Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ НА УПРУГУЮ ТОНКУЮ ОБОЛОЧКУ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ

Г. Н. Чернышев

(Москва)

Изучается характер особенностей в окрестности точки приложения сосредоточенных сил и моментов у функций $u, \ldots, T_1, \ldots, H_1$, задающих перемещения усилия и моменты в оболочке. Задача решается в общей постановке (оболочка произвольного очертания) для общих моментных уравнений линейной теории оболочек. Кроме того, для оболочек положительной гауссовой кривизны этот вопрос рассматривается и для уравнений безмоментной теории оболочек. Результаты исследований в данной работе являются обобщением ранее полученных результатов для оболочек частного вида. Например, действие сосредоточенных сил и моментов на сферическую оболочку рассмотрено в статье А. Л. Гольденвейзера [1], на цилиндрическую оболочку — в статье В. М. Даревского [2]. Для оболочек произвольного очертания этот вопрос рассматривался К. Ф. Черных в работе [3]. Однако в ней задача не доводится до конца.

Для решения задачи используются результаты, полученные в области фундаментальных решений дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, сведения о которых полно изложены, например, в трудах И. М. Гельфонда и Г. Е. Шилова [4], Е. Е. Леви [5], Ф. Йона [6], Я. Б. Лопатинского [7] и т. д.

Задача заключается в следующем: выписать в явном виде главные особенности решений u, v, w дифференциальных уравнений равновесия оболочек, представленных в перемещениях u, v, w для случая, когда на оболочку действует сосредоточенная сила или сосредоточенный момент.

Фундаментальным решением дифференциального уравнения $L(\Phi) = 0$ называется решение операторного уравнения $L(\Phi) = \delta(\xi - \xi_0)$, где L — дифференциальный оператор, $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $\xi_0 = \{\xi_{10}, \ldots, \xi_{n0}\}$ — векторы в n-мерном пространстве, δ — символ функции Дирака.

Связь исследуемого вопроса с фундаментальными решениями станет ясна, если напомнить, что сосредоточенную силу обычно рассматривают как предел распределенной нагрузки или как решение дифференциального уравнения, обладающее определенной особенностью. Ниже используется первое определение с некоторыми уточнениями, которые позволяют применять теорию обобщенных функций.

Назовем сосредоточенной силой, приложенной в точке $\xi = 0$, предел последовательности распределенных нагрузок q_ν, удовлетворяющих следующим требованиям.

1°. Каково бы ни было $M > 0$, при $|a| \leqslant M$, $|b| \leqslant M$ величины

$$\left| \int_a^b q_\nu(\xi)\, d\xi \right|$$

ограничены постоянной, не зависящей от a, b, ν (зависящей от M).

2°. При любых a и b, отличных от нуля

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b q_\nu(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & (a<b<0,\ 0<a<b) \\ 1 & (a<0<b) \end{cases}$$

Предел функций q_ν, обладающих такими свойствами, в теории обобщенных функций [4] называют δ-функцией Дирака. Следовательно принятое определение эквивалентно отождествлению δ-функции Дирака, функции, задающей сосредоточенную силу. Последовательность функций q_ν называется δ-образной последовательностью.

Дадим определение сосредоточенного момента. Сосредоточенным моментом называется предел при $\nu\to\infty$ распределенных нагрузок q_ν, которые имеют вид функции, изображенной на фиг. 1.

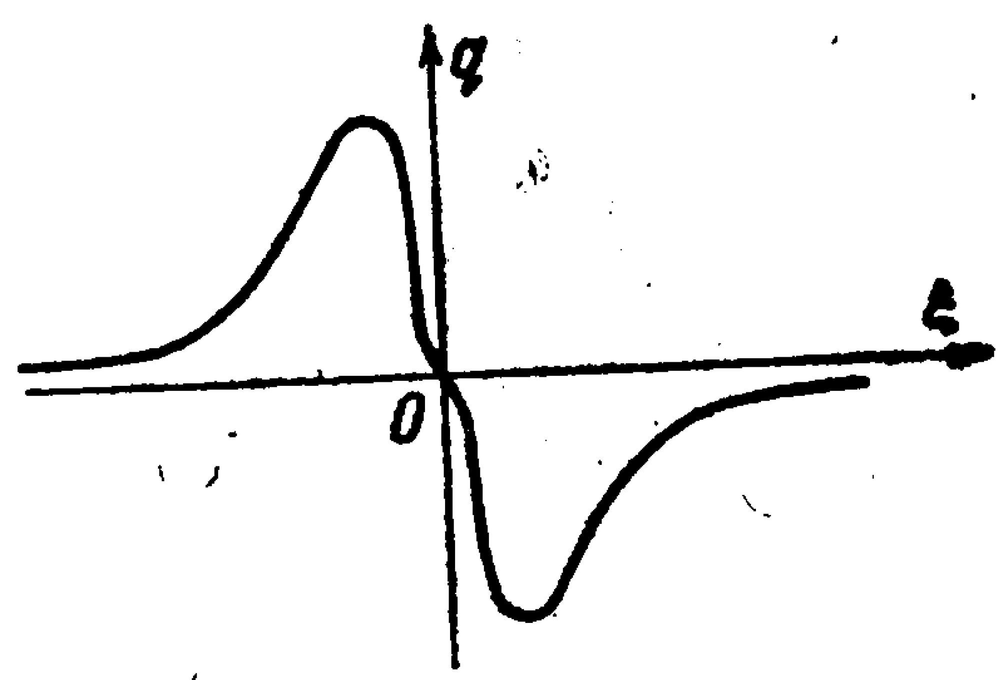
Ветви q_ν справа и слева от $\xi=0$ образуют δ-образные последовательности. Потребуем, чтобы при $\nu\to\infty$ такого рода нагрузка давала постоянный момент интенсивности 1 относительно точки $\xi=0$ и чтобы ее равнодействующая равнялась нулю.

Первое из этих требований приводит к равенству

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b \xi q_\nu(\xi)\,d\xi = 1 \qquad (a<0<b) \tag{1}$$

Из второго требования вытекает следующее равенство

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b q(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (a<0<b) \tag{2}$$



Из (1) интегрированием по частям, учитывая (2), получим

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b d\xi\int_a^\xi q_\nu(\eta)\,d\eta = -1 \tag{3}$$

Покажем при помощи (2), (3), что

$$\lim_{\nu\to\infty} q_\nu = -\delta'(0)$$

Здесь δ' обозначает производную от δ-функции, которая, согласно [4], определяется следующим образом.

Если для функции $f(\xi)$ на пространстве k раз ($k\geqslant 2$) дифференцируемых функций $\varphi(\xi)$ выполняется равенство

$$\int_c^d f(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = -\varphi'(\xi_0) \qquad (c<\xi_0<d)$$

то $f(\xi)=\delta'(\xi-\xi_0)$. Таким образом, надо доказать, что

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b q_\nu(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \varphi'(0) \tag{4}$$

Действительно, интегрируя (4) по частям, получим

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b q_\nu(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \lim_{\nu\to\infty}\varphi\int q_\nu(\xi)\,d\xi\,\Big|_a^b - \lim_{\nu\to\infty}\int_a^b \varphi'(\xi)\,d\xi\int_a^\xi q_\nu(\eta)\,d\eta$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю согласно (2), второе равно $\varphi'(0)$ в силу (3) и произвольности a, b.

Для оболочки, отнесенной к ортогональным координатам (α, β), интенсивность единичной сосредоточенной силы и интенсивности единичных сосредоточенных моментов, направленных по оси α и по β, выражаются соответственно функциями

$$\frac{\delta}{AB}, \qquad \frac{1}{AB^2}\frac{\partial\delta}{\partial\beta}, \qquad -\frac{1}{A^2B}\frac{\partial\delta}{\partial\alpha}$$

где A, B — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. В дальнейшем считается, что поверхность отнесена к ортогональным сопряженным координатам.

Будем исходить из дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, которые представим в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\Delta_{11}u + \Delta_{12}v + \Delta_{13}w = -\frac{1-\sigma^2}{2Eh}X \\
\Delta_{21}u + \Delta_{22}v + \Delta_{23}w = -\frac{1-\sigma^2}{2Eh}Y \\
\Delta_{31}u + \Delta_{32}v + \Delta_{33}w = \frac{1-\sigma^2}{2Eh}Z \\
\Delta_{ik} = \overset{\circ}{\Delta}_{ik} + \Delta'_{ik}
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь u, v, w — перемещения, X, Y, Z — компоненты внешней нагрузки, $\overset{\circ}{\Delta}_{ik}$ — операторы, содержащие производные высшего порядка, Δ'_{ik} — операторы, содержащие оставшиеся члены.

Конкретное содержание операторов Δ_{ik} будем брать, исходя из уравнений равновесия, приведенных в книге А. Л. Гольденвейзера [9]. Тогда матрица из операторов $\overset{\circ}{\Delta}_{ik}$ будет иметь вид

$$\left\|\begin{matrix}
p_1\left(D_{\alpha\alpha}^{\ 2} + \dfrac{1-\sigma}{2}D_{\beta\beta}^{\ 2}\right) & q_1 D_{\alpha\beta}^{\ 2} & \dfrac{h^2}{3R_1}D_\alpha\Delta \\
q_2 D_{\alpha\beta}^{\ 2} & p_2\left(\dfrac{1-\sigma}{2}D_{\alpha\alpha}^{\ 2} + D_{\beta\beta}^{\ 2}\right) & \dfrac{h^2}{3R_2}D_\beta\Delta \\
\dfrac{h^2}{3}\left[\dfrac{1}{R_1}D_\alpha\Delta + \dfrac{1-\sigma}{2}pD_{\alpha\beta\beta}^{\ 3}\right] & \dfrac{h^2}{3}\left[\dfrac{1}{R_2}D_\beta\Delta - \dfrac{1-\sigma}{2}pD_{\alpha\alpha\beta}^{\ 3}\right] & \dfrac{h^2}{3}\Delta^2
\end{matrix}\right\|$$

Здесь

$$p_i = 1 + \frac{h^2}{3R_i^{\ 2}}, \qquad q_i = \frac{1+\sigma}{2} + \frac{h^2}{3R_1R_2} - \frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3R_i^{\ 2}} \qquad (i = 1, 2) \tag{6}$$

$$p = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}, \qquad \Delta = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \qquad p_3 = 1 + \frac{h^2}{3R_1R_2}$$

Кроме того, введены символы дифференцирования

$$D_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \qquad D_{\alpha\alpha}^{\ 2} = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}, \qquad D_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}, \ldots$$

которые используются и в дальнейшем; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны, $2h$ — толщина оболочки. Принимается, что A, B, R_1 R_2 — не равные нулю функции, имеющие производные требуемого порядка и $A, B \neq \infty$.

Обозначим теперь через l_{ik} алгебраическое дополнение члена $\overset{\circ}{\Delta}_{ik}$ матрицы $\|\overset{\circ}{\Delta}_{ik}\|$ и выпишем матрицу $\|l_{ik}\|$

$$\left\| \begin{matrix} \frac{h^2}{3}\left(\frac{1-\sigma}{2}D_{\alpha\alpha}^{\ 2}+D_{\beta\beta}^{\ 2}\right)\Delta^2, & -\frac{h^2}{3}\frac{1+\sigma}{2}D_{\alpha\beta}^{2}\Delta^2, & \frac{h^2}{3}D_\alpha\left[-\frac{1-\sigma}{2R_1}D_{\alpha\alpha}^{\ 2}+r_{13}D_{\beta\beta}^{\ 2}\right]\Delta \\ -\frac{h^2}{3}\frac{1+\sigma}{2}D_{\alpha\beta}^{2}\Delta^2, & \frac{h^2}{3}\left(D_{\alpha\alpha}^{\ 2}+\frac{1-\sigma}{2}D_{\beta\beta}^{\ 2}\right)\Delta^2, & \frac{h^2}{3}D_\beta\left[r_{23}D_{\alpha\alpha}^{\ 2}-\frac{1-\sigma}{2R_2}D_{\beta\beta}^{\ 2}\right]\Delta \\ \frac{h^2}{3}D_\alpha\left[-\frac{1-\sigma}{2R_1}D_{\alpha\alpha}^{\ 2}+r_{31}D_{\beta\beta}^{\ 2}\right]\Delta, & \frac{h^2}{3}D_\beta\left[r_{32}D_{\alpha\alpha}^{\ 2}-\frac{1-\sigma}{2R_2}D_{\beta\beta}^{\ 2}\right]\Delta^2, & \frac{1-\sigma}{2}\Delta^2 \end{matrix} \right\|$$

где

$$r_{13}=\frac{1}{R_2}-\frac{3-\sigma}{2R_1}, \qquad r_{23}=\frac{1}{R_1}-\frac{3-\sigma}{2R_2}$$
$$r_{31}=\frac{1+\sigma}{2R_2}-\frac{1}{R_1}, \qquad r_{32}=\frac{1+\sigma}{2R_1}-\frac{1}{R_2}$$

Система уравнений равновесия является системой эллиптического типа, и эллиптический оператор Λ имеет вид

$$\Lambda=|\overset{\circ}{\Delta}_{ik}|=\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3}(p_2D_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{4}+2p_3D_{\alpha\alpha\beta\beta}^{4}+p_1D_{\beta\beta\beta\beta}^{4})\Delta^2$$

В дальнейшем, пренебрегая величинами $h^2/3R_iR_k\ (i,k=1,2)$ по сравнению с единицей, будем принимать, что

$$\Lambda=\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3}\Delta^4 \tag{7}$$

Исследуем задачу в случае, когда действует сосредоточенная сила, направленная по касательной к координатной оси. Тогда в правых частях системы (5) надо положить $X=\delta/AB$, $Y=Z=0$ и, таким образом, найти решение системы

$$\Delta_{11}u+\Delta_{12}v+\Delta_{13}w=-\frac{1-\sigma^2}{2Eh}\frac{\delta}{AB}$$
$$\Delta_{21}u+\Delta_{22}v+\Delta_{23}w=0$$
$$\Delta_{31}u+\Delta_{32}v+\Delta_{33}w=0$$

Воспользуемся методом Е. Е. Леви [5]; зададим u, v, w в виде

$$\begin{aligned} u&=l_{11}\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)+\iint\limits_{(G)}l_{11}\Phi(\alpha,\beta,\xi,\eta)f_1(\xi,\eta,\alpha_0,\beta_0)\,d\xi d\eta\\ v&=l_{12}\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)+\iint\limits_{(G)}l_{12}\Phi(\alpha,\beta,\xi,\eta)f_2(\xi,\eta,\alpha_0,\beta_0)\,d\xi d\eta\\ w&=l_{13}\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)+\iint\limits_{(G)}l_{13}\Phi(\alpha,\beta,\xi,\eta)f_3(\xi,\eta,\alpha_0,\beta_0)\,d\xi d\eta \end{aligned} \tag{8}$$

где f_i — неизвестные пока функции, $\Phi(\alpha,\beta,\alpha_0,\beta_0)$ — фундаментальное решение уравнения

$$-\frac{2Eh}{1-\sigma^2}AB\Lambda\Phi=\delta(\alpha_0,\beta_0)$$

Леви дает общий способ нахождения Φ. В рассматриваемом случае, когда Λ имеет вид (7), главная часть фундаментального решения ψ, т. е. часть с наивысшей особенностью имеет вид

$$\psi = -\frac{3}{36 \times 64 \times 2\pi h^3 (1+\sigma)} r^6 \ln r^2, \qquad r^2 = A^2 (\alpha - \alpha_0)^2 + B^2 (\beta - \beta_0)^2$$

Функцию Φ представим в виде $\Phi = \psi + \Psi$. Здесь и в дальнейшем под Ψ подразумевается совокупность членов с более низкой особенностью, чем явно записанные выражения. В разных формулах Ψ будет иметь разный смысл. Укажем соотношения, которые понадобятся

$$\Delta\psi = -\frac{\varkappa}{4 \times 64\pi} r^4 \ln r^2 + \Psi, \qquad \Delta^2\psi = -\frac{\varkappa}{32\pi} r^2 \ln r^2 + \Psi$$

$$D_{\alpha\alpha}^2 \Delta\psi = -\frac{\varkappa}{64\pi} r^2 \ln r^2 - \frac{\varkappa}{32\pi} A^2 (\alpha - \alpha_0)^2 \ln r^2 + \Psi$$

$$D_{\alpha\alpha}^2 \Delta^2\psi = -\frac{\varkappa}{8\pi} \ln r^2 + \Psi, \qquad \varkappa = \frac{6}{h^3 (1+\sigma)}$$

Производные от $\Delta\psi$, $\Delta^2\psi$ по β записываются аналогично. Для определения неизвестных функций f_i можно получить систему интегральных уравнений Фредгольма II-го рода, подставляя (8) в исходные уравнения. Однако здесь не будет рассматриваться построение функций f_i, ибо цель исследования состоит в нахождении главных особенностей, которые содержатся в первых слагаемых правых частей равенств (8). Докажем это утверждение.

Для того чтобы найти главные особенности решений, достаточно рассмотреть систему уравнений, в которой оставлены только старшие производные (см., например [6]). В рассматриваемом случае, если бы исходная система уравнений имела постоянные коэффициенты, то выражения $u = l_{11}\Phi$, $v = l_{12}\Phi$, $w = l_{13}\Phi$ давали бы искомые решения.

Точно такой же вид в окрестности точки приложения сосредоточенной силы будут иметь решения системы с переменными коэффициентами, что вытекает из работы Берса [8]. В ней доказывается, что особенность фундаментального решения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в окрестности особой точки составляется из особенности фундаментального решения уравнения с постоянными коэффициентами и особенностей более низкого порядка, чем главные. Утверждение верно и для производных от фундаментального решения.

Аналогично задача решается при действии сосредоточенных сил Y и Z. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Рассмотрим действие сосредоточенного момента. Определяя его как предел нормальной распределенной погрузки, будем искать решение следующей системы

$$\begin{aligned} &\Delta_{11}u + \Delta_{12}v + \Delta_{13}w = 0 && \left(M_1 = \frac{1}{AB} D_\beta \delta\right) \\ &\Delta_{21}u + \Delta_{22}v + \Delta_{23}w = 0 && \left(M_2 = -\frac{1}{AB} D_\alpha \delta\right) \qquad (9) \\ &\Delta_{31}u + \Delta_{32}v + \Delta_{33}w = \frac{1-\sigma^2}{2Eh} M_i && (i = 1, 2) \end{aligned}$$

где M_1 соответствует моменту по оси α, M_2 — по оси β.

Систему (9) решаем тем же способом, только в (8) функцию Ф заменяем на Φ_1, представляющую собой решение уравнения

$$\Lambda\Phi_1 = \frac{1-\sigma^2}{2Eh} M_i$$

Из теории обобщенных функций известно, что если Ф—фундаментальное решение уравнения $\Lambda\Phi = \delta$, то решением уравнения $\Lambda\Phi = \partial\delta / \partial\alpha$ будет $\partial\Phi / \partial\alpha$. Отсюда вытекает, как и следовало ожидать, что главные части искомых решений в данном случае получаются простым дифференцированием уже полученных главных частей решений u_z, v_z, w_z для действия сосредоточенной силы Z, по той переменной, по которой дифференцируется δ-функция, стоящая в правой части третьего уравнения (9). Таким образом, легко получается искомое решение. Например, если действует сосредоточенный момент, направленный по оси α, то решение имеет вид $u = D_\beta u_z, \ldots,\ w = D_\beta w_z,\ T_1 = D_\beta T_{1z}, \ldots,\ H_1 = D_\beta H_{1z}$ где $T_1, \ldots, H_1$ — усилия и моменты, возникающие в оболочке.

Для момента по оси β получаем $u = -D_\alpha u_z, \ldots,\ H_1 = -D_\alpha H_{1z}$.

Рассмотрим теперь безмоментные уравнения оболочек положительной гауссовой кривизны (последнее ограничение существенно, ибо только для этих оболочек дифференциальные уравнения будут эллиптическими). Разбиваем матрицу операторов системы $\triangle_{ik}$ на главную и второстепенную матрицы, так же как это делалось для моментных уравнений $\triangle_{ik} = \mathring{\triangle}_{ik} + \triangle'_{ik}$. Согласно дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях [9], матрица имеет вид

$$\|\mathring{\triangle}_{ik}\| = \begin{Vmatrix} D_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1-\sigma}{2} D_{\beta\beta}^2 & \frac{1+\sigma}{2} D_{\alpha\beta}^2 & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) D_\alpha \\ \frac{1+\sigma}{2} D_{\alpha\beta}^2 & \frac{1-\sigma}{2} D_{\alpha\alpha}^2 + D_{\beta\beta}^2 & -\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) D_\beta \\ -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) D_\alpha & -\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) D_\beta & 2r_{11} \end{Vmatrix}$$

Матрица алгебраических дополнений l_{ik} в данном случае будет симметричной, т. е. $l_{ik} = l_{ki}$, $i, k = 1, 2$ и элементы ее имеют вид

$$l_{11} = (1-\sigma)\left(r_{11} D_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1+\sigma}{R_1^2} D_{\beta\beta}^2\right), \qquad l_{12} = -\frac{1-\sigma}{2} p^2 D_{\alpha\beta}^2$$

$$l_{13} = \frac{1-\sigma}{2} D_\alpha \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) D_{\alpha\alpha}^2 + r_{13} D_{\beta\beta}^2\right]$$

$$l_{22} = (1-\sigma)\left(\frac{1+\sigma}{R_2^2} D_{\alpha\alpha}^2 + r_{11} D_{\beta\beta}^2\right)$$

$$l_{23} = \frac{1-\sigma}{2} D_\beta \left[r_{23} D_{\alpha\alpha}^2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1}\right) D_{\beta\beta}^2\right], \qquad l_{33} = \frac{1-\sigma}{2} \Delta^2$$

Здесь

$$r_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\sigma}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right), \qquad r_{13} = \frac{2+\sigma}{R_1} - \frac{1}{R_2}, \qquad r_{23} = \frac{2+\sigma}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

Оператор $\Lambda = |\mathring{\triangle}_{ik}|$ имеет вид

$$\Lambda = \frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)}{2} \left(\frac{1}{R_2} D_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{R_1} D_{\beta\beta}^2\right)^2$$

Таблица 1

	X	Y	Z
u	$-\varkappa_1 \ln r^2$	$\varkappa_2 \frac{xy}{r^2}$	$\varkappa_3 D_\alpha [m_{13}^{(1)} - (1+\sigma) py^2/r^2] r^2 \ln r^2$
v	$\varkappa_2 \frac{xy}{r^2}$	$-\varkappa_1 \ln r^2$	$\varkappa_3 D_\beta [m_{23}^{(1)} + (1+\sigma) px^2/r^2] r^2 \ln r^2$
w	$-\varkappa_3 D_\alpha [m_{31}^{(1)} - 2py^2/r^2] r^2 \ln r^2$	$-\varkappa_3 D_\beta [m_{32}^{(1)} + 2px^2/r^2] r^2 \ln r^2$	$-\varkappa_4 r^2 \ln r^2$

Здесь

$$\varkappa_1 = \frac{(3-\sigma)(1+\sigma)}{16\pi E h}, \qquad \varkappa_2 = \frac{(1+\sigma)^2}{8\pi E h}, \qquad \varkappa_3 = \frac{1+\sigma}{64\pi E h}, \qquad \varkappa_4 = \frac{3(1-\sigma^2)}{32\pi E h^3}$$

$$p = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}, \qquad m_{13}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sigma}{R_2} - \frac{5-3\sigma}{R_1}\right), \qquad m_{23}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sigma}{R_1} - \frac{5-3\sigma}{R_2}\right)$$

$$m_{31}^{(1)} = \frac{1}{R_2} - \frac{3-2\sigma}{R_2}, \qquad m_{32}^{(1)} = \frac{1}{R_1} - \frac{3-2\sigma}{R_2}$$

$$x = A(\alpha - \alpha_0), \qquad y = B(\beta - \beta_0), \qquad r = \sqrt{A^2(\alpha-\alpha_0)^2 + B^2(\beta-\beta_0)^2}$$

Таблица 2

	X	Y	Z
T_1	$-\frac{1}{8\pi} D_\alpha \left[(3+\sigma)\ln r^2 + 2(1+\sigma)\frac{y^2}{r^2}\right]$	$\frac{1}{8\pi} D_\beta \left[(1-\sigma)\ln r^2 - 2(1+\sigma)\frac{y^2}{r^2}\right]$	$\frac{1}{4\pi}\left[m_{13}^{(2)} \ln r^2 - 2t - (1+\sigma) p \frac{x^2y^2}{r^4}\right]$
T_2	$\frac{1}{8\pi} D_\alpha \left[(1-\sigma)\ln r^2 - 2(1+\sigma)\frac{x^2}{r^2}\right]$	$-\frac{1}{8\pi} D_\beta \left[(3+\sigma)\ln r^2 + 2(1+\sigma)\frac{x^2}{r^2}\right]$	$\frac{1}{4\pi}\left[m_{23}^{(2)} \ln r^2 + 2t + (1+\sigma) p \frac{x^2y^2}{r^4}\right]$
S_1	$-\frac{1}{4\pi} D_\beta \left[(1-\sigma)\ln r^2 + 2(1+\sigma)\frac{y^2}{r^2}\right]$	$-\frac{1}{4\pi} D_\alpha \left[(1-\sigma)\ln r^2 + 2(1+\sigma)\frac{x^2}{r^2}\right]$	$\frac{1}{8\pi} D_\alpha{}^2{}_\beta \left[m_{33}^{(2)} + (1+\sigma) t\right] r^2 \ln r^2$
G_1	$\frac{h^2}{24\pi} D_\alpha{}^3{}_{\beta\beta} [m_{41}^{(2)} + 2t] r^2 \ln r^2$	$\frac{h^2}{24\pi} D_\alpha{}^3{}_{\alpha\beta} \left[m_{42}^{(2)} + 2t\right] r^2 \ln r^2$	$\frac{1}{4\pi}\left[(1+\sigma)\ln r^2 + 2(1-\sigma)\frac{x^2}{r^2}\right]$
G_2	$\frac{h^2}{24\pi} D_\alpha{}^3{}_{\beta\beta} [m_{51}^{(2)} - 2t] r^2 \ln r^2$	$\frac{h^2}{24\pi} D_\alpha{}^3{}_{\alpha\beta} [m_{52}^{(2)} - 2t] r^2 \ln r^2$	$\frac{1}{2\pi}\left[(1+\sigma)\ln r^2 + 2(1-\sigma)\frac{y^2}{r^2}\right]$
H_1	$-\frac{h^2}{6\pi} D_\beta \left[m_{61}^{(2)} \ln r^2 - \frac{1+\sigma}{R_2}\frac{x^2}{r^2} + p\frac{x^2y^2}{r^4} + \frac{2}{R_1}\frac{y^2}{r^2}\right]$	$-\frac{h^2}{6\pi} D_\alpha \left[m_{62}^{(2)} \ln r^2 - \frac{1+\sigma}{R_1}\frac{y^2}{r^2} - p\frac{x^2y^2}{r^4} + \frac{2}{R_2}\frac{x^2}{r^2}\right]$	$\frac{1-\sigma}{2\pi}\frac{xy}{r^2}$

В табл. 2 приняты следующие обозначения

$$t = \frac{x^2}{R_2} + \frac{y^2}{R_1}, \qquad m_{13}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{5+\sigma}{R_1} - \frac{1-3\sigma}{R_2}\right)$$

$$m_{23}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{5+\sigma}{R_2} - \frac{1-3\sigma}{R_1}\right), \qquad m_{33}^{(2)} = \frac{1-3\sigma}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$m_{41}^{(2)} = \frac{1+2\sigma}{R_2} + \frac{1-2\sigma}{R_1}, \qquad m_{42}^{(2)} = -\frac{1}{R_1} - \frac{5}{R_2}, \qquad m_{51}^{(2)} = \frac{1}{R_2} - \frac{3}{R_1}$$

$$m_{52}^{(2)} = \frac{3+2\sigma}{R_1} + \frac{3-2\sigma}{R_2}, \qquad m_{61}^{(2)} = \frac{3}{R_1} - \frac{2(1+2\sigma)}{R_2}, \qquad m_{62}^{(2)} = \frac{3}{R_2} - \frac{2(1+2\sigma)}{R_1}$$

Таблица 3

	X	Y	Z
U	$-\varkappa\, m_{11}^{(3)} \ln r_1^2$	$\varkappa p^2 \frac{x_1 y_1}{r_1^2}$	$-\frac{\varkappa}{2} D_\alpha \left[(2(1+\sigma) - m_{13}^{(3)}) \ln r_1^2 - m_{23}^{(3)} \frac{y_1^2}{r_1^2}\right]$
V	$\varkappa p^2 \frac{x_1 y_1}{r_1^2}$	$-\varkappa\, m_{22}^{(3)} \ln r_1^2$	$-\frac{\varkappa}{2} D_\beta \left[(2(1+\sigma) + m_{13}^{(3)}) \ln r_1^2 - m_{23}^{(3)} \frac{x_1^2}{r_1^2}\right]$
W	$-\frac{\varkappa}{2} D_\alpha \left[\left(2(1+\sigma) - m_{13}^{(3)}\right) \ln r_1^2 - m_{23}^{(3)} \frac{y_1^2}{r_1^2}\right]$	$-\frac{\varkappa}{2} D_\beta \left[(2(1+\sigma) + m_{13}^{(3)}) \ln r_1^2 - m_{23}^{(3)} \frac{x_1^2}{r_1^2}\right]$	$\frac{\varkappa}{2} \Delta^2 r_1^2 \ln r_1^2$

Здесь

$$x_1 = \sqrt{R_2} A(\alpha - \alpha_0), \quad y_1 = \sqrt{R_1} B(\beta - \beta_0), \quad r_1 = \sqrt{R_2 A^2 (\alpha - \alpha_0)^2 + R_1 B (\beta - \beta_0)^2}$$

$$m_{11}^{(3)} = \frac{R_2}{R_1^2} + \frac{1}{R_2} + \frac{2+4\sigma}{R_1}, \qquad m_{22}^{(3)} = \frac{R_1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1} + \frac{2+4\sigma}{R_2}$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{16\pi E h}, \qquad m_{13}^{(3)} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1 R_2}, \qquad m_{23}^{(3)} = 2\frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1 R_2}$$

Таблица 4

	X	Y	Z
T_1	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} D_\alpha \ln r_1^2$	$-\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} D_\beta \ln r_1^2$	$-\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{4\pi} D_{\alpha\alpha}^2 \ln r_1^2$
T_2	$-\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} D_\alpha \ln r_1^2$	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} D_\beta \ln r_1^2$	$-\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{4\pi} D_{\beta\beta}^2 \ln r_1^2$
S_1	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} D_\beta \ln r_1^2$	$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} D_\alpha \ln r_1^2$	$\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{4\pi} D_{\alpha\beta}^2 \ln r_1^2$

Здесь

$$G_1 = -\frac{2Eh}{3(1-\sigma^2)} (D_{\alpha\alpha}^2 + \sigma D_{\beta\beta}^2) w_i, \qquad G_2 = -\frac{2Eh}{3(1-\sigma^2)} (\sigma D_{\alpha\alpha}^2 + D_{\beta\beta}^2) w_i$$

$$H_1 = \frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)} D_{\alpha\beta}^2 w_i \qquad (i = X,\ Y,\ Z)$$

Примечание. Индекс i означает, что w нужно брать из табл. 3 для соответствующей силы.

Здесь R_1, R_2 одного знака и поэтому Λ — эллиптический оператор.

Метод решения здесь повторяется в той же последовательности, что и для моментных уравнений, поэтому его описание опускается, а приводятся только некоторые выражения, необходимые для понимания.

Функция ψ, обозначающая главную часть фундаментального решения уравнения

$$\Lambda\Phi = \frac{1-\sigma^2}{2Eh}\frac{\delta}{AB}$$

для безмоментного оператора Λ, имеет вид

$$\psi = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{16\pi Eh(1-\sigma)} r_1^2 \ln r_1^2, \qquad r_1^2 = A^2 R_2 (\alpha-\alpha_0)^2 + B^2 R_1 (\beta-\beta_0)^2$$

Проделав вычисления, аналогичные предыдущим, получим главные особенности функций u, v, w (табл. 3).

Что касается компонентов деформации $\varepsilon_1, \ldots, \tau$, то они находятся при помощи дифференцирования функций u, v, w. Усилия и моменты $T_1, \ldots, H_1$ выражаются через $\varepsilon_1, \ldots, \tau$ при помощи соотношений упругости. Проделав выкладки, которые здесь не приводятся, получим результаты, которые как для общего моментного, так и безмоментного случаев приведены соответственно в табл. 2—4.

Результаты данной работы для круговой цилиндрической оболочки сопоставлены с результатами, полученными В. М. Даревским в [2]. Обнаружено, что приведенные здесь асимптотические формулы для u, v, T_1, T_2, S_1, S_2 при действии сосредоточенных сил X, Y, а также G_1, G_2 при действии силы Z совпадают с аналогичными формулами из [2]. Остальные формулы не совпадают. Можно показать, что несовпадение обусловлено тем, что в данной работе и в работе [2] взяты разные соотношения упругости. Предлагаемый метод применим при любом варианте соотношений упругости.

Для сферической оболочки результаты данной статьи совпадают с результатами работы А. Л. Гольденвейзера [1].

Автор искренне благодарит А. Л. Гольденвейзера за постановку задачи и ценные консультации.

Поступила 23 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Напряженное состояние сферической оболочки. ПММ, 1944, т. VIII, вып. 6.
2. Даревский В. М. Некоторые вопросы теории цилиндрической оболочки. ПММ, 1951, т. XV, вып. 5; ПММ, 1953, т. XVII, вып. 2.
3. Черных К. Ф. Связь между дислокациями и сосредоточенными воздействиями в теории оболочек. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 2.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия под ними. Физматгиз, 1958.
5. Леви Е. Е. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. УМН, 1941, вып. VIII.
6. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние. ИЛ, 1958.
7. Лопатинский Я. Б. Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. ДАН СССР, 1950, т. 71, № 3.
8 Bers L. Local behavior of solutions of general linear elleptic equations Comm. Pure Appl. Math., 1955, 8, № 4.
9. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Гостехтеоретиздат, М., 1953.