

## ОДНА ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ИНДЕНТОРА С ОБРАЗОВАНИЕМ ТРЕЩИН

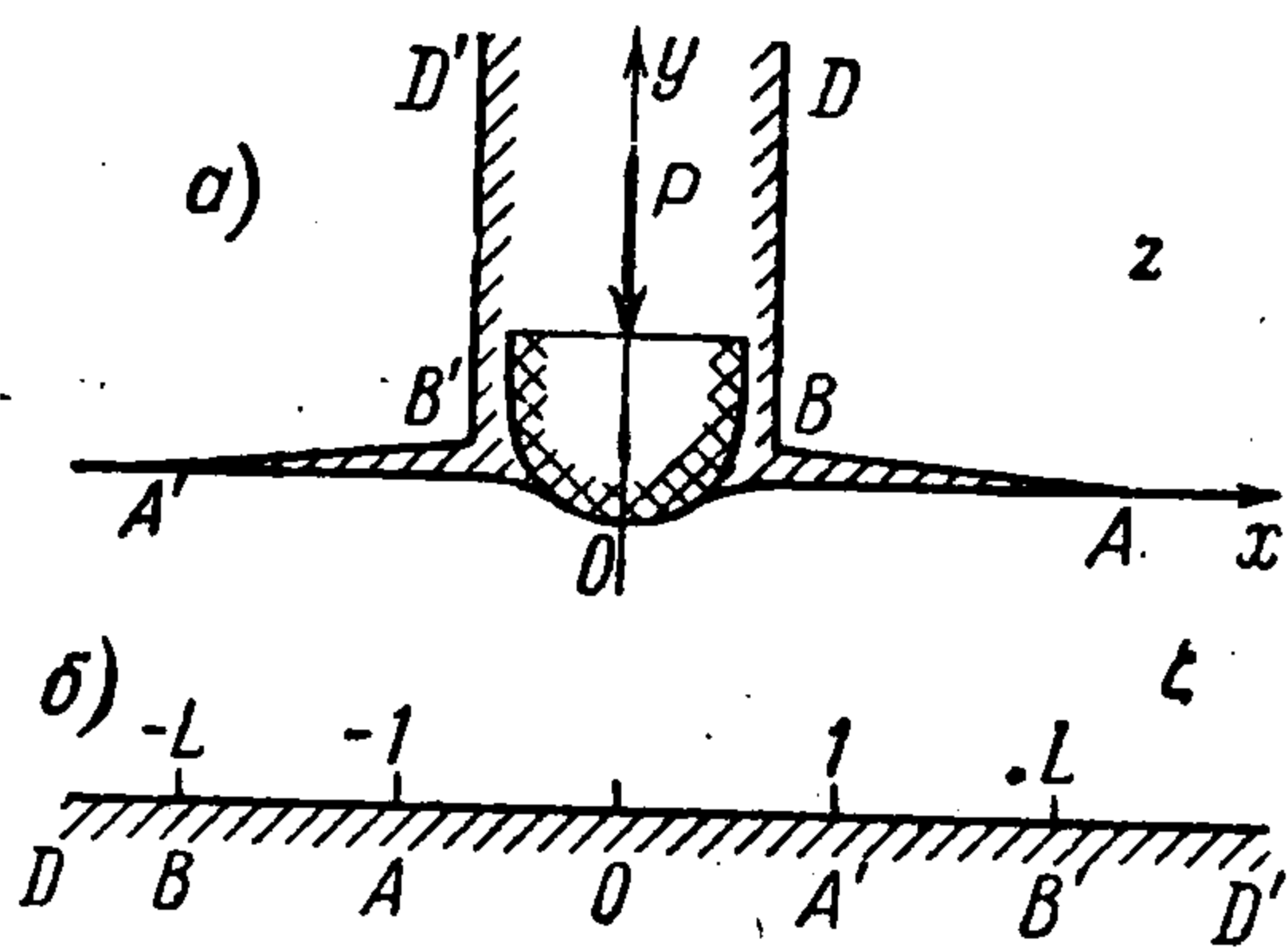
Г. П. Черепанов

(Москва)

Реслер [1] и Бенбоу [2] наблюдали конические трещины, образующиеся при вдавливании осесимметричного штампа в хрупкое тело. Постановка и решение задач об образовании и развитии трещин в упругом теле при вдавливании в него жесткого индентора представляет значительный интерес.

Ниже рассматривается плоская задача о начальном развитии трещин из угловых точек полубесконечного прямоугольного выреза, на дно которого давит жесткий штамп. Когда штамп полностью заполняет прямоугольный вырез, эта задача приближенно отвечает также на вопрос о начальном развитии трещины в условиях экспериментов Реслера и Бенбоу. При решении существенно использованы основные представления теории равновесных трещин [3].

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения. 1°. Представим себе бесконечное упругое тело, находящееся для определенности в условиях плоской деформации, из которого вырезана прямоугольная полуполоса  $y > 0$ ,  $|x| < h$  ( $x, y$  — декартовы координаты). На дно выреза давит абсолютно жесткий симметричный относительно оси  $y$  штамп, всюду вплотную прилегающий к стенкам  $x = \pm h$  и скользящий вдоль них без трения (фиг. 1, а). Сила, приложенная к штампу, равна  $P$  и направлена противоположно оси  $y$ . На площадке контакта  $|x| < a$  ( $a \ll h$ ) штампа с упругим телом, размеры которой, вообще говоря, нужно определить в процессе решения задачи, трение отсутствует. В бесконечно удаленной точке напряжения равны нулю.



Фиг. 1

Пусть материал упругого тела хорошо сопротивляется сжатию и сдвигу, а сопротивление его растяжению мало. Этим свойством обладает большое количество реальных материалов. Тогда естественно предположить, что трещины, возникающие в теле, являются трещинами нормального разрыва. Для определения криволинейного контура трещины нормального разрыва необходимы два дополнительных условия. Аналогично тому как это сделано в работе [4], примем следующую естественную гипотезу: развитие криволинейной трещины нормального разрыва происходит по направлению, в котором нормальное напряжение  $\sigma_\theta$  максимально ( $r, \theta$  — полярные координаты в кончике трещины). Из этой гипотезы следует, что направление касательной к поверхности естественной трещины нормального разрыва в ее конце должно быть направлением максимального напряжения  $\sigma_\theta$  и равного нулю касательного напряжения  $\tau_{r\theta}$ . Эта гипотеза «симметрии в малом» дает одно необходимое дополнительное условие. В качестве другого условия используем условие Г. И. Баренблатта [3] теории равновесных трещин нормального разрыва, согласно которому напряжение  $\sigma_\theta$  на продолжении трещины, вычисленное без учета сил сцепления имеет особенность  $K/\pi\sqrt{s}$ , где  $K$  — модуль сцепления,  $s$  — расстояние от конца трещины. Заметим, что для трещин, не удовлетворяющих условию «симметрии в малом», условие Г. И. Баренблатта не имеет места<sup>1</sup>.

2°. Согласно методу Н. И. Мусхелишвили [5], компоненты тензора напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и составляющие вектора смещения  $u$  и  $v$  в плоской задаче теории упругости описываются аналитическими функциями  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  ( $z = x + iy$ ). Имеют

<sup>1</sup> Условие «симметрии в малом» вытекает, вообще говоря, из гипотезы автономности концевой области трещины [3].

1 Условие «симметрии в малом» вытекает, вообще говоря, из гипотезы автономности концевой области трещины [3].

место основные соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_x + i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \overline{\Omega(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \overline{\Omega(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \overline{\Omega(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + \overline{\Omega(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ \Omega(z) &= z\Phi'(z) + \Psi(z) \quad (\kappa = 3 - 4\nu)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $\mu$  и  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, соответственно.

§ 2. Начальное развитие трещин из углов прямоугольного выреза. 1°. До образования трещины на боковых стенках выреза имеют место граничные условия

$$\tau_{xy} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = \pm h, y > 0\tag{2.1}$$

Легко видеть, что до образования трещины на действительной оси  $x$  в упругом теле касательное напряжение равно нулю

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0\tag{2.2}$$

а нормальное напряжение  $\sigma_y$  является растягивающим.

Считаем, что трещина нормального разрыва начинает развиваться из угловых точек выреза. Из первого дополнительного условия и соотношения (2.2) следует, что контур трещины будет касаться действительной оси  $x$  в угловых точках  $(\pm h, 0)$ .

Можно показать, что если после образования трещин на боковых стенках выреза имеют место граничные условия (2.1), то контур трещины будет представлять собой отрезок действительной оси для любых значений силы  $P$ .

Вообще говоря, после образования трещины второе граничное условие (2.1) не будет выполняться, однако при малой длине трещины, когда она мало отличается от отрезка действительной оси, а граничное условие на боковой стенке выреза мало отличается от условия (2.1), можно считать справедливыми условия (2.1), а граничные условия сносить с контура трещины на действительную ось. В этом приближении примем, что трещина развивается вдоль действительной оси, а на боковых стенках выреза имеют место граничные условия (2.1) (фиг. 1). Абсолютную величину координаты концов трещины обозначим через  $l$  ( $l \gg h$ ).

2°. Настоящая задача относится к классу задач, рассмотренных в работе [6].

Условия на границе упругого тела запишутся в виде

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 0 \quad \text{при } y = 0, |x| < l \text{ и при } x = \pm h, y > 0 \\ \sigma_y &= 0 \quad \text{при } y = 0, h < |x| < l \\ \partial u / \partial y &= 0 \quad \text{при } x = \pm h, y > 0 \\ \partial v / \partial x &= f'(x) \quad \text{при } y = 0, |x| < h\end{aligned}\tag{2.3}$$

Здесь  $f(x)$  — уравнение поверхности жесткого штампа.

На основании представлений (1.1) и условий (2.3) для функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  имеем следующую краевую задачу:

$$\text{Im } \Omega = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| < l \text{ и при } x = \pm h, y > 0\tag{2.4}$$

$$\text{Im } \Phi = 0 \quad \text{при } x = \pm h, y > 0$$

$$\text{Im } \Phi = [2\mu / (\kappa + 1)] f'(x) \quad \text{при } y = 0, |x| < a\tag{2.5}$$

$$\text{Re } [2\Phi + \Omega] = 0 \quad \text{при } y = 0, l > |x| > a$$

При больших  $z$  аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  ведут себя следующим образом:

$$\Phi(z) = Pi(4\pi)^{-1}z^{-1} + O(z^{-2}), \quad \Omega(z) = o(z^{-1}) \quad (2.6)$$

Отсюда вытекает на основании формул (2.4)

$$\Omega(z) = 0 \quad (2.7)$$

Перейдем на комплексную плоскость параметрического переменного  $\zeta = \xi + i\eta$  при помощи преобразования  $z = \omega(\zeta)$

$$\omega(\zeta) = -\frac{2h}{\pi(2-L^2)} \left[ \zeta \sqrt{L^2 - \zeta^2} + (2-L^2) \operatorname{arcsin} \frac{\zeta}{L} \right] \quad (\operatorname{arcsin} 0 = 0) \quad (2.8)$$

Здесь при  $\zeta \rightarrow \infty$  имеют место соотношения

$$\sqrt{L^2 - \zeta^2} = -i\zeta + O(\zeta^{-1}), \quad \omega(\zeta) = 2hi\pi^{-1}(2-L^2)^{-1}\zeta^2 + o(\zeta^2) \quad (2.9)$$

Функция (2.8) конформно преобразует верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} \zeta > 0$  во внешность полуполосы  $\operatorname{Im} z > 0$ ,  $|\operatorname{Re} z| < h$  с двумя вырезами  $(\pm h, \pm l)$  плоскости  $z$ , причем имеет место следующее соответствие точек (фиг. 1)

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(-1) = 1, \quad \omega(\infty) = \infty$$

Величина  $L (L > 1)$  определяется уравнением

$$\frac{\pi l}{2h}(2-L^2) = \sqrt{L^2-1} + (2-L^2) \operatorname{arcsin} \frac{1}{L} \quad (2.10)$$

Обозначим

$$\Phi[\omega(\zeta)] = \Phi_1(\zeta), \quad g(\xi) = -2\mu(\kappa+1)^{-1}f'[x(\xi)] \quad (2.11)$$

Краевая задача (2.5) при помощи формул (2.7) и (2.11) запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi_1 &= 0 && \text{при } \eta = 0, |\xi| > L \\ \operatorname{Re} \Phi_1 &= 0 && \text{при } \eta = 0, L > |\xi| > \lambda \\ \operatorname{Im} \Phi_1 &= g(\xi) && \text{при } \eta = 0, \lambda > |\xi| \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь величина  $\lambda (\lambda < 1)$  находится из уравнения

$$\frac{\pi a}{2h}(2-L^2) = \lambda \sqrt{L^2 - \lambda^2} + (2-L^2) \operatorname{arcsin} \frac{\lambda}{L} \quad (2.13)$$

При  $\zeta \rightarrow \infty$  на основании (2.6) и (2.9)

$$\Phi_1(\zeta) = P(8h)^{-1}(2-L^2)\zeta^{-2} + o(\zeta^{-2}) \quad (2.14)$$

Функция  $\omega(\zeta)$  обладает следующими свойствами:

$$\omega(\zeta) = -h + i\sqrt{\zeta - L}h(2L)^{1/2}\pi^{-1}(2-L^2)^{-1} + o(\sqrt{\zeta - L}) \quad \text{при } \zeta \rightarrow L \quad (2.15)$$

$$\omega(\zeta) = -l + (\zeta - 1)^2 4h\pi^{-1}(2-L^2)^{-1}(L^2 - 1)^{-1/2} + o[(\zeta - 1)^2] \quad \text{при } \zeta \rightarrow 1 \quad (2.16)$$

Функция  $\Phi(z)$  в концах трещины имеет особенность  $(z \pm l)^{-1/2}$ ; отсюда на основании формулы (2.16) следует, что функция  $\Phi_1(\zeta)$  в точках  $\zeta = \pm 1$  имеет полюсы первого порядка.

Решение краевой задачи (2.3), (2.6) в классе функций, имеющих полюсы первого порядка в точках  $\zeta = \pm 1$ , ограниченных в точках  $\zeta = \pm L$  и неограниченных (но интегрируемых) в точках  $\zeta = \pm \lambda$ , находится по формулам Келдыша — Седова [7]

$$\Phi_1(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta^2 - L^2}{\zeta^2 - \lambda^2}} \frac{1}{\pi(\zeta^2 - 1)} \left[ \int_{-\lambda}^{+\lambda} g(t) \sqrt{\frac{t^2 - \lambda^2}{t^2 - L^2}} \frac{t-1}{t-\zeta} dt + \frac{\pi P}{8h}(2-L^2) \right] \quad (2.17)$$

Здесь

$$\sqrt{\frac{\zeta^2 - L^2}{\zeta^2 - \lambda^2}} = 1 + O(\zeta^{-2}) \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

Если штамп гладкий, то размер площадки контакта  $a$  находится из условия Н. И. Мусхелишвили конечности напряжений в конце этой площадки [6] или, что то же, из условия ограниченности функции  $\Phi_1(\zeta)$  в точках  $\zeta = \pm \lambda$

$$\int_0^\lambda \frac{t(t^2-1)g(t)dt}{V(L^2-t^2)(\lambda^2-t^2)} + \frac{\pi P}{16h}(2-L^2) = 0 \quad (2.19)$$

Длина трещины  $l$  определяется из условия Г. И. Баренблатта [3] в кончике трещины нормального разрыва. Получаем

$$2 \int_0^\lambda \operatorname{tg}(t) \sqrt{\frac{t^2-\lambda^2}{t^2-L^2}} dt + \frac{\pi P}{8h}(2-L^2) = \sqrt{\frac{\pi(1-\lambda^2)(2-L^2)}{4h\sqrt{L^2-1}}} K \quad (2.20)$$

3°. Рассмотрим простейшие частные случаи общего решения. Пусть основание штампа прямолинейное  $g(t) = 0$  и размер площадки контакта  $a$  задан. Тогда по формуле (2.17) функция  $\Phi_1(\zeta)$  запишется в виде

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{P(2-L^2)}{8\pi(\zeta^2-1)} \sqrt{\frac{\zeta^2-L^2}{\zeta^2-\lambda^2}} \quad (2.21)$$

Условие (2.19) для определения длины трещины  $l$  примет форму

$$\frac{P}{K\sqrt{h}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{(2-L^2)\sqrt{L^2-1}}} \quad (2.22)$$

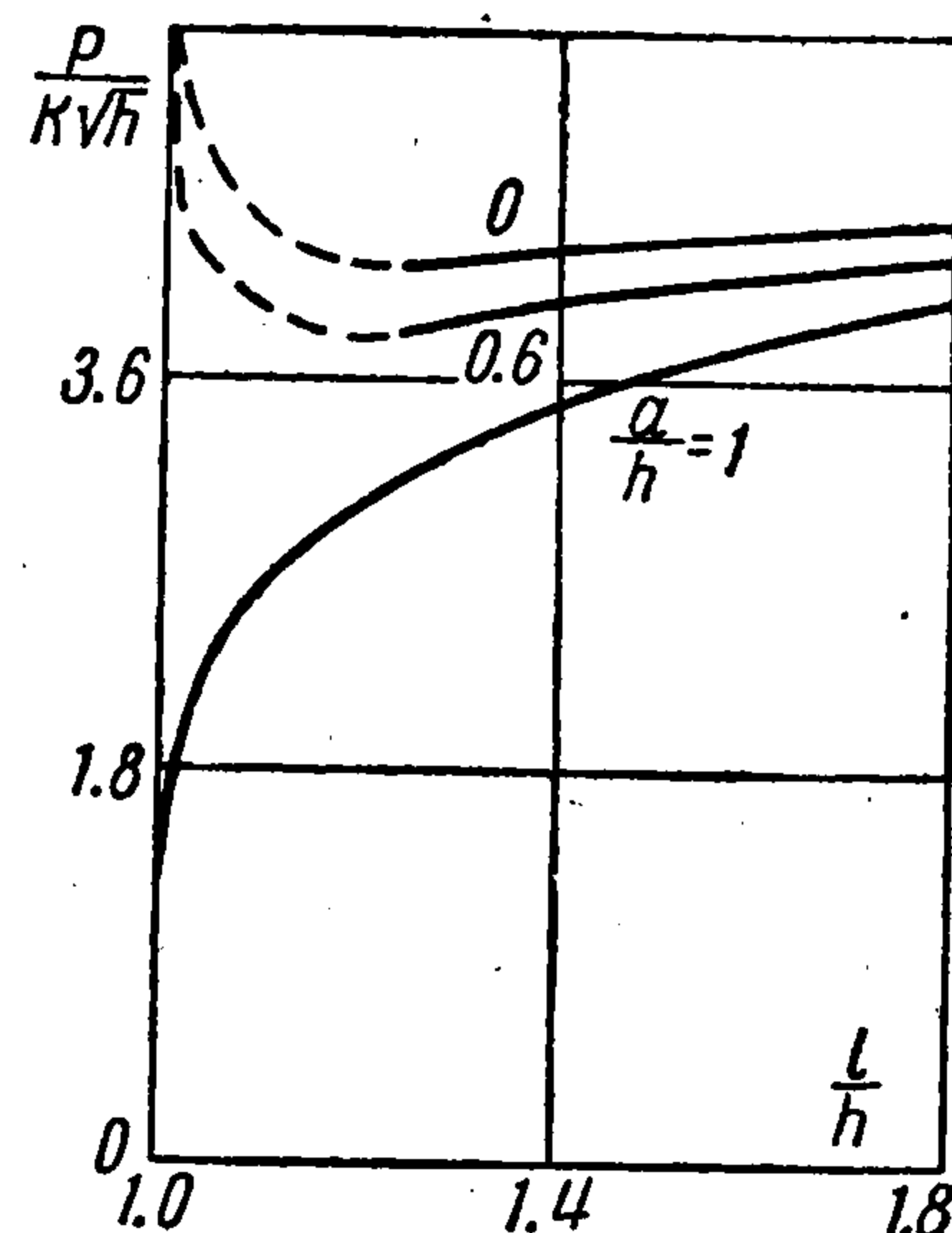
На фиг. 2 изображены кривые зависимости безразмерной силы  $P/K\sqrt{h}$  от безразмерной длины трещины  $l/h$  при нескольких значениях параметра  $a/h$ . График подсчитан по формулам (2.22), (2.10) и (2.13). Сплошными линиями нанесены устойчивые участки кривых, а пунктирными — неустойчивые. Как видно из фиг. 2, при значении параметра  $a/h$ , равном 1, развитие трещины происходит всегда устойчиво. При значениях параметра  $a/h$ , отличных от 1, кривая всегда имеет начальный неустойчивый участок, так что трещина возникает лишь при достижении силой  $P$  некоторого критического значения, соответствующего точке минимума кривой. При увеличении безразмерной силы  $P/K\sqrt{h}$  все кривые стремятся к одной асимптоте

$$l = \frac{P^2}{8K^2} \quad (2.23)$$

Автор благодарен Г. И. Баренблатту за высказанные им ценные замечания. Поступила 2 X 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Roesler F. C. Brittle fracture near equilibrium. Proc. Phys. Soc., 1956, v. 69, 981—992.
2. Venbow I. I. Cone cracks in fused silica. Proc. Phys. Soc., 1960, v. 75, 697—699.
3. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4, стр. 3—56.
4. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
6. Черепанов Г. П. Об одном классе задач плоской теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 4.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.



Фиг. 2