О ВОЗМОЖНОСТИ РАССМОТРЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ В КАЧЕСТВЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

В. Д. Бондарь (Новосибирск)

Показано, что всякое состояние равновесия среды с отличными от нуля напряжениями и деформациями может быть взято за начальное состояние для отсчета конечных деформаций и напряжений при специальном определении массовых сил.

Возьмем наряду с первым начальным и текущим положениями среды промежуточное положение и будем рассматривать его в качестве нового второго начального состояния. Предполагаем, что как в первом, так и во втором начальном положении среда находится в состоянии равновесия, но во втором положении в отличие от первого есть и деформации и напряжения. Текущее положение среды также деформировано и напряженно и отвечает, вообще говоря, состоянию движения. Условимся в дальнейшем все величины, относящиеся к первому начальному, второму начальному и текущему положениям среды снабжать индексами: ноликом, звездочкой и галочкой соответственно.

Обозначим через $\overset{\vee}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\vee}{p}{}^{\alpha\beta}$ компоненты тензора конечной деформации и тензора напряжений, отсчитываемые от первого начального состояния. Отношение компонент тензора напряжений к плотности среды $\rho^{-1}\overset{\vee}{p}{}^{\alpha\beta}=\overset{\vee}{\sigma}{}^{\alpha\beta}$ условимся называть компонентами обобщенного тензора напряжений. В нелинейной механике вместо тензора напряжений предпочтительнее рассматривать обобщенный тензор напряжений, так как известно [1], что для упругих деформаций компоненты последнего обладают потенциалом.

Введем вместо величин $\overset{\vee}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\vee}{\sigma}{}^{\alpha\beta}$ новые тензорные характеристики деформаций и напряжений в среде в текущем положении $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\sigma^{\alpha\beta}$, которые отсчитываются от второго начального положения. Для этого возьмем лагранжеву систему координат ξ^1, ξ^2, ξ^3, вмороженную в среду. Эта система деформируется вместе со средой, поэтому компоненты метрического тензора, связанного с ней, изменяются со временем. Обозначим через t°, t^*, $t^\vee$ моменты времени, отвечающие отмеченным выше положениям среды, через $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{\vee}{g}_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты метрического тензора в сопутствующей лагранжевой системе координат в эти моменты. Тогда деформация среды в промежуточном и текущем положениях, отсчитываемая от первого начального положения, описывается тензорами конечной деформации $\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\vee}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, которые определяются формулами

$$\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{\alpha\beta}-\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}),\qquad \overset{\vee}{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\overset{\vee}{g}_{\alpha\beta}-\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}) \tag{1}$$

Здесь и далее предполагается, что греческий индекс пробегает ряд 1, 2, 3. Деформация же среды в текущем положении, отсчитываемая от второго начального положения, будет характеризоваться новым тензором конечной деформации

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\overset{\vee}{g}_{\alpha\beta}-\overset{*}{g}_{\alpha\beta}) \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) следует, что величины $\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, $\overset{\vee}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ связаны соотношением

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\overset{\vee}{\varepsilon}_{\alpha\beta}-\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta} \tag{3}$$

Пусть $(1/\rho^*)\,p^{*\alpha\beta}=\sigma^{*\alpha\beta}$ — компоненты обобщенного тензора напряжений в промежуточном положении среды с началом отсчета в первом начальном положении. В качестве обобщенного тензора напряжений в текущем положении, отсчитываемого от второго начального состояния и соответствующего тензору деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, можно рассматривать тензор

$$\sigma^{\alpha\beta}=\frac{1}{\rho}p^{\alpha\beta}=\frac{1}{\rho}\overset{\vee}{p}{}^{\alpha\beta}-\frac{1}{p^*}p^{*\alpha\beta}=\overset{\vee}{\sigma}{}^{\alpha\beta}-\sigma^{*\alpha\beta} \tag{4}$$

Характеристики $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\sigma^{\alpha\beta}$ удовлетворяют поставленному условию: во втором начальном положении среды они обращаются в нули.

Выясним теперь, при каких условиях тензор напряжений $p^{\alpha\beta}$ входит в уравнения движения среды так же, как тензор $p^{\vee\alpha\beta}$. Для этого возьмем уравнения движения для текущего положения среды и уравнения равновесия для промежуточного положения в форме [1]

$$\rho \sqrt{g^\vee}\,(\mathbf{F}-\mathbf{a}) + \frac{\partial(\sqrt{g^\vee}\mathbf{p}^\beta)}{\partial\xi^\beta} = 0, \qquad \rho^* \sqrt{g^*}\mathbf{F}^* + \frac{\partial(\sqrt{g^*}\mathbf{p}^{*\beta})}{\partial\xi^\beta} = 0 \tag{5}$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение частицы, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на единицу массы, $\mathbf{p}^\beta$ — внутренняя поверхностная сила, приложенная к площадке с нормалью $\mathbf{n}_\beta$ в момент $t^\vee$, $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{p}^{*\beta}$ — соответствующие величины в момент t^*, кроме того, $g^\vee = |\,\overset{\vee}{g}_{\alpha\beta}\,|$ и $g^* = |\,\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\,|$. В формулах (5) и в дальнейшем считаем, что по дважды повторяющемуся индексу производится суммирование.

Обозначим через $\mathbf{э}_\alpha^*$ и $\mathbf{э}_\alpha^\vee$ векторы ковариантных базисов лагранжевой системы координат в моменты t^* и $t^\vee$. Изменения этих векторов при переходе от одной частицы среды к другой характеризуются равенствами [2]

$$\frac{\partial \mathbf{э}_\sigma^*}{\partial\xi^\beta} = \Gamma^{*\,\gamma}_{\sigma\beta}\mathbf{э}_\gamma^*, \qquad \frac{\partial \mathbf{э}_\sigma^\vee}{\partial\xi^\beta} = \Gamma^{\vee\,\gamma}_{\sigma\beta}\mathbf{э}_\gamma^* \tag{6}$$

в которых $\Gamma^{*\,\gamma}_{\sigma\beta}$ и $\Gamma^{\vee\,\gamma}_{\sigma\beta}$ — символы Кристоффеля, определяемые формулами (7)

$$\Gamma^{*\,\gamma}_{\sigma\beta} = \frac{1}{2} g^{*\gamma\alpha}\left(\frac{\partial g^*_{\alpha\sigma}}{\partial\xi^\beta} + \frac{\partial g^*_{\alpha\beta}}{\partial\xi^\sigma} - \frac{\partial g^*_{\sigma\beta}}{\partial\xi^\alpha}\right), \qquad \Gamma^{\vee\,\gamma}_{\sigma\beta} = \frac{1}{2} g^{\vee\gamma\alpha}\left(\frac{\partial g^\vee_{\alpha\sigma}}{\partial\xi^\beta} + \frac{\partial g^\vee_{\alpha\beta}}{\partial\xi^\sigma} - \frac{\partial g^\vee_{\sigma\beta}}{\partial\xi^\alpha}\right)$$

где $g^{*\gamma\alpha}$, $g^{\vee\gamma\alpha}$ — контравариантные компоненты метрических тензоров $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$, $g^\vee_{\alpha\beta}$.

Если входящие в уравнения (5) векторы представить в виде

$$\mathbf{F} = F^{\vee\alpha}\mathbf{э}^\vee_\alpha, \qquad \mathbf{a} = a^{\vee\alpha}\mathbf{э}^\vee_\alpha, \qquad \mathbf{p}^\beta = p^{\vee\alpha\beta}\mathbf{э}^\vee_\alpha, \qquad \mathbf{F}^* = F^{*\alpha}\mathbf{э}_\alpha^*, \qquad \mathbf{p}^* = p^{*\alpha\beta}\mathbf{э}_\alpha^* \tag{8}$$

и произвести указанное дифференцирование, используя равенства (6), то легко видеть, что каждое из уравнений (5) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\rho \sqrt{g^\vee}\,(F^{\vee\alpha} - a^{\vee\alpha}) + \frac{\partial(\sqrt{g^\vee}p^{\vee\alpha\beta})}{\partial\xi^\beta} + \sqrt{g^\vee}\,p^{\vee\sigma\beta}\,\Gamma^{\vee\,\alpha}_{\sigma\beta} = 0 \tag{9}$$

$$\rho^* \sqrt{g^*}F^{*\alpha} + \frac{\partial(\sqrt{g^*}p^{*\alpha\beta})}{\partial\xi^\beta} + \sqrt{g^*}p^{*\sigma\beta}\Gamma^{*\,\alpha}_{\sigma\beta} = 0 \tag{10}$$

Составляя разность уравнений (9) и (10) и пользуясь формулами (4) и уравнением неразрывности

$$\rho\sqrt{g^\vee} = \rho^*\sqrt{g^*} \tag{11}$$

получим уравнения

$$\rho\sqrt{g^\vee}\,(R^\alpha - a^{\vee\alpha}) + \frac{\partial(\sqrt{g^\vee}p^{\alpha\beta})}{\partial\xi^\beta} + \sqrt{g^\vee}p^{\sigma\beta}\Gamma^{\vee\,\alpha}_{\sigma\beta} = 0 \tag{12}$$

где

$$R^\alpha = F^{\vee\alpha} - F^{*\alpha} + \sigma^{*\sigma\beta}\,(\Gamma^{\vee\,\alpha}_{\sigma\beta} - \Gamma^{*\,\alpha}_{\sigma\beta}) \tag{13}$$

Уравнения (12) аналогичны уравнениям движения среды (9), но содержат новый тензор напряжений и новую массовую силу.

Итак, если вместо тензора напряжений $p^{\vee\alpha\beta}$ пользоваться тензором напряжений $p^{\alpha\beta}$, определенным формулами (4), то уравнения движения среды сохраняют свой вид, если массовую силу определять по формулам (13). Таким образом, при указанной замене массовая сила обращается в нуль во втором начальном положении. В текущем положении массовая сила зависит, вообще говоря, от внутренних напряжений во втором начальном состоянии и от характера последующего деформирования.

Выразим массовую силу через характеристики перемещения среды из второго начального состояния в текущее состояние. Для этого преобразуем разность $\Gamma^{\vee\alpha}_{\sigma\beta} - \Gamma^{*\alpha}_{\sigma\beta}$ в выражении силы (13). Разложения векторов одного из базисов $\text{э}_\alpha{}^*$, $\text{э}^\vee{}_\alpha$ по векторам другого базиса имеют вид

$$\text{э}^\vee{}_\sigma = c^{*\omega}_{\sigma}\text{э}_\omega{}^*, \qquad \text{э}_\sigma{}^* = c^{\vee\omega}_{\sigma}\text{э}^\vee{}_\omega \tag{14}$$

Отсюда видно, что для коэффициентов разложений справедливы соотношения

$$c^{\vee\alpha}_{\omega}c^{*\omega}_{\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma, \qquad c^{\vee\alpha}_{\omega}c^{*\omega}_{\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma \tag{15}$$

Тензоры с компонентами $c^{*\omega}_{\sigma}$ и $c^{\vee\omega}_{\sigma}$ характеризуют произвольное перемещение среды из второго начального положения в текущее положение.

Из взаимной однозначности преобразований (14) следует, что

$$|c^{*\omega}_{\sigma}| \neq 0, \qquad |c^{\vee\omega}_{\sigma}| \neq 0 \tag{16}$$

Величины $c^{*\omega}_{\sigma}$ и $c^{\vee\omega}_{\sigma}$ выражаются через компоненты вектора соответствующего перемещения

$$\mathbf{w} = w^{*\alpha}\text{э}^*{}_\alpha = w^*{}_\beta\text{э}^{*\beta} = w^{\vee\alpha}\text{э}^\vee{}_\alpha = w^\vee{}_\beta\text{э}^{\vee\beta}$$

где $\text{э}^{*\beta}$ и $\text{э}^{\vee\beta}$ — векторы контравариантных базисов в моменты t^* и $t^\vee$, формулами [2]

$$c^{*\omega}_{\sigma} = \delta^\omega{}_\sigma + \nabla^*{}_\sigma w^{*\omega}, \qquad c^{\vee\omega}_{\sigma} = \delta^\omega{}_\sigma - \nabla^\vee{}_\sigma w^{\vee\omega} \tag{17}$$

где

$$\nabla^*{}_\sigma w^{*\omega} = \frac{\partial w^{*\omega}}{\partial \xi^\sigma} + w^{*\lambda}\Gamma^{*\omega}_{\lambda\sigma}, \qquad \nabla^\vee{}_\sigma w^{\vee\omega} = \frac{\partial w^{\vee\omega}}{\partial \xi^\sigma} + w^{\vee\lambda}\Gamma^{\vee\omega}_{\lambda\sigma} \tag{18}$$

Формулы (6) и (14) приводят к соотношениям

$$\frac{\partial c^{*\omega}_{\sigma}}{\partial \xi^\beta} + c^{*\gamma}_{\sigma}\Gamma^{*\omega}_{\gamma\beta} = \Gamma^{\vee\gamma}_{\sigma\beta}c^{*\omega}_{\gamma}, \qquad \frac{\partial c^{\vee\omega}_{\sigma}}{\partial \xi^\beta} + c^{\vee\gamma}_{\sigma}\Gamma^{\vee\omega}_{\gamma\beta} = \Gamma^{*\gamma}_{\sigma\beta}c^{\vee\omega}_{\gamma}$$

которым при помощи равенств

$$\nabla^*{}_\beta c^{*\omega}_{\sigma} = \frac{\partial c^{*\omega}_{\sigma}}{\partial \xi^\beta} + c^{*\gamma}_{\sigma}\Gamma^{*\omega}_{\gamma\beta} - c^{*\omega}_{\gamma}\Gamma^{*\gamma}_{\sigma\beta}, \qquad \nabla^\vee{}_\beta c^{\vee\omega}_{\sigma} = \frac{\partial c^{\vee\omega}_{\sigma}}{\partial \xi^\beta} + c^{\vee\gamma}_{\sigma}\Gamma^{\vee\omega}_{\gamma\beta} - c^{\vee\omega}_{\gamma}\Gamma^{\vee\gamma}_{\sigma\beta}$$

и формул (15), (17) можно придать вид

$$\Gamma^{\vee\alpha}_{\sigma\beta} - \Gamma^{*\alpha}_{\sigma\beta} = c^{\vee\alpha}_{\omega}\nabla^*{}_\beta c^{*\omega}_{\sigma} = (\delta^\alpha{}_\omega - \nabla^\vee{}_\omega w^{\vee\alpha})\nabla^*{}_\beta\nabla^*{}_\sigma w^{*\omega} \tag{19}$$

или

$$\Gamma^{\vee\alpha}_{\sigma\beta} - \Gamma^{*\alpha}_{\sigma\beta} = -c^{*\alpha}_{\omega}\nabla^\vee{}_\beta c^{\vee\omega}_{\sigma} = (\delta^\alpha{}_\omega + \nabla^*{}_\omega w^{*\alpha})\nabla^\vee{}_\beta\nabla^\vee{}_\sigma w^{\vee\omega} \tag{20}$$

где

$$\nabla^*{}_\beta\nabla^*{}_\sigma w^{*\omega} = \frac{\partial^2 w^{*\omega}}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\sigma} + \frac{\partial w^{*\lambda}}{\partial \xi^\nu}(\delta^\nu_\beta\Gamma^{*\omega}_{\lambda\sigma} + \delta^\nu_\sigma\Gamma^{*\omega}_{\lambda\beta} - \delta^\omega{}_\lambda\Gamma^{*\nu}_{\sigma\beta}) +$$
$$+ w^{*\lambda}\left(\frac{\partial \Gamma^{*\omega}_{\lambda\sigma}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma^{*\tau}_{\lambda\sigma}\Gamma^{*\omega}_{\tau\beta} - \Gamma^{*\omega}_{\lambda\tau}\Gamma^{*\tau}_{\sigma\beta}\right) \tag{21}$$

$$\nabla^\vee{}_\beta\nabla^\vee{}_\sigma w^{\vee\omega} = \frac{\partial^2 w^{\vee\omega}}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\sigma} + \frac{\partial w^{\vee\lambda}}{\partial \xi^{\vee\nu}}(\delta^\nu_\beta\Gamma^{\vee\omega}_{\lambda\sigma} + \delta^\nu_\sigma\Gamma^{\vee\omega}_{\lambda\beta} - \delta^\omega{}_\lambda\Gamma^{\vee\nu}_{\sigma\beta}) +$$
$$+ w^{\vee\lambda}\left(\frac{\partial \Gamma^{\vee\omega}_{\lambda\sigma}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma^{\vee\tau}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\vee\omega}_{\tau\beta} - \Gamma^{\vee\omega}_{\lambda\tau}\Gamma^{\vee\tau}_{\sigma\beta}\right) \tag{22}$$

и, таким образом

$$R^\alpha = F^{\vee\alpha} - F^{*\alpha} + \sigma^{*\sigma\beta}\nabla^*{}_\beta\nabla^*{}_\sigma w^{*\omega}(\delta^\alpha{}_\omega - \nabla^\vee{}_\omega w^{\vee\alpha}) = F^{\vee\alpha} - F^{*\alpha} +$$
$$+ \sigma^{*\sigma\beta}\nabla^\vee{}_\beta\nabla^\vee{}_\sigma w^{\vee\omega}(\delta^\alpha{}_\omega + \nabla^*{}_\omega w^{*\alpha}) \tag{23}$$

Рассмотрим деформацию среды при переходе ее из промежуточного положения в текущее положение. Эта деформация может быть охарактеризована одним из тензоров конечной деформации $\varepsilon^* = \varepsilon_{\alpha\beta}\text{э}^{*\alpha}\text{э}^{*\beta}$ или $\varepsilon^\vee = \varepsilon_{\alpha\beta}\text{э}^{\vee\alpha}\text{э}^{\vee\beta}$. Тензор ε^* отнесен к базису, соответствующему второму начальному состоянию, а тензор $\varepsilon^\vee$ — к базису текущего состояния.

Предположим, что указанная деформация однородна. В качестве условия однородности деформации можно взять постоянство во всех частицах среды тензора ε^* или тензора $\varepsilon^\vee$. Это приводит соответственно к равенствам

$$\nabla^*_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} - \varepsilon_{\omega\beta}\Gamma^{*\,\omega}_{\alpha\gamma} - \varepsilon_{\alpha\omega}\Gamma^{*\,\omega}_{\beta\gamma} = 0 \qquad (24)$$

$$\nabla^\vee_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} - \varepsilon_{\omega\beta}\Gamma^{\vee\,\omega}_{\alpha\gamma} - \varepsilon_{\alpha\omega}\Gamma^{\vee\,\omega}_{\beta\gamma} = 0 \qquad (25)$$

Лагранжева система координат в какой-либо фиксированный момент времени может быть выбрана произвольно. Если взять лагранжеву систему прямоугольной декартовой в момент t^*, то условия (24) примут вид

$$\frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} = 0 \qquad (26)$$

Условия (25) при этом остаются без изменений. Напротив, если считать лагранжеву систему прямоугольной декартовой в момент $t^\vee$, то неизменными останутся условия (24), а вид (26) примут условия (25). Условия (24) и (25) не являются независимыми: выполнение одного из них влечет за собой выполнение другого. Покажем это.

Согласно определению $g^*_{\alpha\beta} = \mathbf{э}^*_\alpha \cdot \mathbf{э}^*_\beta$ и $g^\vee_{\alpha\beta} = \mathbf{э}^\vee_\alpha \cdot \mathbf{э}^\vee_\beta$. Поэтому, если воспользоваться формулами (14), то будем иметь

$$g^\vee_{\alpha\beta} = c^{*\sigma}_{\ \alpha} c^{*\tau}_{\ \beta} g^*_{\sigma\tau}, \qquad g^*_{\alpha\beta} = c^{\vee\sigma}_{\ \alpha} c^{\vee\tau}_{\ \beta} g^\vee_{\sigma\tau}$$

и, следовательно, для компонент $\varepsilon_{\alpha\beta}$ верны выражения

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(c^{*\sigma}_{\ \alpha} c^{*\tau}_{\ \beta} - \delta^\sigma_\alpha \delta^\tau_\beta) g^*_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}(\delta^\sigma_\alpha \delta^\tau_\beta - c^{\vee\sigma}_{\ \alpha} c^{\vee\tau}_{\ \beta}) g^\vee_{\sigma\beta} \qquad (27)$$

Пользуясь формулами (27) и (17), условия (24) и (25) можно записать в виде

$$\nabla^*_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(c^{*\omega}_{\ \beta} \nabla^*_\gamma \nabla^*_\alpha w^*_\omega + c^{*\omega}_{\ \alpha} \nabla^*_\gamma \nabla^*_\beta w^*_\omega) = 0 \qquad (28)$$

$$\nabla^\vee_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(c^{\vee\omega}_{\ \beta} \nabla^\vee_\gamma \nabla^\vee_\alpha w^\vee_\omega + c^{\vee\omega}_{\ \alpha} \nabla^\vee_\gamma \nabla^\vee_\beta w^\vee_\omega) = 0 \qquad (29)$$

Так как движение среды рассматривается в евклидовом пространстве, то компоненты $\nabla^*_\gamma \nabla^*_\alpha w^*_\omega$ и $\nabla^\vee_\gamma \nabla^\vee_\alpha w^\vee_\omega$ симметричны по индексам α и γ. Легко видеть далее, что как (28), так и (29) состоят из 18 независимых равенств. Поэтому равенства (28) и (29) можно рассматривать как две системы, состоящие из 18 однородных алгебраических уравнений каждая относительно 18 неизвестных величин $\nabla^*_\gamma \nabla^*_\alpha w^*_\omega$ в первой системе и такого же числа неизвестных величин $\nabla^\vee_\gamma \nabla^\vee_\alpha w^\vee_\omega$ во второй. Рассмотрим систему (28). Нетрудно убедиться в том, что определитель этой системы

$$D = |c^{*\alpha}_{\ \beta}|^6 \qquad (30)$$

и ввиду (16) отличен от нуля. Следовательно, система (28) имеет только нулевое решение

$$\nabla^*_\alpha \nabla^*_\beta w^*_\gamma = 0 \qquad (31)$$

Легко видеть, что и обратно равенства (31) влекут за собой равенства (28), т. е. все величины $\nabla^*_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta}$ и все величины $\nabla^*_\alpha \nabla^*_\beta w^*_\gamma$ обращаются в нули одновременно.

При помощи аналогичных рассуждений можно установить также, что величины $\nabla^\vee_\alpha \nabla^\vee_\beta w^\vee_\gamma$ обращаются в нули одновременно с величинами $\nabla^\vee_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta}$.

Пусть теперь выполнены условия (24). Как установлено выше, они эквивалентны условиям (31). Отсюда следует, что

$$\nabla^*_\alpha \nabla^*_\beta w^{*\omega} = g^{*\omega\gamma} \nabla^*_\alpha \nabla^*_\beta w^*_\gamma = 0 \qquad (32)$$

На основании равенств

$$c^{*\alpha}_{\ \omega} \nabla^\vee_\beta \nabla^\vee_\sigma w^\omega_\vee = c^{\vee\alpha}_{\ \omega} \nabla^*_\beta \nabla^*_\sigma w^{*\omega} \qquad (33)$$

следующих из выражений (19) и (20), и условий (32), (16) заключаем, что

$$\nabla^{\vee}_{\alpha}\nabla^{\vee}_{\beta}w^{\vee\omega}=0 \tag{34}$$

и следовательно

$$\nabla^{\vee}_{\alpha}\nabla^{\vee}_{\beta}w^{\vee}_{\gamma}=g^{\vee}_{\gamma\omega}\nabla^{\vee}_{\alpha}\nabla^{\vee}_{\beta}w^{\vee\omega}=0 \tag{35}$$

Последние же условия эквивалентны условиям (25).

Таким образом, показано, что условия (25) следуют из условий (24). Подобным способом можно показать, что и обратно условия (24) могут быть получены из условий (25).

Условиями (24) следует пользоваться, когда рассмотрение ведется при помощи характеристик, отнесенных к базису второго начального состояния, а условиями (25) — когда характеристики отнесены к базису текущего состояния.

При однородной деформации компоненты массовой силы (23) ввиду равенств (32) или эквивалентных им равенств (34) имеют вид

$$R^{\alpha}=F^{\vee\alpha}-F^{*\alpha} \tag{36}$$

т. е. массовая сила не зависит от начальных напряжений.

Таким образом, зависимость массовой силы от внутренних начальных напряжений связана с неоднородностью деформации.

Рассмотрим далее условия, при которых допустимо пренебрегать зависимостью массовой силы от внутренних напряжений в случае неоднородной деформации, и условия, при которых эта зависимость существенна.

Если начальные напряжения малы, то в выражении массовой силы (23) можно пренебречь членами с напряжениями. Формула (23) при этом принимает тот же вид (36), что и при однородной деформации.

Будем теперь считать, что начальные напряжения не являются малыми и рассмотрим случаи, когда деформация среды, соответствующая переходу от базиса э^*_{α} к базису $\text{э}^{\vee}_{\alpha}$, является, во-первых, конечной, и, во-вторых, малой деформацией.

В первом случае при конечных деформациях перемещения также конечны, и из формул (23) ясно, что зависимость массовой силы от начальных напряжений необходимо учитывать.

Рассмотрим второй случай. Деформация является малой, если малы компоненты тензора конечной деформации (ε^* или $\varepsilon^{\vee}$) или малы перемещения частиц среды и производные от перемещений по координатам.

Если малы компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}$, то перемещения вообще не малы [3], поэтому, вообще говоря, будут иметь место условия первого случая.

Если же малы как сами перемещения, так и две первые производные от них по координатам, то зависимостью силы от напряжений можно пренебречь. Действительно, в силу формул (21) (или (22)) в этом случае величины $\nabla^{*}_{\beta}\nabla^{*}_{\sigma}w^{*\omega}$ (или $\nabla^{\vee}_{\beta}\nabla^{\vee}_{\sigma}w^{\vee\omega}$) также малы. Поэтому в выражении силы (23) малыми будут все члены, содержащие напряжения. Пренебрегая этими членами, можем определять силу по формулам (36). Легко видеть, что в последнем случае деформация среды мало отличается от однородной деформации.

Таким образом, зависимость массовой силы от начальных напряжений необходимо учитывать как при конечных деформациях, так в общем случае и в рамках геометрически линейной теории. Этой зависимостью можно пренебречь, если малы начальные напряжения или деформация среды близка к однородной деформации.

Рассмотренные выше динамические уравнения (12) справедливы для сплошных сред с произвольными физическими свойствами. Покажем теперь, что для упругой среды новые тензорные характеристики деформаций и напряжений $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\sigma^{\alpha\beta}$, отсчитываемые от второго начального состояния, связаны обычными соотношениями нелинейной теории упругости [1]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \tag{37}$$

Здесь U — внутренняя энергия единицы массы среды, соответствующая новому определению начального состояния, представимая в виде

$$U = U^{\vee}\,(g^{*}_{\sigma\tau} - 2\varepsilon^{*}_{\sigma\tau},\ \varepsilon^{*}_{\sigma\tau} + \varepsilon_{\sigma\tau},\ S^{\vee}) - \sigma^{*\alpha\beta}\,(\varepsilon^{*}_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}) \tag{38}$$

где $U^{\vee}\,(g^{\circ}_{\sigma\tau},\ \varepsilon^{\vee}_{\sigma\tau},\ S^{\vee})$ — внутренняя энергия, определенная для исходного начального состояния без напряжений и деформаций, $S^{\vee}$ — энтропия единицы массы.

Для этого фиксируем начальное и промежуточное положения среды, а текущее положение будем считать способным изменяться. Предположим, что состояние среды определяется следующими параметрами: тензором конечной деформации с компонентами $\varepsilon^{\vee}_{\alpha\beta}$ и энтропией $S^{\vee}$.

Рассмотрим элементарный процесс, соответствующий приращениям $dS^{\vee}$ и $d\varepsilon^{\vee}_{\alpha\beta}$ определяющих параметров. Согласно уравнению притока тепла, записанного для единицы массы среды, имеем

$$dQ^{\vee} = dU^{\vee} - \sigma^{\vee\alpha\beta}\,d\varepsilon^{\vee}_{\alpha\beta} \tag{39}$$

где $dQ^{\vee}$ — внешний приток тепла, а внутренняя энергия есть функция определяющих параметров $\varepsilon^{\vee}_{\sigma\tau}$, $S^{\vee}$.

Так как промежуточное положение фиксировано, величины $\varepsilon^{*}_{\sigma\tau}$ и $\sigma^{*\sigma\tau}$ можно рассматривать как постоянные параметры. Поэтому из (3) имеем

$$d\varepsilon^{\vee}_{\alpha\beta} = d\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{40}$$

Для обратимых процессов

$$dQ^{\vee} = T^{\vee}\,dS^{\vee} \tag{41}$$

где $T^{\vee}$ — абсолютная температура фиксированной частицы среды. Формулы (3), (4) и (39) — (41) приводят к равенству

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\,d\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\partial U}{\partial S^{\vee}}\,dS^{\vee} = T^{\vee}\,dS^{\vee} + \sigma^{\alpha\beta}\,d\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{42}$$

в котором функция U определена формулой (38). Приращения $d\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $dS^{\vee}$ произвольны и независимы, поэтому из соотношения (42) наряду с уравнением для определения температуры следуют уравнения состояния (37). Полученные результаты доказывают высказанное утверждение.

Таким образом, компоненты обобщенного тензора напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ обладают потенциалом.

Рассмотрим далее упруго-пластическую среду. Установим условия, при которых справедливо неравенство

$$(\sigma^{\vee\alpha\beta} - \sigma^{*\alpha\beta})\,d\varepsilon^{p}_{\alpha\beta} \geqslant 0 \tag{43}$$

известное в литературе как постулат Друккера [4].

Рассмотрим три различных состояния равновесия среды: первое начальное состояние B°, второе начальное состояние B^{*} и текущее состояние $B^{\vee}$. Состояние B° характеризуется отсутствием напряжений и деформаций. Состояния B^{*} и $B^{\vee}$ имеют внутренние напряжения и деформации. Примем, что состояние $B^{\vee}$ получено из состояния B^{*} дополнительной деформацией, характеризуемой тензором конечной деформации с компонентами $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

При изучении пластических деформаций полную деформацию рассматривают как сумму упругой и пластической деформаций

$$\varepsilon^{*}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{*e}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{*p}_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon^{\vee}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\vee e}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{\vee p}_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{e}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{p}_{\alpha\beta} \tag{44}$$

где индекс e соответствует упругой деформации, а индекс p — пластической деформации. Свойства среды до и после пластического деформирования вообще различны. Следуя [1], примем, что изменение механических и тепловых свойств среды проявляется за счет остаточных деформаций и может быть охарактеризовано ковариантными компонентами тензора остаточных деформаций $\varepsilon^p_{\alpha\beta}$ и параметрами χ_s $(s=1, \ldots, e)$, которые связаны или с остаточными деформациями, или с процессами нагружения. Величины χ_s зависят от процесса нагружения, вообще говоря, функциональным образом. В связи с вышеизложенным будем считать внутреннюю энергию среды функцией следующих параметров:

$$U = U^{\vee} \left[g^*_{\sigma\tau} - 2(\varepsilon^{*e}_{\sigma\tau} + \varepsilon^{*p}_{\sigma\tau}),\ \varepsilon^{*e}_{\sigma\tau} + \varepsilon^{*p}_{\sigma\tau} + \varepsilon^e_{\sigma\tau} + \varepsilon^p_{\sigma\tau},\ S^{\vee},\ \chi^{\vee}_s,\ k_i\right] - \\ - \sigma^{*\alpha\beta}(\varepsilon^{*e}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{*p}_{\alpha\beta} + \varepsilon^e_{\alpha\beta} + \varepsilon^p_{\alpha\beta}) \tag{45}$$

где k_i $(i = 1, \ldots, m)$ — физические постоянные.

Фиксируем состояния B° и B^* и рассмотрим процесс, соответствующий малым приращениям параметров из состояния $B^{\vee}$. Используя уравнение притока тепла, получим

$$dQ^{\vee} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon^e_{\alpha\beta}} d\varepsilon^e_{\alpha\beta} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon^p_{\alpha\beta}} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} + \frac{\partial U}{\partial S^{\vee}} dS^{\vee} + \frac{\partial U}{\partial \chi^{\vee}_s} d\chi^{\vee}_s - \sigma^{\alpha\beta} d\varepsilon^e_{\alpha\beta} - \sigma^{\alpha\beta} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \tag{46}$$

Равенство (46) справедливо для любого процесса как обратимого, так и необратимого. Рассмотрим вначале обратимый процесс, соответствующий разгрузке из состояния $B^{\vee}$. Тогда

$$d\varepsilon^{\vee p}_{\alpha\beta} = 0, \qquad d\chi^{\vee}_s = 0, \qquad dQ^{\vee} = T^{\vee} dS^{\vee} \tag{47}$$

и из (46) в предположении независимости приращений $d\varepsilon^e_{\alpha\beta}$ и $dS^{\vee}$ следуют уравнения

$$T^{\vee} = \frac{\partial U}{\partial S^{\vee}}, \qquad \sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon^e_{\alpha\beta}} \tag{48}$$

Рассмотрим теперь элементарный процесс, соответствующий пластическому нагружению из состояния $B^{\vee}$. При этом, вообще говоря

$$d\varepsilon^{\vee p}_{\alpha\beta} \neq 0, \qquad d\chi^{\vee}_s \neq 0, \qquad dQ^{\vee} = T^{\vee} dS^{\vee} - dQ^{\vee\prime} \tag{49}$$

где $dQ^{\vee\prime}$ — некомпенсированное тепло. Соотношение (46) при условиях (48) и (49) принимает вид

$$\sigma^{\alpha\beta} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} = dQ^{\vee\prime} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon^p_{\alpha\beta}} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} + \frac{\partial U}{\partial \chi^{\vee}_s} d\chi^{\vee}_s \tag{50}$$

Пусть функция U в положении $B^{\vee}$ имеет минимум по параметрам $\varepsilon^p_{\alpha\beta}$ и $\chi^{\vee}_s$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon^p_{\alpha\beta}} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} + \frac{\partial U}{\partial \chi^{\vee}_s} d\chi^{\vee}_s \geqslant 0 \tag{51}$$

Так как $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\vee\alpha\beta} - \sigma^{*\alpha\beta}$ и $dQ^{\vee\prime} \geqslant 0$, то легко видеть, что из (50) при условии (51) следует неравенство (43).

Таким образом, постулат Друккера следует из законов термодинамики в предположении, что внутренняя энергия среды в рассматриваемом положении имеет минимум по параметрам, характеризующим необратимость процессов.

Поступила 5 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Основы нелинейной механики сплошной среды. Гл. 3, Изд-во МГУ, 1960.
2. Седов Л. И. Основы нелинейной механики сплошной среды. Ч. 1, Изд-во МГУ, 1959.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
4. Drucker D. C. A More Fundamental Approach to Plastic Stress — strain Relations. Proc. First US, Nat. Congr. of Appl. Mech. ASME, 1951.