверхности,  $\kappa_1$  — скорость изменения кривизны образующей.

Вычислим при помощи (2.1) скорость диссипации энергии  $D = D^*$  в объеме, приходящемся на единицу площади срединной поверхности

$$D^* = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_\varphi \dot{\epsilon}_\varphi) dz = T_1 \dot{\epsilon}_1 + T_2 \dot{\epsilon}_2 + M_1 \kappa_1 \quad (2.2)$$

Здесь  $T_1$ ,  $T_2$  — осевое и окружное усилия,  $M_1$  — изгибающий момент. Далее будем считать, что осевая сила отсутствует ( $T_1 = 0$ ). Для упругого материала

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \dot{\kappa}_1, \quad T_2 = Eh\dot{\varepsilon}_2$$

Внося эти соотношения в (2.2) и полагая  $\nu = 1/2$ ,  $E = \sigma_N / \dot{\varepsilon}_N$ , получим уравнение поверхности (1.5) для случая  $m = 1$

$$t_2^2 + \frac{9}{16} m_1^2 = 1 \quad (2.3)$$

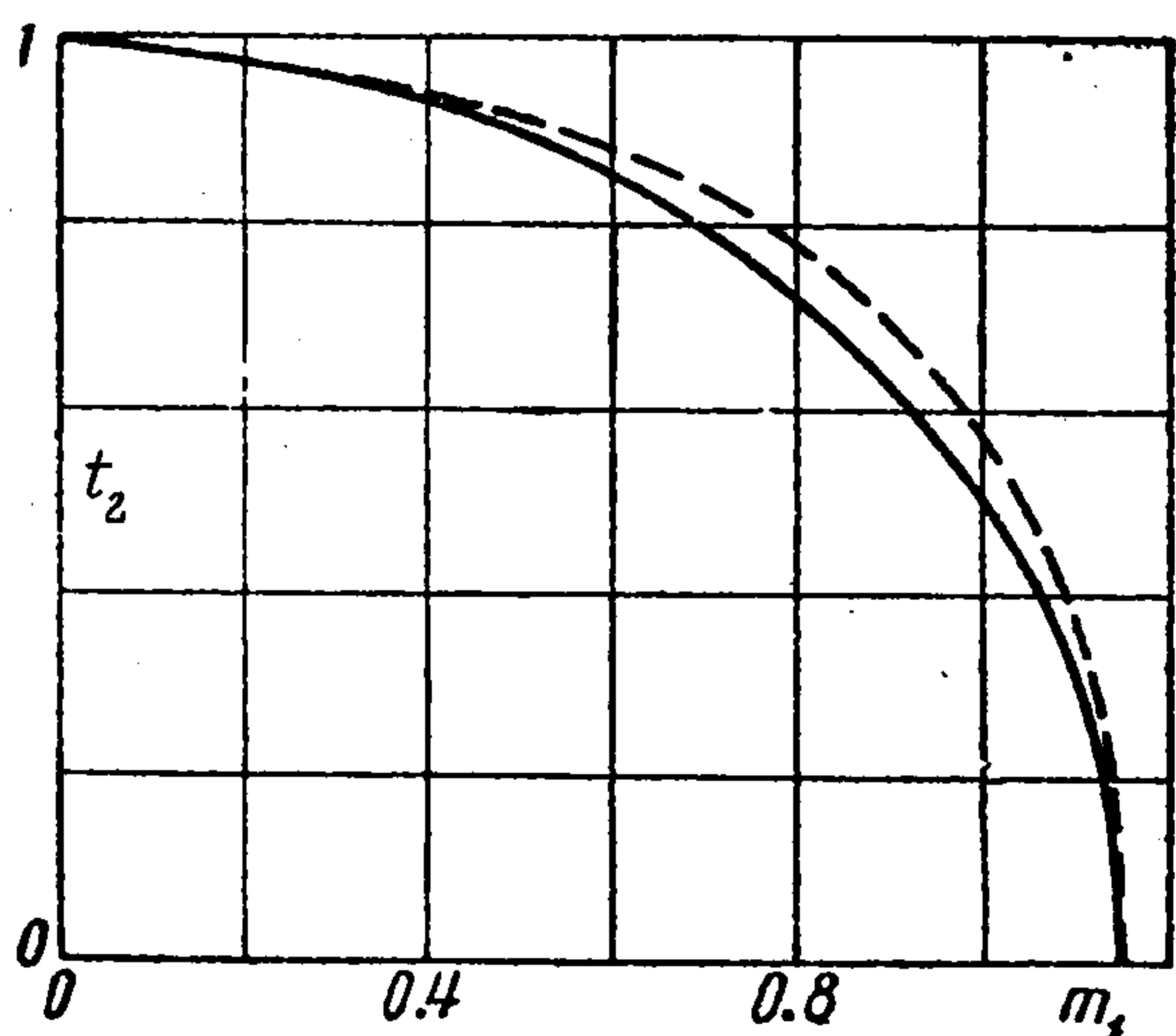
где

$$t_2 = \frac{T_2}{T_N}, \quad m_2 = \frac{M_2}{M_N}, \quad T_N = \sigma_N h, \quad M_N = \frac{\sigma_N h^2}{4} \quad (2.4)$$

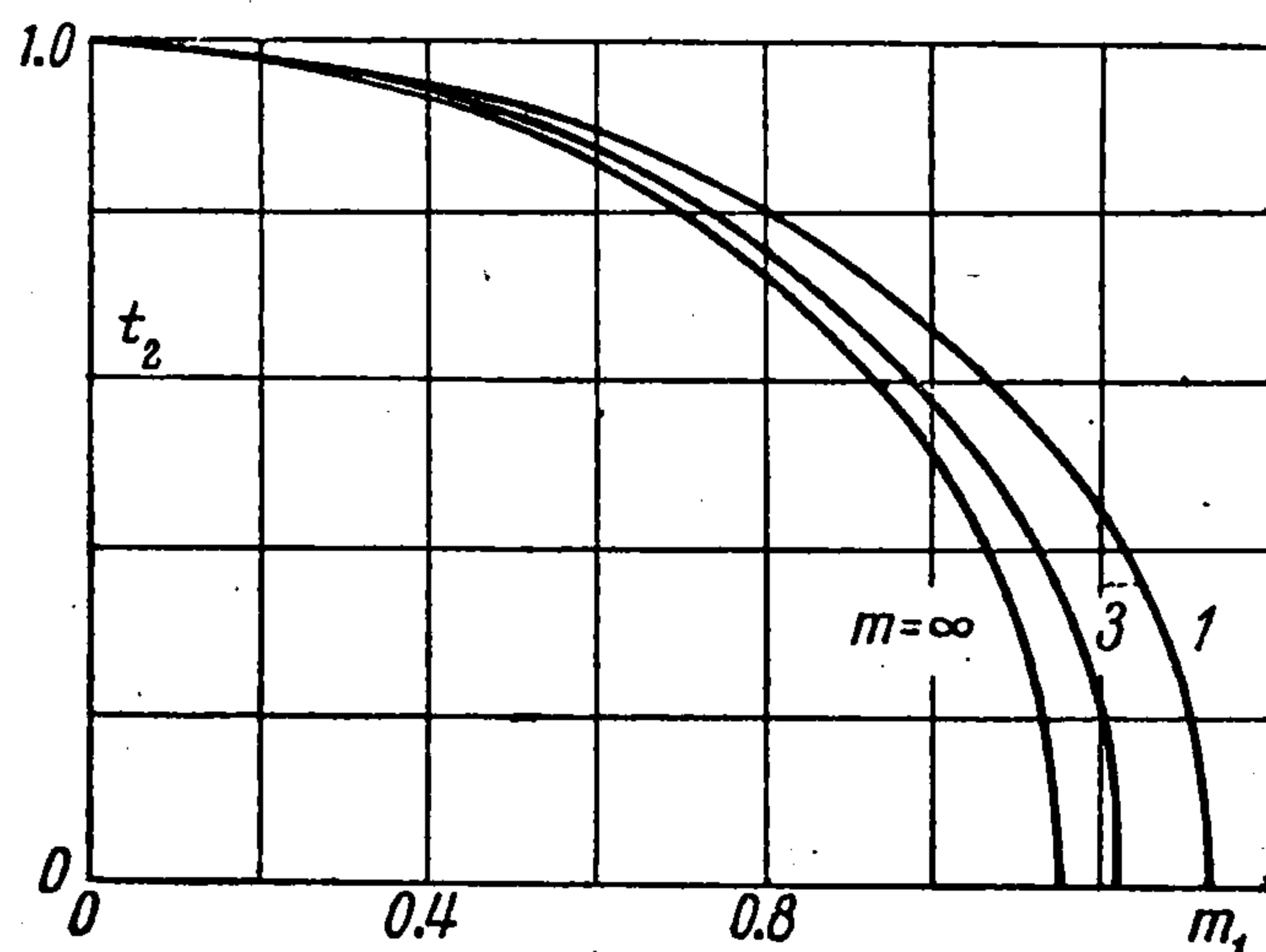
В случае  $m \rightarrow \infty$  поверхность (1.5) представляет собой соответствующее условие текучести [6]. Для случая осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки (при  $T_1 = 0$ ) это условие можно приближенно представить в виде [2]

$$t_2^2 + \frac{3}{4} m_1^2 = 1 \quad (2.5)$$

На фиг. 1 построена соответствующая кривая (сплошная линия), которая в общем незначительно отклоняется от точного условия [2] (пунктир).



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 2 построены кривые (2.3) и (2.5). Согласно теореме Друккера, Каладина соответствующие кривые для промежуточных значений  $m$  должны заключаться между ними. Предполагаемое положение этих промежуточных кривых, очевидно, можно указать с большой достоверностью, так как расстояние между ограничивающими кривыми невелико и так как в области наибольшего расхождения можно найти точки пересечения всех кривых с осью  $m_1$ , воспользовавшись известным точным решением для чистого изгиба. Будем искать промежуточные кривые в виде

$$f^2 \equiv t_2^2 + \alpha m_1^2 = 1 \quad (2.6)$$

где  $\alpha$  — некоторая постоянная. Применяя к рассматриваемому элементу оболочки обобщенную теорему Кастильяно [1], получим

$$\dot{\kappa}_1 = \frac{\partial \Lambda^*}{\partial M_1}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\partial \Lambda^*}{\partial T_2} \quad \left( \Lambda^* = \frac{1}{m+1} D^* \right) \quad (2.7)$$

Вектор с компонентами  $\dot{\kappa}_1$ ,  $\dot{\varepsilon}_2$  имеет на плоскости  $M_1$ ,  $T_2$  направление нормали к поверхности (2.6) в соответствующей точке [6, 7], следовательно

$$\dot{\kappa}_1 : \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\partial f}{\partial M_1} : \frac{\partial f}{\partial T_2} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.7), (2.8) будут совместны, если принять  $\Lambda^* = \Lambda^*(f)$ .

Из сравнения, например, со случаем плоского напряженного состояния вытекает, что функция  $\Lambda^*(f)$  должна иметь вид

$$\Lambda^* = \frac{A}{m+1} f^{m+1} \quad (2.9)$$

Внося соотношения (2.7) в (2.2) и учитывая (2.9), получим уравнение вложенных поверхностей в следующем виде

$$A f^{m+1} = h \dot{\varepsilon}_N \dot{\sigma}_N \quad (2.10)$$

Согласно фиг. 2 кривые для любого  $m$  должны проходить при  $m_1 = 0$  через точку  $t_2 = 1$ . Функция  $f = 1$  при  $m_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$ , поэтому из (2.10) получаем

$$A = h \sigma_N \dot{\varepsilon}_N \quad (2.11)$$

Для определения постоянной  $\alpha$  воспользуемся точным решением задачи чистого изгиба (при  $M_2 = 1/2 M_1$ ), которое имеет вид

$$M_1 = 3 \frac{-\frac{1+\mu}{2} \frac{h^{\mu+2}}{(2+\mu)} \frac{\sigma_N}{\varepsilon_N^\mu} \dot{\kappa}_1^\mu}{\left(\mu = \frac{1}{m}\right)}$$

Вычисляя соответствующую скорость диссипации

$$D^* = M_1 \dot{\kappa}_1 = 3 \frac{m+1}{2} \frac{(2+\mu)^m}{h^{1+2m}} \frac{\dot{\varepsilon}_N}{\sigma_N^m} M_1^{m+1}$$

и приравнявая ее постоянной  $h \sigma_N \dot{\varepsilon}_N$ , получим

$$m_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} (2+\mu)^{-\frac{1}{1+\mu}} \quad (2.12)$$

Очевидно, что кривые (2.6) должны пересекать ось  $m_1$  в точках (2.12). Из этого условия находим

$$\alpha = \frac{3}{16} (2+\mu)^{\frac{2}{1+\mu}} \quad (2.13)$$

При этом значении  $\alpha$  вложенные кривые (2.6) совпадают при  $m = 1$  и  $m \rightarrow \infty$  соответственно с кривыми (2.3) и (2.5). На фиг. 2 построена по уравнению (2.6) также одна из промежуточных кривых (для  $m = 3$ ). Переходя к размерным переменным в уравнениях (2.7) и учитывая (2.6), (2.9), получим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{B_1}{h^m} \left[ T_2^2 + \frac{16\alpha}{h^2} M_1^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} T_2 \\ \dot{\kappa}_1 &= \frac{16\alpha B_1}{h^{2+m}} \left[ T_2^2 + \frac{16\alpha}{h^2} M_1^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} M_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

3. Результаты, полученные в разобранный простой задаче, обнадеживают в отношении распространения решения на общий случай оболочки, который можно рассмотреть аналогично. Вычисляя скорость диссипации на единицу площади срединной поверхности  $D^*$  при помощи обычных кинематических гипотез

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_1 + z \dot{\kappa}_1 \quad \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_2 + z \dot{\kappa}_2, \quad \dot{\gamma}_{12} = \dot{\varepsilon}_{12} + z \dot{\kappa}_{12} \quad (3.1)$$

получим, пренебрегая отношением  $h/R$  по сравнению с единицей

$$D^* = T_1 \dot{\varepsilon}_1 + T_2 \dot{\varepsilon}_2 + T_{12} \dot{\varepsilon}_{12} + M_1 \dot{\kappa}_1 + M_2 \dot{\kappa}_2 + M_{12} \dot{\kappa}_{12} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz, & T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz, & T_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dz \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz, & M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z dz \end{aligned} \quad (3.3)$$

Случай  $m = 1$  эквивалентен упругой задаче (при  $\nu = 1/2$ ). Исключая скорости деформации срединной поверхности в (3.2) при помощи соотношений Лява, подставляя результат в (1.5) и полагая  $E = \sigma_N / \varepsilon_N$ , получим уравнение вложенной поверх-

ности (для  $m = 1$ ) в виде

$$(t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + 3t_{12}^2) + \frac{3}{4} (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2) = 1 \quad (3.4)$$

где безразмерные усилия и моменты определяются согласно соотношениям (2.4).

В случае  $m \rightarrow \infty$  уравнение вложенной поверхности совпадает с соответствующим условием текучести. Воспользуемся приближенным условием текучести [9]

$$(t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + 3t_{12}^2) + (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2) = 1 \quad (3.5)$$

Промежуточные поверхности зададим в виде

$$f^2 \equiv (t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 + 3t_{12}^2) + \frac{k}{16} (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + 3m_{12}^2) = 1 \quad (3.6)$$

и соответственно положим

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{\partial \Lambda^*}{\partial T_1}, & \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{\partial \Lambda^*}{\partial T_2}, & \dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{\partial \Lambda^*}{\partial T_{12}} \\ \dot{\kappa}_1 &= \frac{\partial \Lambda^*}{\partial M_1}, & \dot{\kappa}_2 &= \frac{\partial \Lambda^*}{\partial M_2}, & \dot{\kappa}_{12} &= \frac{\partial \Lambda^*}{\partial M_{12}} \end{aligned} \quad \left( \Lambda^* = \frac{A}{m+1} f^{m+1} \right) \quad (3.7)$$

Вычисляя скорость диссипации  $D^*$  по формуле (3.2) с учетом соотношений (3.7), получим из условия (1.5) уравнение вложенных поверхностей

$$A f^{m+1} = h \dot{\varepsilon}_N \sigma_N \quad (3.8)$$

Здесь  $A$  очевидно имеет прежнее значение (2.11), постоянная  $k$  определяется из рассмотрения случая чисто изгибного состояния (или сравнением с рассмотренным выше случаем цилиндрической оболочки)

$$k = 4(2 + \mu) \frac{2}{1 + \mu} \quad (3.9)$$

Окончательно соотношения усилия-деформации (3.7) можно представить так:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{B_1}{h^m} S^{m-1} \left( T_1 - \frac{1}{2} T_2 \right), & \dot{\kappa}_1 &= \frac{k B_1}{h^{m+2}} S^{m-1} \left( M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right) \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{B_1}{h^m} S^{m-1} \left( T_2 - \frac{1}{2} T_1 \right), & \dot{\kappa}_2 &= \frac{k B_1}{h^{m+2}} S^{m-1} \left( M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right) \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{3 B_1}{h^m} S^{m-1} T_{12}, & \dot{\kappa}_{12} &= \frac{3 k B_1}{h^{m+2}} S^{m-1} M_{12} \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$S = \left[ (T_1^2 - T_1 T_2 + T_2^2 + 3T_{12}^2) + \frac{k}{h^2} (M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3M_{12}^2) \right]^{1/2} \quad (3.11)$$

При этом

$$\Lambda^* = \frac{B_1 S^{m+1}}{(m+1) h^m} \quad (3.12)$$

Составляя при помощи (3.10) квадратичную форму

$$E = \left[ (\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_1 \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \frac{1}{4} \dot{\varepsilon}_{12}^2) + \frac{h^2}{k} (\dot{\kappa}_1^2 + \dot{\kappa}_1 \dot{\kappa}_2 + \dot{\kappa}_2^2 + \frac{1}{4} \dot{\kappa}_{12}^2) \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

получим

$$E = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B_1}{h^m} S^m, \quad S = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^\mu \frac{h}{B_1^\mu} E^\mu \quad (3.14)$$

При помощи этого соотношения можно представить зависимости (3.10) в форме, разрешенной относительно усилий и моментов

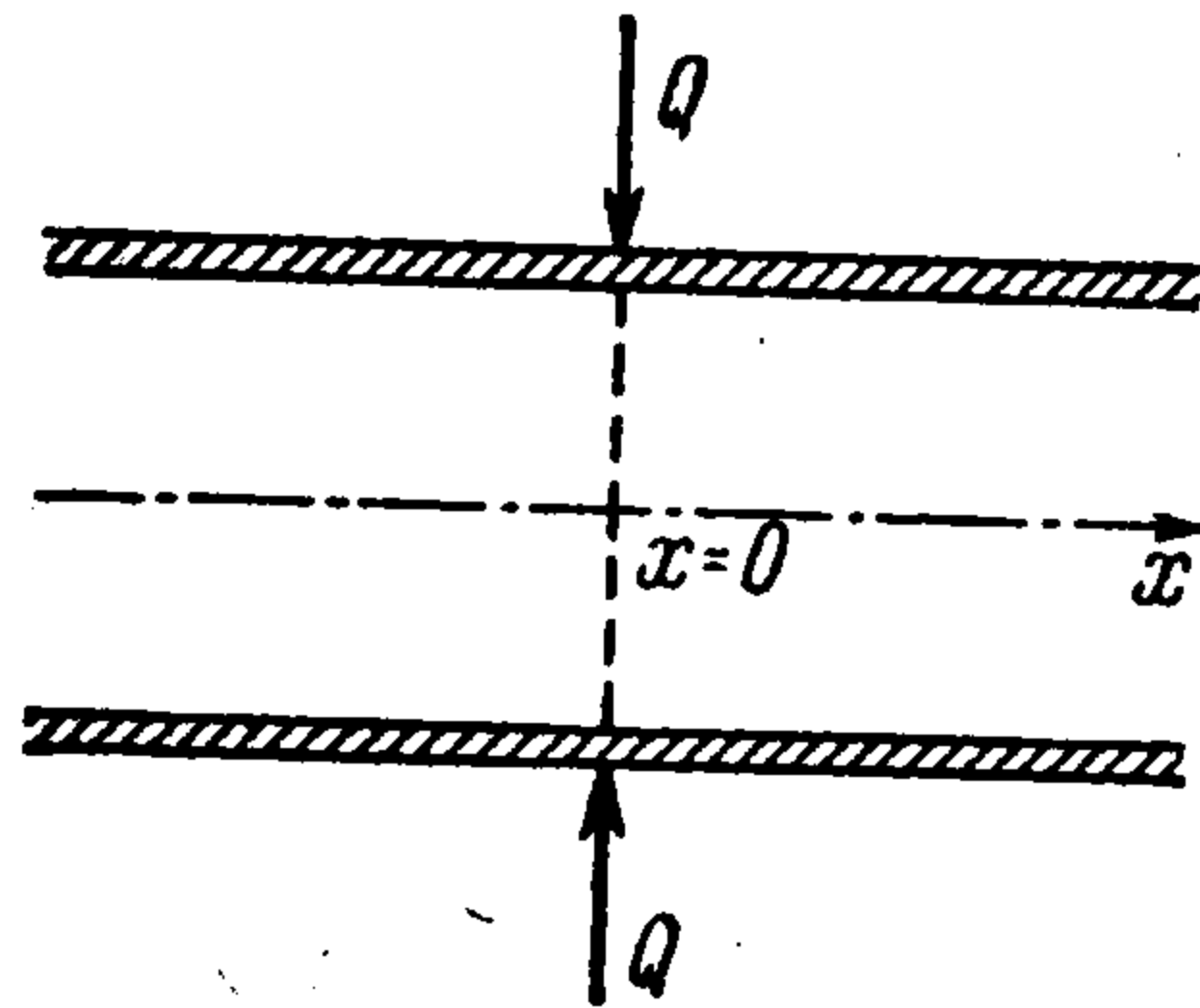
$$\begin{aligned} T_1 &= \vartheta h \frac{E^{\mu-1}}{B_1^\mu} (2\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2), & M_1 &= \frac{\vartheta h^3}{k} \frac{E^{\mu-1}}{B_1^\mu} (2\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2) \\ T_2 &= \vartheta h \frac{E^{\mu-1}}{B_1^\mu} (2\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_1), & M_2 &= \frac{\vartheta h^3}{k} \frac{E^{\mu-1}}{B_1^\mu} (2\dot{\kappa}_2 + \dot{\kappa}_1) \\ T_{12} &= \frac{\vartheta h}{2} \frac{E^{\mu-1}}{B_1^\mu} \dot{\varepsilon}_{12}, & M_{12} &= \frac{\vartheta h^3}{2k} \frac{E^{\mu-1}}{B_1^\mu} \dot{\kappa}_{12} \end{aligned} \quad \left( \vartheta = 2^{\mu+3} \frac{1+\mu}{2} \right) \quad (3.15)$$

Введя функцию рассеяния

$$L^* = \frac{A_1}{\mu + 1} E^{\mu+1}, \quad A_1 = \frac{2\sigma h}{B_1^\mu} \quad (3.16)$$

можно представить уравнения (3.15) также в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varepsilon}_1}, & T_2 &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varepsilon}_2}, & T_{12} &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varepsilon}_{12}} \\ M_1 &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\chi}_1}, & M_2 &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\chi}_2}, & M_{12} &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\chi}_{12}} \end{aligned} \quad (3.17)$$



Фиг. 3

Пользуясь соотношениями (3.7) и (3.17), нетрудно обычным путем вывести вариационные принципы

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \iint L^* dF - Ae \right\} &= 0 \\ \delta \left\{ Ae - \iint \Lambda^* dF \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $A_e$  — мощность внешних (краевых и распределенных) нагрузок, причем в первом равенстве (3.18) варьируются кинематически возможные поля скоростей срединной поверхности, а во втором — статически возможные поля усилий и моментов; используя метод Хилла [10], можно доказать, что первый функционал (3.18) имеет в действительном состоянии абсолютный минимум, а второй — абсолютный максимум.

4. Применим первый вариационный принцип (3.18) в задаче о ползучести «опоясанной» цилиндрической оболочки (фиг. 3). Так как осевая сила отсутствует, из первого соотношения (3.15) получаем

$$2\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = 0 \quad (4.1)$$

В осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочке радиуса  $a$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{w}{a}, \quad \dot{\chi}_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \dot{\chi}_2 = 0 \quad (4.2)$$

Здесь  $w$  — скорость ползучести в радиальном направлении. Учитывая (4.1) (4.2), из формулы (3.13) получим

$$E = \left[ \frac{3}{4} \dot{\varepsilon}_2^2 + \frac{h^2}{k} \dot{\chi}_1^2 \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

При этом

$$L^* = \frac{hB_1^{-\mu}}{1+\mu} \left( \dot{\varepsilon}_2^2 + \frac{4}{3} \frac{h^2}{k} \dot{\chi}_1^2 \right)^{\frac{1+\mu}{2}} \quad (4.4)$$

Зададим  $w$  в форме упругого решения [11]

$$w = w_0 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \quad (4.5)$$

Первый вариационный принцип (3.18) принимает вид

$$\delta \left\{ w_0^{\mu+1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\alpha) dx - Q w_0 \right\} = 0 \quad \left( \Phi_1(\alpha) = L^* \left( \frac{w}{w_0} \right) \right) \quad (4.6)$$

Будем варьировать параметры  $\alpha$ ,  $w_0$ . При этом из (4.6) получаем два уравнения

$$Q = D(\alpha) w_0^\mu, \quad \frac{d}{d\alpha} D(\alpha) = 0 \quad \left( D(\alpha) = 2(1+\mu) \int_0^\infty \Phi_1(\alpha) dx \right) \quad (4.7)$$

Здесь  $D(\alpha)$  очевидно имеет смысл «жесткости» оболочки.

Подставляя (4.5) в (4.4) и учитывая (4.6), (4.7), получим выражение: (4.8)

$$D(\alpha) = \frac{2hB_1^{-\mu}}{a^{1+\mu}} \int_0^{\infty} \left[ (\cos \alpha x + \sin \alpha x)^2 + \frac{4}{3k} (2\alpha^2 ah)^2 (\cos \alpha x - \sin \alpha x)^2 \right]^{\frac{\mu+1}{2}} e^{-(1+\mu)\alpha x} dx$$

Формулу (4.8) можно представить в следующем виде

$$D = \frac{hB_1^{-\mu}}{\alpha_* a^{1+\mu}} V_m(\beta) \quad \left( \alpha_* = \frac{1}{2} \frac{(3k)^{1/4}}{\sqrt{ah}}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha_*} \right) \quad (4.9)$$

$$V_m(\beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} [(1 + \sin \zeta) + \beta^4 (1 - \sin \zeta)]^{\frac{1+\mu}{2}} \exp\left(-\frac{(1+\mu)\zeta}{2}\right) d\zeta \quad (4.10)$$

Можно построить график зависимости  $V_m(\beta)$ , вычисляя (при фиксированном  $m$ ) интеграл в правой части (4.10) численным способом. Минимум кривой на этом графике определит корень  $\beta = \beta_0$ . Найденные таким путем значения  $\beta_0$  (и соответствующие значения  $\alpha_0 = \alpha_* \beta_0$ ) представлены на графике фиг. 4. Там же построен график функции  $V_m^0 = V_m(\beta_0)$ , которая, в соответствии с соотношением (4.9), определяет искомую жесткость оболочки.

Заметим, что согласно графику фиг. 4 значение  $\beta_0$  в общем не намного отличается от единицы;  $\beta_0 = 1$  в точности при  $m = 1$ . Наибольший интерес представляет минимум функции  $V_m(\beta)$ . Если принять  $\beta = \beta_0 \approx 1$ , то интеграл (4.10) легко вычисляется и дает

$$V_m(1) = V_m^* = \frac{1}{1+\mu} 2^{\frac{3+\mu}{2}} \quad (4.11)$$

Кривая  $V_m^*$ , нанесенная на фиг. 4, отличается от  $V_m^0$  в наиболее неблагоприятном случае ( $\mu = 0$ ) лишь на  $\approx 6\%$ .

Внося  $V_m^*$  в формулу (4.9) вместо  $V_m^0$ , получим простое приближенное выражение для жесткости  $D$ :

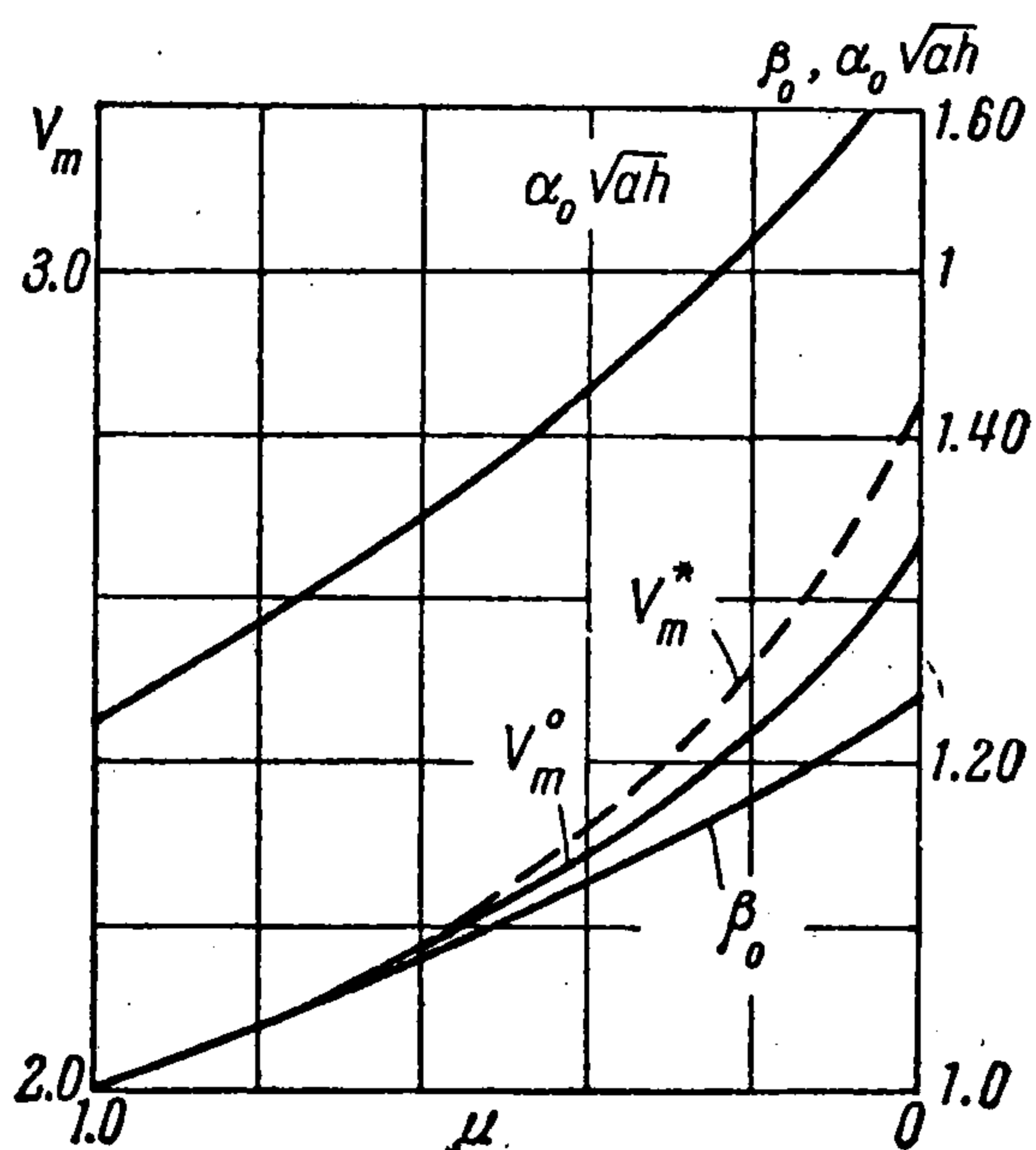
$$D = \frac{hB_1^{-\mu}}{\alpha_* a^{1+\mu}} \frac{1}{1+\mu} 2^{\frac{3+\mu}{2}} \quad (4.12)$$

В частности, при  $\mu = 1$ ,  $B_1^{-1} = E$  формула (4.12) переходит в известное точное решение для упругой оболочки [11].

Поступила 9 XI 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
3. Bieniek M. P., Freudenthal A. M. Creep deformation and stresses in pressurized long cylindrical shells. J. Aerospace Sci., 1960, № 10.
4. Onat E. T., Juksel H. On the steady creep of shells, Proc. third U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1958.
5. Gemma A. E. The creep deformation of symmetrically loaded circular cylindrical shells. J. Aerospace Sci., 1960, № 12.
6. Calladine C., Drucker D. Nesting surfaces of constant rate of energy dissipation in creep, Quart. Appl. Mathem., 1962, 20, № 1.
7. Calladine C., Drucker D. A bound method for creep analysis of structures, J. Mech. Engineering Sci., 1962, № 1.
8. Качанов Л. М. О вариационных методах решения задач теории пластичности. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
9. Розенблюм В. И. Об условии пластичности для тонкостенных оболочек. ПММ. 1960, т. XXIV, вып. 2.
10. Hill R., New horizons in the mechanics of solids, J. Mech. Solids, 1956, 5, № 1 (русс. пер. ИЛ, Сб. пер., Механика, 1957, № 4).
11. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.



Фиг. 4