

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

С. Г. Лехницкий

(Ленинград)

Плоская задача о распределении напряжений в упругой анизотропной полосе, деформируемой нагрузками частного и общего вида, рассматривалась несколькими авторами. В работах [1-5] решения строятся при помощи функции напряжений Эри в виде полиномов или тригонометрических рядов. П. П. Куфаревым и В. А. Свекло [6] и В. Н. Шепеленко [7] использовано комплексное представление напряжений и перемещений; решения двух основных и некоторых задач смешанного типа найдены при помощи интегралов Фурье.

Ниже излагается общий, операторный метод решения названной задачи, аналогичный методу А. И. Лурье, при помощи которого были получены изящные и очень простые по форме решения трехмерных задач об упругом равновесии изотропного слоя и толстой плиты ([8], гл. 3 и 4; см. также [9]).

1. **Постановка задачи и общие уравнения.** Рассмотрим бесконечную упругую анизотропную полосу постоянной ширины h , находящуюся в обобщенном плоском напряженном состоянии или в состоянии плоской деформации под действием уравновешенных усилий, распределенных по краям. Предполагаем, что материал следует обобщенному закону Гука и испытывает малые деформации. Направим ось x вдоль оси полосы и ось y нормально к границе.

При наличии только одной плоскости упругой симметрии, параллельной xy , уравнения обобщенного закона Гука можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy}, & \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy}, & \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy}, & \gamma_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты деформации; их можно выразить через модули Юнга и сдвига, коэффициенты Пуассона и др. (см., например [1] стр. 18).

В дальнейшем будем обозначать производную по x через ∂ ($\partial = \partial / \partial x$), а производную по y — штрихом. Тогда формулы для напряжений в случае плоской задачи и уравнение для функции напряжений запишутся так:

$$\sigma_x = F'', \quad \sigma_y = \partial^2 F, \quad \tau_{xy} = -\partial F' \quad (1.2)$$

$$\beta_{11}F^{IV} - 2\beta_{16}\partial F''' + (2\beta_{12} + \beta_{66})\partial^2 F'' - 2\beta_{26}\partial^3 F' + \beta_{22}\partial^4 F = 0 \quad (1.3)$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния $\beta_{ij} = a_{ij}$, в случае плоской деформации $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{j3} : a_{33}$.

Будем искать решение уравнения (1.3) в виде ряда

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) y^k \quad (1.4)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.3) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях y , получим бесконечную систему рекуррентных уравнений для g с разными индексами и их производных до четвертой включительно. Эта система позволяет все функции выразить через четыре, например, через g_0, g_1, g_2, g_3 . Характеристическое уравнение, соответствующее (1.3), имеет вид

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} = 0 \quad (1.5)$$

корни его, называемые комплексными параметрами плоской задачи, обозначим через $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$. При неравных комплексных параметрах общее выражение для F может быть записано в следующей компактной форме:

$$F = e^{\mu_1 y \partial} \cdot \varphi_1 + e^{\mu_2 y \partial} \cdot \varphi_2 + e^{\bar{\mu}_1 y \partial} \cdot \bar{\varphi}_1 + e^{\bar{\mu}_2 y \partial} \cdot \bar{\varphi}_2 \quad (1.6)$$

Здесь

$$e^{\mu y \partial} = 1 + \mu y \partial + \frac{\mu^2 y^2}{2!} \partial^2 + \frac{\mu^3 y^3}{3!} \partial^3 + \dots \quad (1.7)$$

Произвольные функции φ_1, φ_2 переменного x (вообще говоря, с комплексными коэффициентами) и сопряженные функции $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ определяются из граничных условий на сторонах полосы $y = \pm h/2$.

Точки в (1.6) и последующих формулах ставятся для того, чтобы отделить дифференциальные операторы от функций, к которым они применяются.

В дальнейшем для сокращения выкладок будем рассматривать только ортотропную полосу. В этом случае в уравнениях (1.1) имеем $a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0$, а следовательно $\beta_{16} = \beta_{26} = 0$. Компоненты перемещения u, v определяются по известным напряжениям из уравнений

$$\partial u = \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y, \quad v' = \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y, \quad \partial v + u' = \beta_{33}\tau_{xy} \quad (1.8)$$

Введем новые параметры $\pm s_1, \pm s_2$ — корни уравнения

$$\beta_{11}s^4 - (2\beta_{12} + \beta_{33})s^2 + \beta_{22} = 0 \quad (1.9)$$

При β_{11} и β_{22} конечных и не равных нулю возможны следующие три случая корней

$$(1) s_1 = \beta, s_2 = \delta; \quad (2) s_1 = \beta, s_2 = \beta; \quad (3) s_1 = \beta + \alpha i, s_2 = \beta - \alpha i$$

(α, β, δ — вещественные положительные числа).

При $s_1 \neq s_2$ общее выражение для функции напряжений можно записать так:

$$F = \cos s_1 y \partial. F_1 + \cos s_2 y \partial. F_2 + \sin s_1 y \partial. F_1^* + \sin s_2 y \partial. F_2^* \quad (1.10)$$

Вводя новые обозначения для неизвестных функций

$$f_k = \partial F_k, \quad f_k^* = \partial F_k^* \quad (1.11)$$

получим по формулам (1.2) выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\partial (s_1^2 \cos s_1 y \partial. f_1 + s_2^2 \cos s_2 y \partial. f_2 + s_1^2 \sin s_1 y \partial. f_1^* + s_2^2 \sin s_2 y \partial. f_2^*) \\ \sigma_y &= \partial (\cos s_1 y \partial. f_1 + \cos s_2 y \partial. f_2 + \sin s_1 y \partial. f_1^* + \sin s_2 y \partial. f_2^*) \\ \tau_{xy} &= \partial (s_1 \sin s_1 y \partial. f_1 + s_2 \sin s_2 y \partial. f_2 - s_1 \cos s_1 y \partial. f_1^* - s_2 \cos s_2 y \partial. f_2^*) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Интегрируя уравнения (1.8), находим общие формулы для перемещений

$$u = (\beta_{12} - \beta_{11}s_1^2) (\cos s_1 y \partial. f_1 + \sin s_1 y \partial. f_1^*) + (\beta_{12} - \beta_{11}s_2^2) (\cos s_2 y \partial. f_2 + \sin s_2 y \partial. f_2^*) - \omega y + u_0 \quad (1.13)$$

$$v = \left(\frac{\beta_{22}}{s_1} - \beta_{12}s_1 \right) (\sin s_1 y \partial. f_1 - \cos s_1 y \partial. f_1^*) + \left(\frac{\beta_{22}}{s_2} - \beta_{12}s_2 \right) (\sin s_2 y \partial. f_2 - \cos s_2 y \partial. f_2^*) + \omega x + v_0$$

(ω, u_0, v_0 — произвольные постоянные, характеризующие «жесткие» смещения в плоскости xy).

Чтобы не слишком усложнять задачу, будем считать, что на всем протяжении каждой из двух прямолинейных кромок полосы заданы или напряжения или перемещения, или одна составляющая напряжения и одна проекция перемещения. Удовлетворяя граничным условиям, получим систему четырех дифференциальных уравнений (бесконечно высокого порядка) для четырех неизвестных функций переменной x и задача сведется к интегрированию этой системы. Для ортотропной полосы имеет смысл заданные усилия или перемещения разложить на симметричные относительно оси x и кососимметричные и найти соответствующие распределения напряжений — симметричное и кососимметричное. Ограничимся только случаем заданных усилий; решения второй основной задачи и смешанных найдутся совершенно аналогичным путем.

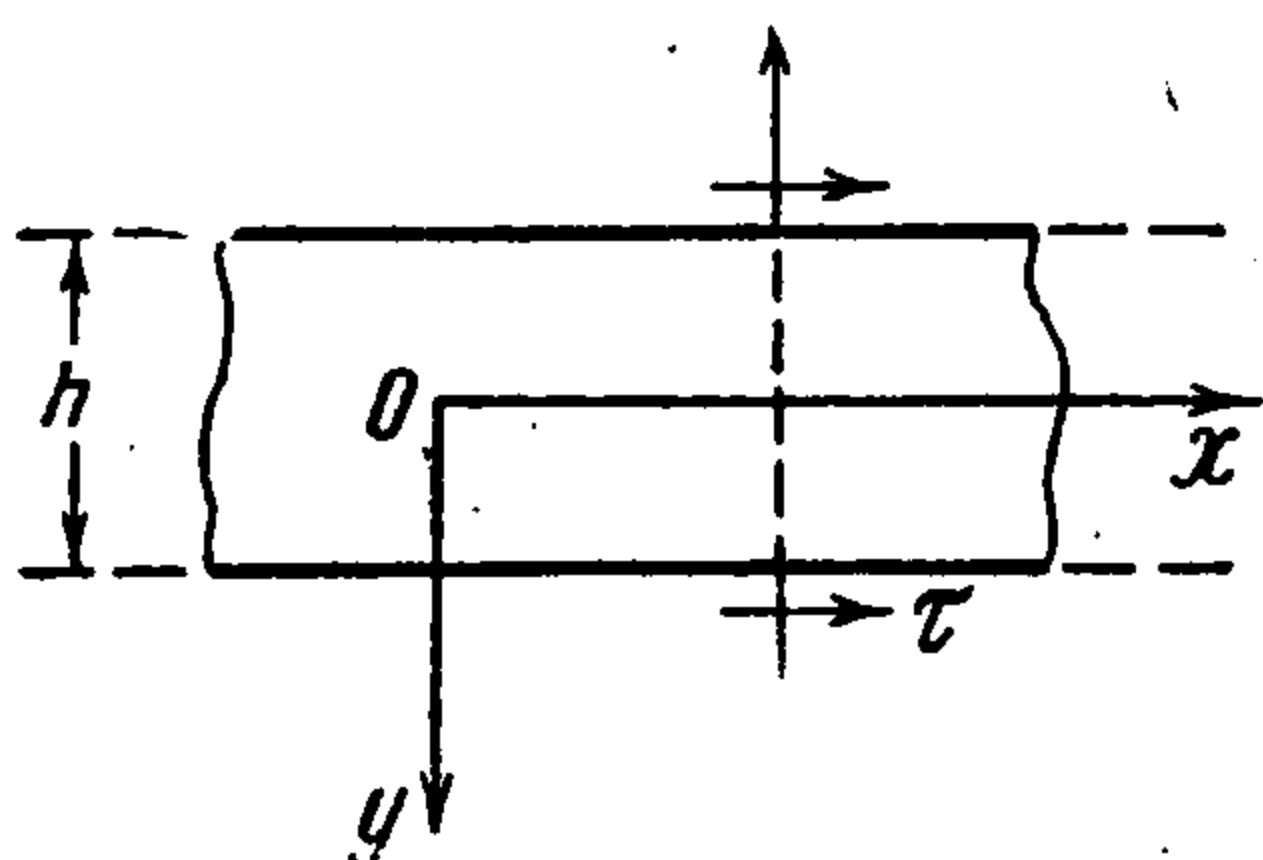
Если полоса имеет конечную длину, то в данной работе условиям на торцах будем удовлетворять не точно, а ограничимся лишь требованием, чтобы главный вектор и главный момент усилий принимали там заданные значения.

Однако, заметим, что операторный метод даст возможность получать и более точные решения.

2. Симметричное распределение усилий. Пусть по двум сторонам полосы распределены усилия p , τ (на единицу площади), симметричные относительно ее оси x (фиг. 1). Имеем граничные условия

$$\sigma_y = p(x), \quad \tau_{xy} = \pm \tau(x) \quad \text{при } y = \pm h/2 \quad (2.1)$$

В ортотропной полосе распределение напряжений также будет симметричным и можно в формулах (1.12) и (1.13) заранее приять $f_1^* = f_2^* = 0$. Полагая, что $s_1 \neq s_2$, получим из граничных условий систему двух уравнений для f_1 и f_2



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \partial \left(\cos \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot f_1 + \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot f_2 \right) &= p \\ \partial \left(s_1 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot f_1 + s_2 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot f_2 \right) &= \tau \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обозначим через Q дифференциальный оператор, пропорциональный определителю системы уравнений (2.2)

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_1 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cos \frac{s_2 h \partial}{2} - s_2 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \right) = \\ &= 0.5 \left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \sin(s_1 - s_2) \frac{h \partial}{2} + \sin(s_1 + s_2) \frac{h \partial}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем функции напряжений χ_1 и χ_2 , так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$Q(\partial \chi_1) = p, \quad Q(\partial \chi_2) = \tau \quad (2.4)$$

Для этого достаточно положить

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(-s_2 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot \chi_1 + \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot \chi_2 \right) \\ f_2 &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_1 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot \chi_1 - \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot \chi_2 \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя эти значения в (1.12), получим формулы для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(s_1 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cos s_1 y \partial - s_2 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cos s_2 y \partial \right) \partial \chi_1 - \\ &\quad - \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_1^2 \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \cos s_1 y \partial - s_2^2 \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \cos s_2 y \partial \right) \partial \chi_2 \\ \sigma_y &= - \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_2 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cos s_1 y \partial - s_1 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cos s_2 y \partial \right) \partial \chi_1 + \\ &\quad + \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\cos \frac{s_2 h \partial}{2} \cos s_1 y \partial - \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \cos s_2 y \partial \right) \partial \chi_2 \\ \tau_{xy} &= - \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\sin \frac{s_2 h \partial}{2} \sin s_1 y \partial - \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \sin s_2 y \partial \right) \partial \chi_1 + \\ &\quad + \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_1 \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \sin s_1 y \partial - s_2 \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \sin s_2 y \partial \right) \partial \chi_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выражений для перемещений приводить не будем, так как структура их ясна из (1.13) и (2.5). В формулы для перемещений войдут не первые производные χ_1 и χ_2 , а сами эти функции.

В случае (3), когда $s_1 = \beta + \alpha i$, $s_2 = \beta - \alpha i$, вместо (2.3) будем иметь

$$Q = 0.5 \left(\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha h \partial + \sin \beta h \partial \right) \quad (2.7)$$

При $s_1 = s_2 = \beta$

$$Q = 0.5 (\beta h \partial + \sin \beta h \partial) \quad (2.8)$$

Выражения для напряжений получим из (2.6) при $\alpha \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \beta^2 \left[\left(\sin \frac{\beta h \partial}{2} - \frac{\beta h \partial}{2} \cos \frac{\beta h \partial}{2} \right) \cos \beta y \partial - \sin \frac{\beta h \partial}{2} \beta y \partial \sin \beta y \partial \right] \partial \chi_1 - \\ &- \beta \left[\left(2 \cos \frac{\beta h \partial}{2} + \frac{\beta h \partial}{2} \sin \frac{\beta h \partial}{2} \right) \cos \beta y \partial - \cos \frac{\beta h \partial}{2} \beta y \partial \sin \beta y \partial \right] \partial \chi_2 \\ \sigma_y &= \left[\left(\sin \frac{\beta h \partial}{2} + \frac{\beta h \partial}{2} \cos \frac{\beta h \partial}{2} \right) \cos \beta y \partial + \sin \frac{\beta h \partial}{2} \beta y \partial \sin \beta y \partial \right] \partial \chi_1 + \\ &+ \left(\frac{h}{2} \sin \frac{\beta h \partial}{2} \cos \beta y \partial - \cos \frac{\beta h \partial}{2} y \sin \beta y \partial \right) \partial^2 \chi_2 \\ \tau_{xy} &= -\beta^2 \left(\sin \frac{\beta h \partial}{2} y \cos \beta y \partial - \frac{h}{2} \cos \frac{\beta h \partial}{2} \sin \beta y \partial \right) \partial^2 \chi_1 + \\ &+ \left[\left(\cos \frac{\beta h \partial}{2} + \frac{\beta h \partial}{2} \sin \frac{\beta h \partial}{2} \right) \sin \beta y \partial + \cos \frac{\beta h \partial}{2} \beta y \partial \cos \beta y \partial \right] \partial \chi_2\end{aligned}\quad (2.9)$$

Отсюда при $\beta = 1$ получаем распределение напряжений в изотропной полосе ($s_1 = s_2 = 1$). Путем интегрирования по ширине полосы легко убедиться, что напряжения в каждом поперечном сечении приведутся к осевой силе, зависящей только от χ_2 , т. е. от заданных касательных усилий.

3. Кососимметричное распределение усилий. При кососимметричном распределении внешних усилий (фиг. 2) должны быть выполнены граничные условия

$$\sigma_y = \pm q(x), \quad \tau_{xy} = t(x) \quad \text{при } y = \pm \frac{h}{2} \quad (3.1)$$

Полагая $f_1 = f_2 = 0$, получаем для f_1^* , f_2^* систему (при $s_1 \neq s_2$)

$$\begin{aligned}\partial \left(\sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot f_1^* + \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot f_2^* \right) &= q \\ \partial \left(s_1 \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot f_1^* + s_2 \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot f_2^* \right) &= -t\end{aligned}\quad (3.2)$$

Вводим функции напряжений ψ_1 , ψ_2 , полагая

$$f_1^* = s_2 \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot \psi_1 + \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cdot \psi_2, \quad f_2^* = -s_1 \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot \psi_1 - \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cdot \psi_2 \quad (3.3)$$

и получаем для них уравнения

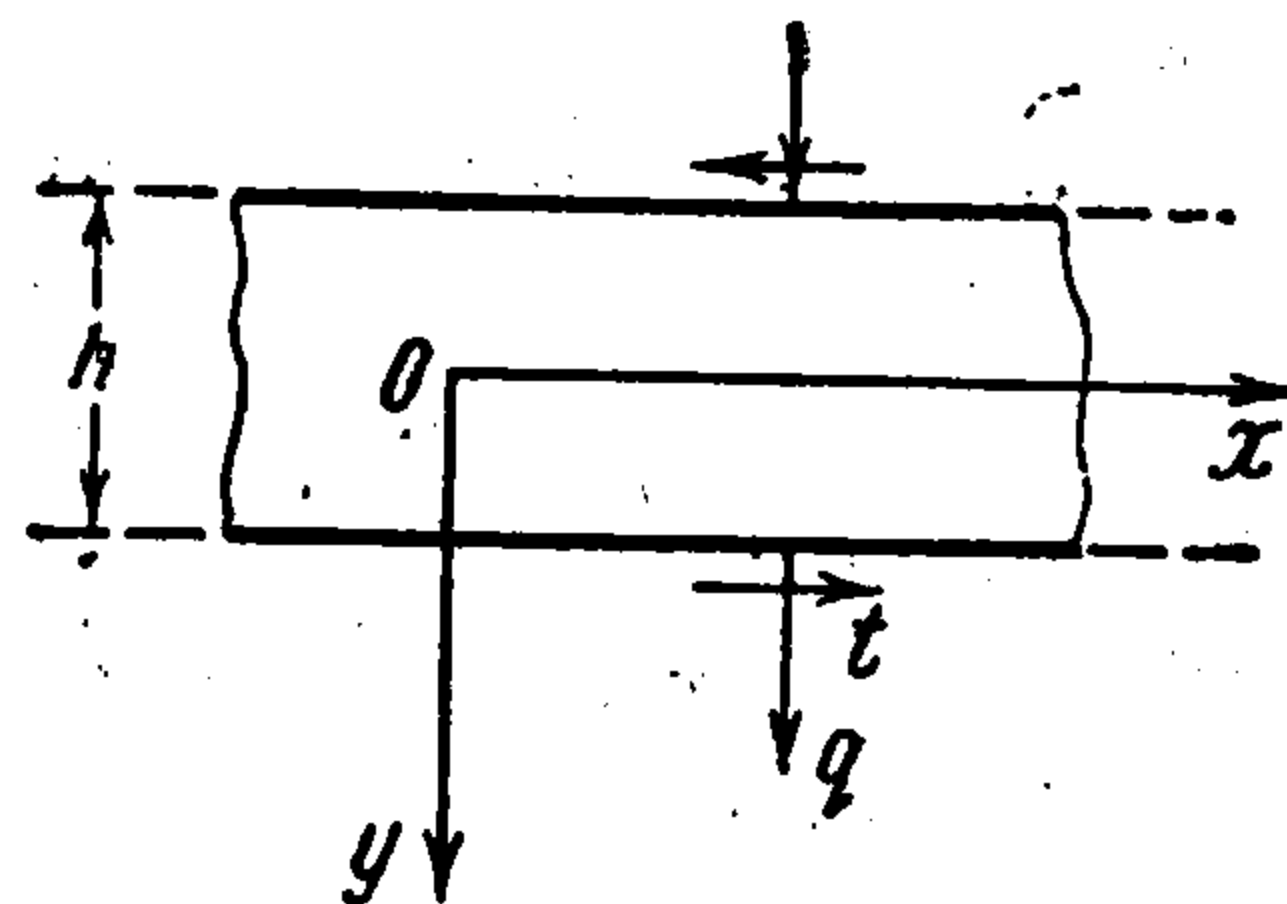
$$Q^*(\partial \psi_1) = q, \quad Q^*(\partial \psi_2) = t \quad (3.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}Q^* &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_2 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cos \frac{s_2 h \partial}{2} - s_1 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \right) = \\ &= 0.5 \left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \sin (s_1 - s_2) \frac{h \partial}{2} - \sin (s_1 + s_2) \frac{h \partial}{2} \right]\end{aligned}\quad (3.5)$$

Напряжения определятся по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(s_1 \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \sin s_1 y \partial - s_2 \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \sin s_2 y \partial \right) \partial \psi_1 - \\ &- \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_1^2 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \sin s_1 y \partial - s_2^2 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \sin s_2 y \partial \right) \partial \psi_2 \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_2 \cos \frac{s_2 h \partial}{2} \sin s_1 y \partial - s_1 \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \sin s_2 y \partial \right) \partial \psi_1 + \\ &+ \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\sin \frac{s_2 h \partial}{2} \sin s_1 y \partial - \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \sin s_2 y \partial \right) \partial \psi_2 \\ \tau_{xy} &= -\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\cos \frac{s_2 h \partial}{2} \cos s_1 y \partial - \cos \frac{s_1 h \partial}{2} \cos s_2 y \partial \right) \partial \psi_1 - \\ &- \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_1 \sin \frac{s_2 h \partial}{2} \cos s_1 y \partial - s_2 \sin \frac{s_1 h \partial}{2} \cos s_2 y \partial \right) \partial \psi_2\end{aligned}\quad (3.6)$$



Фиг. 2

В случае (3)

$$Q^* = 0.5 \left(\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha h \delta - \sin \beta h \delta \right) \quad (3.7)$$

При $s_1 = s_2 = \beta$

$$Q^* = 0.5 (\beta h \delta - \sin \beta h \delta) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\beta^2 \left[\left(\frac{\beta h \delta}{2} \sin \frac{\beta h \delta}{2} + \cos \frac{\beta h \delta}{2} \right) \sin \beta y \delta + \cos \frac{\beta h \delta}{2} \beta y \delta \cos \beta y \delta \right] \partial \psi_1 - \\ & - \beta \left[\left(2 \sin \frac{\beta h \delta}{2} - \frac{\beta h \delta}{2} \cos \frac{\beta h \delta}{2} \right) \sin \beta y \delta + \sin \frac{\beta h \delta}{2} \beta y \delta \cos \beta y \delta \right] \partial \psi_2 \\ \sigma_y = & \left[\left(\frac{\beta h \delta}{2} \sin \frac{\beta h \delta}{2} - \cos \frac{\beta h \delta}{2} \right) \sin \beta y \delta + \cos \frac{\beta h \delta}{2} \beta y \delta \sin \beta y \delta \right] \partial \psi_1 + \\ & + \left(\sin \frac{\beta h \delta}{2} y \cos \beta y \delta - \frac{h}{2} \cos \frac{\beta h \delta}{2} \sin \beta y \delta \right) \partial^2 \psi_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \beta^2 \left(\cos \frac{\beta h \delta}{2} y \sin \beta y \delta - \frac{h}{2} \sin \frac{\beta h \delta}{2} \cos \beta y \delta \right) \partial^2 \psi_1 + \\ & + \left[\left(\frac{\beta h \delta}{2} \cos \frac{\beta h \delta}{2} - \sin \frac{\beta h \delta}{2} \right) \cos \beta y \delta + \sin \frac{\beta h \delta}{2} \beta y \delta \sin \beta y \delta \right] \partial \psi_2 \end{aligned}$$

В поперечном сечении напряжения (3.6) и (3.9) приведутся, вообще говоря, к изгибающему моменту и поперечной силе, действующей в плоскости сечения.

Заметим, что ход решения задачи для неортотропной полосы остается по существу тем же самым, что и для ортотропной полосы, но только нужно исходить из более сложного выражения для функции напряжений (1.6). Из граничных условий получается система четырех уравнений для функций ψ_1 , ψ_2 , Φ_1 , Φ_2 , которую в общем случае не удастся разбить на две системы, подобные (2.2) и (3.2).

4. Напряжение в полосе конечной длины. В случае полосы конечной длины l необходимо удовлетворить не только условиям на сторонах $y = \pm h/2$, но также и условиям на торцах. Для этого нужно использовать так называемые однородные решения, соответствующие случаю, когда стороны $y = \pm h/2$ свободны от нагрузки ($p = \tau = 0$, $q = t = 0$). Каждое из уравнений

$$Q(\partial \chi_k) = 0, \quad Q^*(\partial \psi_k) = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (4.1)$$

имеет бесчисленное множество решений, но мы рассмотрим лишь простейшие однородные решения, которые получатся, если в разложениях операторов сохранить только низшие степени δ .

А) Симметричное распределение. Отбрасывая в выражении Q степени δ выше первой, получим уравнения

$$\partial(\partial \chi_1) = 0, \quad \partial(\partial \chi_2) = 0 \quad (4.2)$$

Отсюда

$$\partial \chi_1 = C_1, \quad \partial \chi_2 = C_2 \quad (4.3)$$

По формулам (2.6) находим напряжения, соответствующие растяжению или сжатию нормальными усилиями, распределенными равномерно по торцам

$$\sigma_x = A_0, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (A_0 = -(s_1 + s_2) C_2) \quad (4.4)$$

Б) Кососимметричное распределение. В разложении оператора Q^* низшей степенью δ будет третья. Отбросив все степени δ выше третьей, получим уравнения

$$\partial^3(\partial \psi_1) = 0, \quad \partial^3(\partial \psi_2) = 0 \quad (4.5)$$

Отсюда

$$\partial \psi_1 = C_1 x^2 + D_1 x + E_1, \quad \partial \psi_2 = C_2 x^2 + D_2 x + E_2 \quad (4.6)$$

Этим функциям соответствуют напряжения при изгибе моментом и поперечной силой

$$\begin{aligned} \sigma_x = & (A_1 x + B_1) y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{A_1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\ (A_1 = & -2s_1 s_2 (s_1 + s_2) C_1, \quad B_1 = -s_1 s_2 (s_1 + s_2) (D_1 + h C_2)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Решение задачи для полосы конечной длины получим, добавляя к решению для бесконечной полосы однородные решения (4.4) и (4.7). Три постоянные A_0, A_1, B_1 всегда можно подобрать так, чтобы на торцах были удовлетворены нужные условия (интегральные или осредненные).

Ход решения задачи о полосе проиллюстрируем на двух примерах.

5. Нагрузка, распределенная по закону полинома. Уравнения (2.4) и (3.4) в развернутом виде запишутся следующим образом:

$$(\partial + \alpha_3 \partial^3 + \alpha_5 \partial^5 + \dots) \partial \chi_k = \frac{2p_k}{(s_1 + s_2)h} \quad (5.1)$$

$$(\beta_3 \partial^3 + \beta_5 \partial^5 + \dots) \partial \psi_k = \frac{2q_k}{(s_1 + s_2)h} \quad (5.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1 &= p, & \alpha_{2i+1} &= (-1)^i \frac{(s_1 + s_2)^{2i} + (s_1 - s_2)^{2i}}{2^{2i+1} (2i + 1)!} h^{2i} \\ p_2 &= \tau, & & \\ q_1 &= q, & & \\ q_2 &= t, & \beta_{2i+1} &= (-1)^{i-1} \frac{(s_1 + s_2)^{2i} - (s_1 - s_2)^{2i}}{2^{2i+1} (2i + 1)!} h^{2i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

Если p_k и q_k заданы в виде целых полиномов от x степени n (где n — целое положительное число), то, как легко видеть, $\partial \chi_k$ будет полиномом степени $n + 1$, а $\partial \psi_k$ — полиномом степени $n + 3$. Отыскание неизвестных коэффициентов функций $\partial \chi_k, \partial \psi_k$ не представит большого труда; уравнения для них получим, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левых и правых частях (5.1) и (5.2).

Пусть, например, дана полоса с одним заделанным и другим свободным концом (консоль), нагруженная по одной из длинных сторон нормальными усилиями, распределенными по закону кубической параболы $q_3 x^3: l^3$

(фиг. 3.) Напряжения складываются из напряжений от симметричной нагрузки

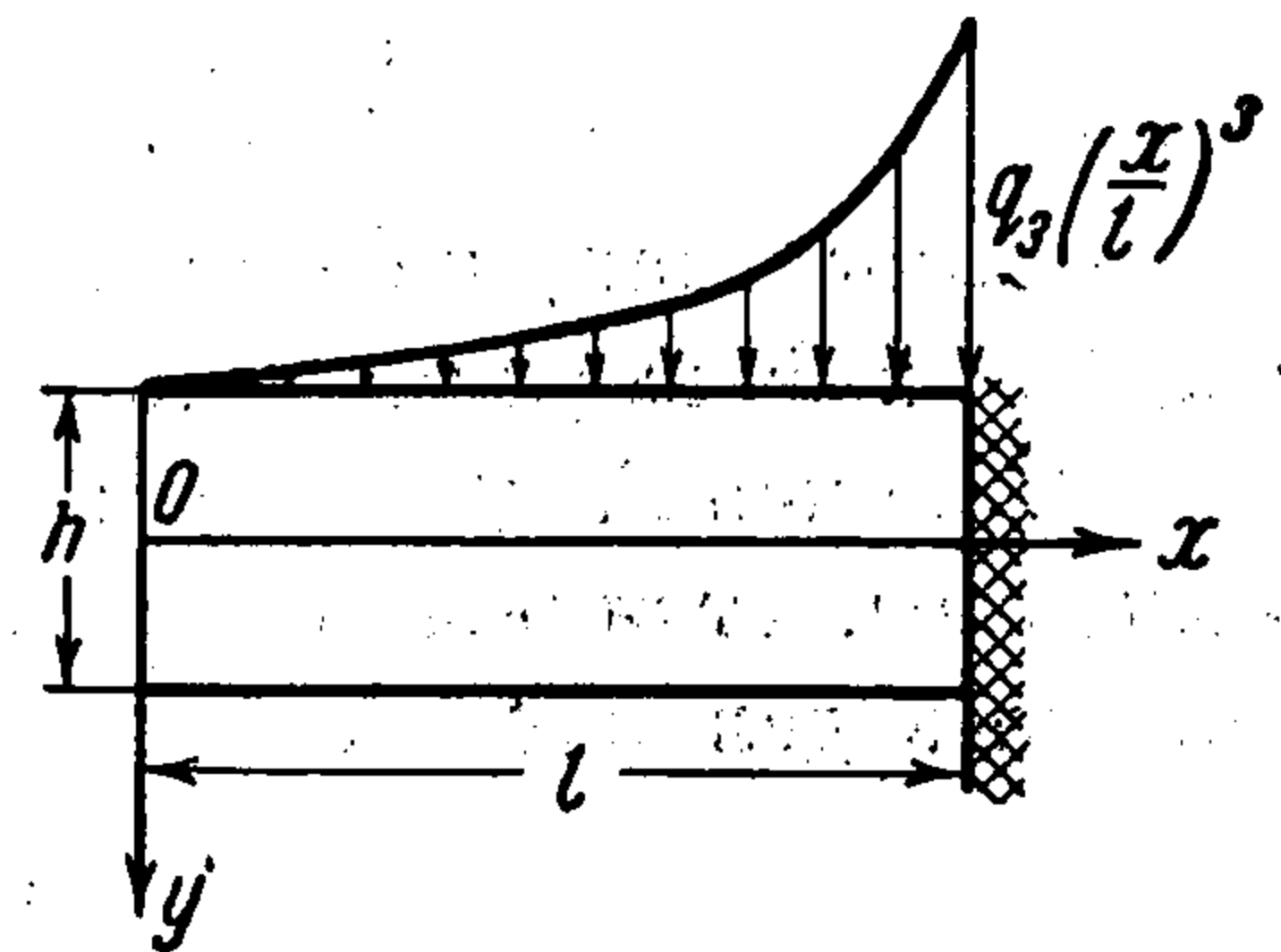
$$p = -\frac{q_3}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^3, \quad \tau = 0 \quad (5.4)$$

и от кососимметричной

$$q = \frac{q_3}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^3, \quad t = 0 \quad (5.5)$$

Первые найдутся при помощи функций

$$\partial \chi_1 = \frac{q_3}{4(s_1 + s_2)hl^3} (-x^4 + 12\alpha_3 x^2), \quad \partial \chi_2 = 0 \quad (5.6)$$



Фиг. 3

Подставляя эти значения в формулы (2.6), нужно в последних разложить синусы и косинусы в ряды и после перемножения отбросить все степени ∂ выше четвертой (так как $\partial \chi_1$ — полином четвертой степени). Получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= k^2 (s_1 + s_2) \frac{h}{4} \left(\frac{h^2}{12} - y^2\right) \partial^3 (\partial \chi_1) \\ \sigma_y &= 0.5 (s_1 + s_2) \left[h \partial (\partial \chi_1) - \frac{mh^3}{24} \partial^3 (\partial \chi_1) \right] \\ \tau_{xy} &= -k^2 (s_1 + s_2) \frac{h^2}{12} \left(\frac{h^2 y}{4} - y^3\right) \partial^4 (\partial \chi_1) \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} k &= s_1 s_2 = \sqrt{\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}} \\ m &= s_1^2 + s_2^2 = \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{\beta_{11}} \end{aligned} \right) \quad (5.7)$$

Окончательные формулы для напряжений от симметричной нагрузки (5.4) имеют вид:

$$\sigma_x = \frac{3q_3}{2l^3} k^2 \left(y^2 - \frac{h^2}{12}\right) x, \quad \sigma_y = -\frac{q_3 x^3}{2l^3}, \quad \tau_{xy} = \frac{q_3 k^2}{2l^3} \left(\frac{h^2 y}{4} - y^3\right) \quad (5.8)$$

На свободном конце $x=0$ напряжение σ_x обращается в нуль, а τ_{xy} образует уравновешенную систему касательных усилий, так что нужные условия оказываются выполненными.

Для функций, определяющих напряжения от кососимметричной нагрузки (5.5), находим выражения

$$\partial\psi_1 = \frac{q_3}{120(s_1 + s_2)hl^3\beta_3} \left(x^6 - 30 \frac{\beta_5}{\beta_3} x^4 \right) = \frac{q_3}{10(s_1 + s_2)kh^3l^3} (x^6 + 0.75mh^2x^4), \quad \partial\psi_2 = 0 \quad (5.9)$$

Приводим окончательные формулы для напряжений, полученные из (3.6)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3q_3}{2h^3l^3} \left\{ -\frac{2}{5}yx^5 + \frac{m}{15}(20y^3 - 3h^2y)x^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{40}[5k^2h^4y + 8(m^2 - 5k^2)h^2y^3 + 16(m^2 - k^2)y^5]x \right\} \\ \sigma_y &= \frac{3q_3}{2h^3l^3} \left[\left(h^2y - \frac{4}{3}y^3 \right) x^3 + \frac{m}{40}(h^4y - 8h^2y^3 + 16y^5)x \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{3q_3}{2h^3l^3} \left\{ \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) x^4 - \frac{m}{80}(h^4 - 24h^2y^2 + 80y^4)x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{960}[(2m^2 + k^2)h^6 - 60k^2h^4y^2 + 48(5k^2 - m^2)h^2y^4 + 64(m^2 - k^2)y^6] \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

На свободном конце $\sigma_x = 0$, а касательное напряжение приводится к силе, величина которой, отнесенная к единице толщины полосы, равна

$$P = \frac{q_3h^4}{11200l^3} (27m^2 - 20k^2) \quad (5.11)$$

Чтобы снять эту «лишнюю» силу, нужно добавить распределение напряжений вида (4.7)

$$\sigma_x = \frac{12P}{h^3}xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{6P}{h^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.12)$$

Полные напряжения в консоли получим путем наложения напряжений, определяемых формулами (5.8), (5.10) и (5.12).

Выражений для перемещений приводить не будем. Заметим только, что произвольные постоянные w, u_0, v_0 из формул (1.12) найдутся из дополнительных условий на заделанном конце

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = l, y = 0 \quad (5.13)$$

6. Нагрузка, заданная в виде ряда Фурье. Пусть ортотропная полоса длиной $2l$ нагружена по длинным сторонам усилиями, представленными в виде рядов Фурье. Любая задача этого рода может быть решена при помощи функции Эри в виде ряда с добавлением полиномиальных членов (см., например, [1], стр. 73—75). В частности, решение задачи о полосе со свободными торцами, нагруженной симметричными усилиями, дано в работе [5].

Покажем, как просто получаются решения этих задач при помощи изложенного общего метода. Достаточно рассмотреть частный случай, когда концы свободны, а нагрузка является нормальной, симметричной и распределена по обеим сторонам $y = \pm h/2$ по закону косинуса, т. е.

$$p = p_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \tau = q = t = 0 \quad (6.1)$$

Здесь n — любое вещественное число, не равное нулю; начало координат помещено в произвольной точке оси полосы.

В этом случае $\chi_2 = 0$, а χ_1 определится из уравнения

$$Q(\partial\chi_1) = p_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (6.2)$$

Укажем предварительно несколько формул, облегчающих отыскание решения уравнения (6.2) и соответствующих напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} \sin \alpha \partial . e &= \sin \alpha a e^{ax}, & \cos \alpha \partial . e^{ax} &= \cos \alpha a e^{ax} \\ \sin \alpha \partial \cos \beta \partial . \sin ax &= \operatorname{sh} \alpha a \operatorname{ch} \beta a \cos ax \\ \cos \alpha \partial \cos \beta \partial . \sin ax &= \operatorname{ch} \alpha a \operatorname{ch} \beta a \sin ax \\ \sin \alpha \partial \sin \beta \partial . \sin ax &= -\operatorname{sh} \alpha a \operatorname{sh} \beta a \sin ax \\ \sin \alpha \partial \cos \beta \partial . \cos ax &= -\operatorname{sh} \alpha a \operatorname{ch} \beta a \sin ax \\ \cos \alpha \partial \cos \beta \partial . \cos ax &= \operatorname{ch} \alpha a \operatorname{ch} \beta a \cos ax \\ \sin \alpha \partial \sin \beta \partial . \cos ax &= -\operatorname{sh} \alpha a \operatorname{sh} \beta a \cos ax \end{aligned} \quad (6.3)$$

Под α , β и a всюду подразумеваются любые постоянные числа, не равные нулю, вещественные или комплексные, или линейные функции y . Вывод этих формул элементарен: первые две получаем, раскладывая операторы в виде синуса и косинуса в ряды по степеням ∂ , остальные — путем замены произведений тригонометрических функций суммами или разностями с последующим разложением операторов в ряды.

Используя (6.3), находим для случая $s_1 \neq s_2$

$$\partial \chi_1 = A p_n (s_1 - s_2) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (6.4)$$

где

$$A = \frac{1}{s_1 \operatorname{sh} s_1 \gamma \operatorname{ch} s_2 \gamma - s_2 \operatorname{sh} s_2 \gamma \operatorname{ch} s_1 \gamma}, \quad \gamma = \frac{n\pi h}{2l} \quad (6.5)$$

Подставляя в (2.6) значение $\partial \chi_2 = 0$ и выражение для $\partial \chi_1$ и учитывая (6.3), получим окончательные формулы для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A k p_n \left(s_1 \operatorname{sh} s_2 \gamma \operatorname{ch} \frac{s_1 n \pi y}{l} - s_2 \operatorname{sh} s_1 \gamma \operatorname{ch} \frac{s_2 n \pi y}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l} \\ \sigma_y &= -A p_n \left(s_2 \operatorname{sh} s_2 \gamma \operatorname{ch} \frac{s_1 n \pi y}{l} - s_1 \operatorname{sh} s_1 \gamma \operatorname{ch} \frac{s_2 n \pi y}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l} \\ \tau_{xy} &= A k p_n \left(\operatorname{sh} s_2 \gamma \operatorname{sh} \frac{s_1 n \pi y}{l} - \operatorname{sh} s_1 \gamma \operatorname{sh} \frac{s_2 n \pi y}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (6.6)$$

На концах полосы, равно как и в любом поперечном сечении, напряжения создают уравновешенную систему усилий (главный вектор и главный момент равны нулю), а следовательно нужные условия на свободных торцах выполнены (как иногда говорят, «с точностью до принципа Сен-Венана»).

Столь же просто находятся напряжения и в случаях, когда нагрузки распределены по закону показательных или гиперболических функций.

Поступила 20 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Изд. 2-е, М., ГИТТЛ, 1957.
2. Курдюмов А. А. О решении в полиномах плоской задачи теории упругости для прямоугольной анизотропной полосы. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
3. Воробьев Л. Н. Об одном решении плоской задачи в полиномах для прямоугольной ортотропной пластинки. ДАН УССР, 1954, № 5.
4. Захаров К. В. Некоторые задачи изгиба ортотропных балок. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 178.
5. Захаров К. В. Деформация ортотропной полосы, симметрично нагруженной распределенными поперечными силами. Научно-технический информационный бюллетень Ленингр. политехн. ин-та, 1959, № 2.
6. Куфарев П. П., Свекло В. А. Определение напряжений в анизотропной полосе. ДАН СССР, 1941, т. 32, № 9.
7. Шепеленко В. Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропной полосы. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 5.
8. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1955.
9. Лехницкий С. Г. Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.