Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

О КОЛЕБАНИИ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Л. Б. Левитин, Г. А. Скуридин, К. П. Станюкович

(Москва)

Изучение поверхностных волн имеет значение во многих вопросах теоретической и прикладной сейсмологии. Этим вопросам посвящены многочисленные исследования [1-4], в которых приводятся необходимые библиографические сведения. Наиболее полная работа в этом направлении — монография [5] — посвящена интерференционным поверхностным волнам и их приложениям в различных областях сейсмологии.

Ниже рассматривается задача о колебании упругого неоднородного слоя с криволинейной границей, лежащего на упругом неоднородном полупространстве. В точной постановке эта задача представляет значительные математические трудности. В этой связи предпринимаются попытки разработки приближенных методов решения подобных задач при условии, что отношение длины волны к толщине слоя мало, т. е. $\lambda / H \ll 1$.

В этом приближении изучалась задача о распространении гравитационных волн в слое жидкости [6]. Ниже рассматривается в аналогичном приближении задача о колебании упругого слоя в предположении, что упругие постоянные зависят только от неоднородности слоя вдоль его залегания.

§1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный упругий неоднородный слой (среда *1*), лежащий на упругом неоднородном полупространстве (среда *2*).

Высота слоя $y(x)$ предполагается переменной, $y = -H(x)$, где $H(x) > 0$ — заданная функция.

Пусть параметры Ламе λ_1, μ_1 и плотность ρ_1 характеризуют слой $\{0 \geqslant y \geqslant -H(x)\}$, а параметры λ_2, μ_2, ρ_2 — полупространство $\{(y \geqslant 0)\}$; ось y направлена внутрь полупространства (фиг. 1).

Будем рассматривать специальный тип поперечных упругих колебаний, распространяющихся в плоскости $\{xy\}$

$$u_x = 0, \qquad u_y = 0, \qquad u_z = u(x, y, t) \tag{1.1}$$

В этом случае уравнение упругих колебаний в каждой из этих сред имеет вид

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

При отсутствии внешних сил на поверхности слоя и при упругом контакте на границе $y = 0$ будем иметь следующие граничные условия:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{dH}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad (y = -H(x)), \quad u_1 = u_2, \quad \mu_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2\frac{\partial u_2}{\partial y} \quad (y = 0) \tag{1.3}$$

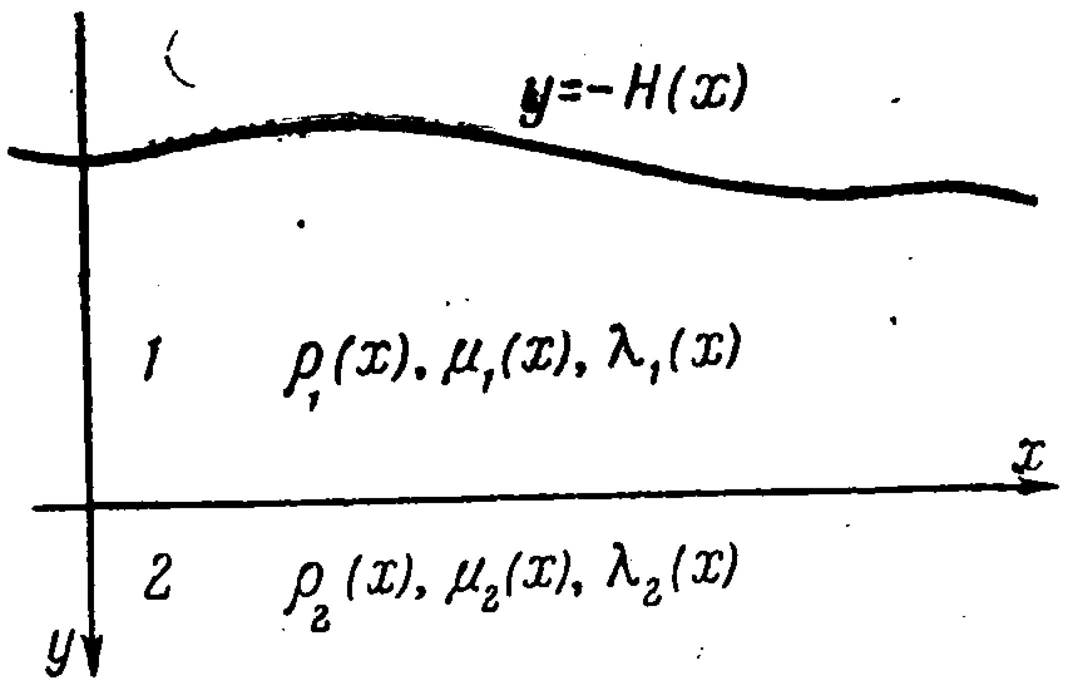
Введем новую независимую переменную $v = \omega y$, где ω — частота колебаний; уравнение (1.2) примет вид

$$\omega_2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d \ln \mu}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.4)$$

Граничные условия (1.3) преобразуются аналогично.

$$\omega^2 \frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{dh}{dx} = 0 \quad (v = -h(x))$$

$$u_1 = u_2, \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial v} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial v} \quad (v = 0) \qquad (1.5)$$



Фиг. 1

где положено $h(x) = \omega H(x)$.

Рассмотрим решения уравнения (1.4) типа поверхностных волн—колебания слоя $\{0 \geqslant y \geqslant -H(x)\}$, быстро затухающие в полупространстве $\{y \geqslant 0\}$. Представим эти решения в виде

$$u_1'(x, v, t) = A(x, v, \omega) \cos[\alpha(x)(v + h)] e^{i\omega S(x,t)} \qquad (1.6)$$

$$u_2(x, v, t) = B(x, v, \omega) e^{-\beta(x) v} e^{i\omega S(x,t)} \quad (\beta(x) > 0) \qquad (1.7)$$

При этом, согласно физическому смыслу, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $S(x, t)$ — вещественные функции; в дальнейшем будем считать, что $S(x, t) \equiv t - \psi(x)$.

§ 2. Решение задачи. Применим к решению поставленной задачи асимптотический метод, развитый в работах [6, 7, 8]. Предположим, что при $\omega \gg 1$ функции $A(x, v, \omega)$ и $B(x, v, \omega)$ могут быть представлены асимптотическими рядами

$$A(x, v, \omega) \sim A_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x, v)}{(i\omega)^n}, \quad B(x, v, \omega) \sim B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(x, v)}{(i\omega)^n} \qquad (2.1)$$

Подставляя (1.6) и (1.7), с учетом разложений (2.1) в уравнение (1.4) и приравнивая нулю члены при одинаковых степенях ω, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка для функций A_n и B_n, а также три конечных уравнения для определения $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $d\psi(x)/dx$ (с учетом соответствующих граничных условий): (2.2)

$$(\nabla\psi)^2 + \alpha^2(x) = \frac{\rho_1(x)}{\mu_1(x)}, \qquad (\nabla\psi)^2 - \beta^2(x) = \frac{\rho_2(x)}{\mu_2(x)}, \qquad \alpha(x) \operatorname{tg} \alpha h = \beta(x) \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}$$

$$\begin{gathered} A_{1vv} \cos\alpha(v + h) - 2\alpha A_{1v} \sin\alpha(v + h) = -\{A_0 \cos\alpha(v + h) \nabla^2\psi + \\ + 2\nabla\psi\nabla[A_0 \cos\alpha(v + h)] + A_0 \cos\alpha(v + h) \nabla \ln\mu_1 \nabla\psi\} \end{gathered} \qquad (2.3)$$

$$\begin{gathered} A_{nvv} \cos\alpha(v + h) - 2\alpha A_{nv} \sin\alpha(v + h) + A_{n-1} \cos\alpha(v + h)[\nabla^2\psi + \\ + \nabla \ln\mu_1 \nabla\psi] + 2\nabla\psi\nabla[A_{n-1} \cos\alpha(v + h)] = \nabla \ln\mu_1 \nabla[A_{n-2} \cos\alpha(v + h)] + \\ + \nabla^2[A_{n-2} \cos\alpha(v + h)] \quad (n > 1) \end{gathered} \qquad (2.4)$$

$$[B_{1vv} - 2\beta B_{1v}] e^{-\beta v} = -\{B_0 e^{-\beta v}[\nabla^2\psi + \nabla \ln\mu_2 \nabla\psi] + 2\nabla\psi\nabla[B_0 e^{-\beta v}]\} \qquad (2.5)$$

$$\begin{gathered} [B_{nvv} - 2\beta B_{nv}] e^{-\beta v} + B_{n-1} e^{-\beta v}[\nabla^2\psi + \nabla \ln\mu_2 \nabla\psi] + 2\nabla\psi\nabla[B_{n-1} e^{-\beta v}] = \\ = \nabla \ln\mu_2 \nabla[B_{n-2} e^{-\beta v}] + \nabla^2[B_{n-2} e^{-\beta v}] \quad (n > 1) \end{gathered} \qquad (2.6)$$

Здесь и далее оператором ∇ обозначено частное дифференцирование по x, причем он относится только к первой стоящей за ним функции. Дифференцирование по v обозначено индексом.

Аналогичным образом получаем граничные условия

$$A_{1v} = -A_0 \nabla h \nabla \psi, \qquad A_{nv} = -A_{n-1} \nabla h \nabla \psi + \nabla A_{n-2} \nabla h \qquad (v = -h(x)) \tag{2.7}$$

$$A_0 \cos \alpha h = B_0, \qquad A_n \cos \alpha h = B_n, \qquad A_{nv} \cos \alpha h = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{nv} \qquad (v = 0) \tag{2.8}$$

$$B_n e^{-\beta v} \to 0 \quad \text{при } v \to \infty \tag{2.9}$$

Из уравнений (2.2) следует, что эйконал $\psi(x)$ определяется с точностью до аддитивной постоянной и знака, что влияет только на фазу колебаний. Вычитая второе уравнение (2.2) из первого, получим

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2}$$

Отсюда следует, что поверхностные волны рассматриваемого типа могут существовать при условии, если

$$\frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2} > 0, \qquad \text{или} \qquad c_2 > c_1$$

где c_1, c_2 — скорости звука в среде *1* и в среде *2*. Если $\rho_2 \geqslant \rho_1$, то для этого необходимо, чтобы $\mu_2 > \mu_1$, т. е. верхний слой должен лежать на более жестком основании [9]. Функция $\beta(x)$, однозначно определяется функцией $\alpha(x)$, которая, определяется из уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha h = \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2} - \alpha^2}$$

Анализируя это уравнение, легко найти, что соответственно условиям

$$h \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2}} < \pi, \qquad \pi n > h \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2}} \geqslant \pi (n-1)$$

существует либо одно значение α^2 (если выполняется первое условие) либо существует n различных значений α^2 (если выполняется второе), соответствующих физически различным колебаниям. Интегрируя уравнение (2.3), получим

$$A_{nv} = \frac{1}{\mu_1 \cos^2 \alpha (v+h)} \int_{-h(x)}^{v} \Big\{ \cos \alpha (v+h) \nabla [\mu_1 \nabla (A_{n-2} \cos \alpha (v+h))] -$$

$$- \frac{1}{A_{n-1}} \nabla [A^2_{n-1} \cos^2 \alpha (v+h) \mu_1 \nabla \psi] \Big\} dv + \frac{C_n^*(x)}{\cos^2 \alpha (v+h)} \tag{2.10}$$

Учитывая второе граничное условие (2.7), найдем

$$C_n^*(x) = -A_{n-1}(x, -h(x)) \nabla h \nabla \psi + \nabla A_{n-2}(x, -h(x)) \nabla h$$

После вторичного интегрирования из (2.10) получим

$$A_n = \frac{1}{\mu_1} \int_0^v \frac{1}{\cos^2 \alpha (v+h)} \Big\{ \int_{-h(x)}^{v} \Big\{ \cos \alpha (v+h) \nabla [\mu_1 \nabla (A_{n-2} \cos \alpha (v+h))] -$$

$$- \frac{1}{A_{n-1}} \nabla [A^2_{n-1} \cos^2 \alpha (v+h) \mu_1 \nabla \psi] \Big\} dv \Big\} dv + \frac{1}{\alpha} [\nabla A_{n-2}(x, -h(x)) \nabla h -$$

$$- A_{n-1}(x, -h(x)) \nabla h \nabla \psi] \times [\operatorname{tg} \alpha (v+h) - \operatorname{tg} \alpha h] + C_n(x) \tag{2.11}$$

Аналогично вычисляется $B_n(x, v)$. Из уравнения (2.6) имеем

$$B_{nv} = \frac{1}{\mu_2} e^{2\beta v} \int\limits_v^\infty \left\{ \frac{1}{B_{n-1}} \nabla \left[B_{n-1}^2 e^{-2\beta v} \mu_2 \nabla \psi \right] - e^{-\beta v} \left[\mu_2 \nabla \left(B_{n-2} e^{-\beta v} \right) \right] \right\} dv + \\ + e^{2\beta v} D_n^* (x) \tag{2.12}$$

Согласно условию на бесконечности (2.9) $D_n^* = 0$. После вторичного интегрирования для $B_n(x)$ получим выражение:

$$B_n = \frac{1}{\mu_2} \int\limits_0^v e^{2\beta v} \left\{ \int\limits_v^\infty \left\{ \frac{1}{B_{n-1}} \nabla \left[B_{n-1}{}^2 e^{-2\beta v} \mu_2 \nabla \psi \right] - e^{-\beta u} \nabla \left[\mu_2 \nabla \left(B_{n-2} e^{-\beta v} \right) \right] \right\} dv \right\} dv + \\ + D_n(x) \tag{2.13}$$

Рекуррентные соотношения (2.11) и (2.13) позволяют последовательно вычислять A_n и B_n для приближений более высоких порядков.

Переходим к определению произвольных функций $C_n(x)$ и $D_n(x)$. Из второго граничного условия (2.8) следует, что

$$C_n(x) \cos \alpha h = D_n(x)$$

Таким образом, граничные условия для n-го приближения не определяют функций C_n и D_n, а лишь связывают их между собой. Однако C_n и D_n могут быть определены при вычислении следующего приближения. В самом деле, третье условие (2.8) дает уравнение для вычисления C_{n-1} и D_{n-1}, оставшихся неопределенными в $(n-1)$-м приближении. На $(n-1)$-м шаге были определены функции

$$\overset{\circ}{A}_{n-1} = A_{n-1} - C_{n-1}, \qquad \overset{\circ}{B}_{n-1} = B_{n-1} - D_{n-1} = B_{n-1} - C_{n-1} \cos \alpha h \tag{2.14}$$

Выражая A_{nv} и B_{nv} при $v = 0$ соответственно через A_{n-1}, A_{n-2} и B_{n-1}, B_{n-2} при условии (2.14), и подставляя в третье условие (2.8), получим

$$- \nabla C_{n-1} \frac{\mu_1 \nabla \psi (\alpha h + \sin \alpha h \cos \alpha h)}{\alpha \cos \alpha h} - C_{n-1} \frac{\nabla \left[(h + \alpha^{-1} \sin \alpha h \cos \alpha h) \mu_1 \nabla \psi \right]}{2 \cos \alpha h} + \\ + \frac{1}{\cos \alpha h} \int\limits_{-h(x)}^0 \{ \cos \alpha (v + h) \nabla \left[\mu_1 \nabla \left(A_{n-2} \cos \alpha (v + h) \right) \right] - \tag{2.15}$$

$$- \frac{1}{\overset{\circ}{A}_{n-1}} \nabla [\overset{\circ}{A}{}_{n-1}^{2} \cos^2 \alpha (v + h) \mu_1 \nabla \psi] \} dv + \frac{\mu_1}{\cos \alpha h} \{ \nabla A_{n-2} (x, -h(x)) \nabla h - \\ - \overset{\circ}{A}_{n-1} (x, -h(x)) \nabla h \nabla \psi \} = - \nabla C_{n-1} \frac{1}{\cos \alpha h} \left[\frac{\mu_2{}^2 \nabla \psi \cos^2 \alpha h}{\mu_1 \alpha \operatorname{tg} \alpha h} \right] + C_{n-1} \frac{1}{2 \cos \alpha h} \times \\ \times \nabla \left[\frac{\mu_2{}^2 \nabla \psi \cos^2 \alpha h}{\mu_1 \alpha \operatorname{tg} \alpha h} \right] + \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{1}{\overset{\circ}{B}_{n-1}} \nabla [\overset{\circ}{B}{}_{n-1}^{2} e^{-2\beta v} \mu_2 \nabla \psi] - e^{-\beta v} \nabla \left[\mu_2 \nabla \left(B_{n-2} e^{-\beta v} \right) \right] \right\} dv$$

Уравнение (2.15) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, из которого функция $C_{n-1}(x)$ определяется с точностью до произвольной постоянной K_{n-1}. В частности, при $n = 1$ имеем

$$A_0(x) = C_0(x) = K_0 \left[\frac{\mu_1 \nabla \psi}{\alpha} \left(\frac{\mu_2{}^2}{\mu_1{}^2} \frac{\cos^2 \alpha h}{\operatorname{tg} \alpha h} + \sin \alpha h \cos \alpha h + \alpha h \right) \right]^{-1/2} \tag{2.16}$$

В общем случае, интегрируя (2.15), получим

$$C_{n-1}=\frac{A_0}{K_0^2}\Big[K_{n-1}+\int_0^x A_0\Big\{\int_{-h(x)}^0\Big\{\cos\alpha(v+h)\nabla\big[\mu_1\nabla\big[A_{n-2}\cos\alpha(v+h)\big]\big]-$$

$$-\frac{1}{\overset{\circ}{A}_{n-1}}\nabla\Big[\overset{\circ}{A}{}_{n-1}^{2}\cos^2\alpha(v+h)\,\mu_1\nabla\psi\Big]\Big\}dv- \tag{2.17}$$

$$-\cos\alpha h\int_0^\infty\Big\{\frac{1}{\overset{\circ}{B}_{n-1}}\nabla\Big[\overset{\circ}{B}{}_{n-1}^{2}e^{-2\beta v}\mu_1\nabla\psi\Big]-e^{-\beta v}\nabla\left[\mu_2\nabla\left[B_{n-2}e^{-\beta v}\right]\right]\Big\}dv\Big\}dx\Big]$$

Для нахождения $C_n(x)$ надо удовлетворить граничным условиям для более высокого $(n+1)$-го приближения.

Пользуясь формулами (2.11) и (2.13), можно найти функции первого приближения.

$$A_1=-\frac{1}{2\mu_1A_0}\nabla\left\{\frac{A_0^2\mu_1\nabla\psi}{\alpha}\right\}[(v+h)\operatorname{tg}\alpha(v+h)-h\operatorname{tg}\alpha h]-$$

$$-\frac{1}{2\alpha}A_0\nabla\psi\nabla\alpha\left[(v+h)^2-h^2\right]-A_0\nabla\psi\nabla hv+C_1(x) \tag{2.18}$$

$$B_1=-\frac{1}{2\beta}B_0\nabla\psi\nabla\beta v^2+\frac{1}{2B_0\mu_2}\nabla\left[\frac{B_0^2\mu_2\nabla\psi}{\beta}\right]v+C_1(x)\cos\alpha h \tag{2.19}$$

Здесь A_0 определено согласно (2.16), $B_0=A_0\cos\alpha h$.

§ 3. Замечания об общем виде аппроксимирующих функций. Вычисление функций второго и более высоких приближений и даже функции $C_1(x)$ приводит к громоздким выкладкам. Рассмотрим общий характер функций $A_n(x, v)$ и $B_n(x, v)$.

Пусть $Q^{(m)}(v)$ — полином степени m относительно v, где коэффициенты — функции x. Из предыдущего следует

$$B_0=Q_0^{(0)}(v),\qquad B_1=Q_1^{(2)}(v)$$

Пусть

$$B_{n-1}=Q_{n-1}^{(m)},\qquad B_{n-2}=Q_{n-2}^{(m-2)}$$

Тогда из (2.13) легко видеть, что $B_n=Q_n^{(m+2)}$. Отсюда (по индукции) каждая функция B_n есть полином степени $2n$ относительно v.

$$B_n=Q_n^{(2n)}=\sum_{k=0}^{2n}c_{nk}(x)\,v^k \tag{3.1}$$

Аналогично можно показать, что (3.2)

$$A_n=P_n^{(2n-1)}\operatorname{tg}\alpha(v+h)+R_n^{(2n)}=\operatorname{tg}\alpha(v+h)\sum_{k=0}^{2n-1}a_{nk}(x)\,v^k+\sum_{k=0}^{2n}b_{nk}(x)\,v^k$$

Здесь $P_n^{(2n-1)}$ и $R_n^{(2n)}$ — полиномы относительно v степеней $(2n-1)$ и $2n$; функции $a_{nk}(x)$, $b_{nk}(x)$ и $c_{nk}(x)$ представляют собой рациональные комбинации функций

$$A_0(x),\quad \alpha(x),\quad \beta(x),\quad \nabla\psi(x),\quad h(x),\quad \mu_1(x),\quad \mu_2(x),\quad \sin\alpha h,\quad \cos\alpha h$$

и их производных.

§ 4. Геометрическая оптика распространения волн Лява. Использованный способ разложения по степеням большого параметра ω есть по существу метод коротковолнового приближения, справедливый при условии, что толщина слоя $H(x)$ и радиус кривизны поверхности слоя R велики по сравнению с длиной волны λ:

$$\lambda = \frac{2\pi c(x)}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}} \leqslant H(x), \qquad \lambda \leqslant R = \frac{[1+H'^2(x)]^{3/2}}{H''(x)}$$

Уравнения бихарактеристик для волнового процесса, описываемого уравнением (1.2) можно представить в виде [10]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu(x)}{\rho(x)} p_x, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\mu(x)}{\rho(x)} p_y \qquad \left(p_x = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \ p_y = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}\right)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2)\frac{d}{dx}\frac{\mu}{\rho}, \qquad \frac{dp_y}{dt} = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $V(x, y) = t$ — уравнение поверхностей волнового фронта. Решая систему (4.1), получим выражения для компонент скорости

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{\mu(x)}{\rho(x)}\sqrt{\frac{\rho(x)}{\mu(x)} - \frac{1}{a^2}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{a}\frac{\mu(x)}{\rho(x)} \tag{4.2}$$

Уравнение лучей, проходящих через точку (x_0, y_0), имеет вид

$$y = y_0 \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a^2/c^2(x) - 1}} \qquad \left(c(x) = \sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}}\right) \tag{4.3}$$

Здесь $c(x)$ — локальная скорость звука, a — произвольная константа с размерностью скорости, удовлетворяющая условию $c^2(x) \leqslant a^2 \leqslant \infty$.

При $a^2 = c^2(x_0)$ имеем $x = x_0$, т. е. луч вертикален, при $a^2 = \infty$ имеем $y = y_0$, т. е. луч горизонтален. Вертикальный и горизонтальный лучи не испытывают искривления.

Волны Лява в слое *1* представляют собой результат суперпозиции множества колебаний, распространяющихся по лучам (4.3) и испытывающих полное внутреннее отражение от верхней и нижней границ слоя. Требование полного внутреннего отражения от границы $y = 0$ накладывает ограничение на возможные траектории лучей, образующих волну Лява в слое *1*. Должно соблюдаться условие

$$\sin\theta \geqslant c_1(x)/c_2(x) \tag{4.4}$$

Здесь θ — угол падения луча. Отсюда, как и в случае сред с постоянными параметрами [11], снова приходим к условию $c_2(x) > c_1(x)$.

Далее, пусть луч падает на плоскость $\{y = 0\}$ в точке $x = x_1$. Тогда вдоль луча должно соблюдаться неравенство

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} = \operatorname{ctg}\theta < \frac{c_2(x_1)}{c_1(x_1)}\sqrt{1 - \frac{c_1^2(x_1)}{c_2^2(x_1)}}$$

Отсюда и из (4.3) получим, что все лучи, испытывающие полное внутреннее отражение в точке $(x_1, 0)$, описываются уравнением

$$y = \pm\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a^2/c_1^2(x) - 1}} \qquad \left(\frac{c_1^2(x_1)\,c_2^2(x_1)}{c_2^2(x_1) - c_1^2(x_1)} \leqslant a^2 \leqslant \infty\right) \tag{4.5}$$

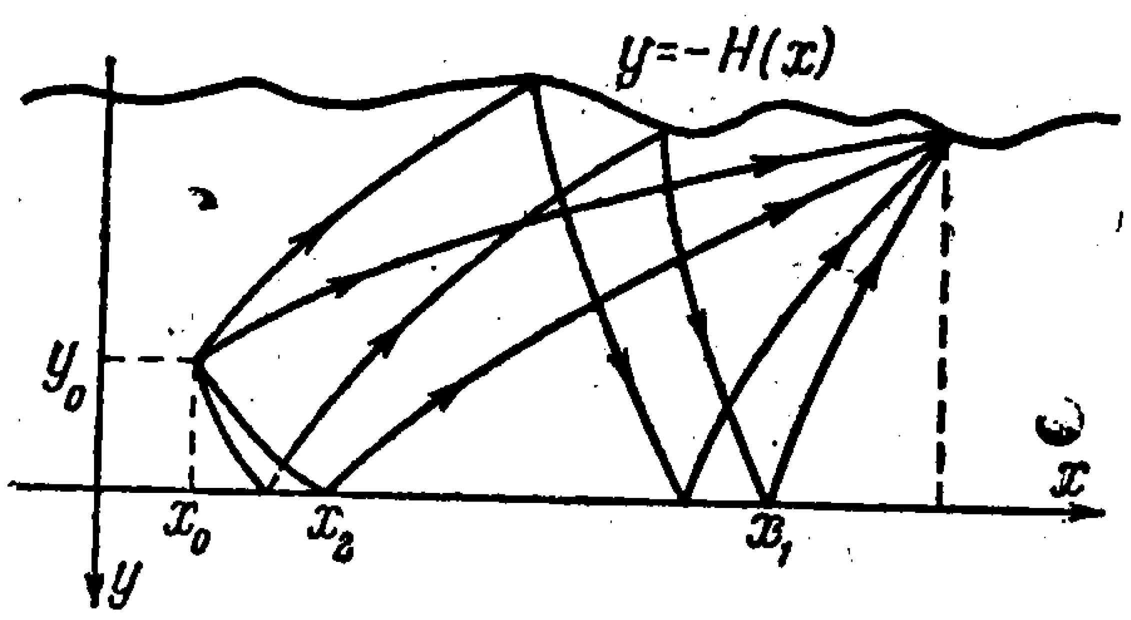
где a должно удовлетворять условию, указанному в скобках.

В качестве примера исследуем волну, порождаемую изотропным линейным источником, находящимся в точке (x_0, y_0).

Рассмотрим колебание на поверхности слоя *1* в точке $(x_1, -H(x_1))$; оно образуется лучом, пришедшем непосредственно из точки (x_0, y_0), лучом, однократно отразившимся от нижней границы слоя, лучом, двукратно отразившимся от верхней и нижней границ, и т. д. (на фиг. 2 изображен ход нескольких таких лучей; их искривление соответствует случаю, когда $c_1(x)$ монотонно убывает при возрастании x).

Если функция $H(x)$ задана в явном виде, то можно численными методами рассчитать с любой точностью колебание в точке $(x_1, -H(x_1))$, вычисляя последовательно ход первого, второго и т. д. лучей. Особый интерес представляют «прямой» луч и луч, однократно отразившийся (в точке $(x_1, 0)$). Соответствующие им колебания обладают наибольшей амплитудой и приходят в точку наблюдения ранее других. Выражения для них могут быть получены в общем виде.

Воспользуемся методом, аналогичным используемому в работе [12]. Уравнение луча, соединяющего точки (x_0, y_0) и $(x_1, -H(x_1))$, имеет вид (4.3), причем интеграл берется со знаком «минус», а константа a определяется из условия



Фиг. 2

$$-H(x_1) = y_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{a_2 / c_1^2(x) - 1}} \qquad (4.6)$$

Рассмотрим бесконечно узкий конус лучей, исходящих из точки (x_0, y_0) в пределах угла $d\varphi$. Поток энергии в этом конусе равен

$$Q^2 \rho_1(x_1)\, c_1(x_1)\, \omega^2 d\sigma = \frac{P}{2\pi}\, d\varphi \qquad (4.7)$$

Здесь $d\sigma$ — поперечное сечение конуса в этой точке, P — линейная мощность источника, Q — амплитуда в точке $(x_1, -H(x_1))$.

Вычислив $d\sigma / d\varphi$ и подставив в (4.7), получим для Q выражение (4.8)

$$Q = \omega \left(\frac{P}{2\pi\mu_1(x_1)\, a}\right)^{1/2} \left\{\sqrt{\left(\frac{a^2}{c_1^2(x_0)} - 1\right)\left(\frac{a^2}{c_1^2(x_1)} - 1\right)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{c_1^2(x)\,(a^2 / c_1^2(x) - 1)^{3/2}}\right\}^{-1/2}$$

Сдвиг фазы также пропорционален частоте

$$\Delta\varphi = \omega \int_{x_0}^{x_1} \frac{a\,dx}{c_1^2(x)\sqrt{a^2 / c_1^2(x) - 1}} \qquad (4.9)$$

Луч, отражающийся в точке $(x_2, 0)$, описывается до отражения уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{b^2 / c_1^2(x) - 1}} \qquad (4.10)$$

а после отражения уравнением

$$y = -\int_{x_2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{b^2 / c_1^2(x) - 1}} = -y_0 - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{b^2 / c_1^2(x) - 1}} \qquad (4.11)$$

Постоянные b и x_2 определяются из условий

$$y_0 = -\int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{b^2 / c_1^2(x) - 1}}, \qquad H(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{b^2 / c_1^2(x) - 1}} \qquad (4.12)$$

Кроме того, должно соблюдаться условие полного внутреннего отражения

$$\frac{c_1^2(x_2)\, c_2^2(x_2)}{c_2^2(x_2) - c_1^2(x_2)} \leqslant b^2 \qquad (4.13)$$

Тогда амплитуда и сдвиг фаз колебания, пришедшего по этому лучу, выражаются формулами, вполне аналогичными (4.8) и (4.9) с заменой a на b.

Если слой *1* имеет постоянную толщину $H(x) = H_0$, то полученные выражения легко обобщаются для любого числа отражений. Пусть луч испытал $2n+1$ отражение. Тогда амплитуда и фаза выражаются формулами (4.8) и (4.9), где константа $a = a_{2n+1}$ определяется из условия

$$(2n+1)H_0 = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{a_{2n+1}^2 / c_1^2(x) - 1}} \tag{4.14}$$

В случае четного числа отражений $2n$ это условие имеет вид

$$(2n+1)H_0 = -y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{a_{2n}^2 / c_1^2(x) - 1}} \tag{4.15}$$

При этом во всех точках отражения от нижней границы должно соблюдаться неравенство вида (4.13).

§ 5. Другие методы решения. Для решения поставленной задачи и некоторых других можно иначе исследовать исходное уравнение. Для этого преобразуем основное уравнение (1.2)

$$u_{yy} + u_{xx} + \frac{\mu_x}{\mu} u_x = \frac{\rho}{\mu} u_{tt} \tag{5.1}$$

где дифференцирование обозначено индексом. Пусть $x = x(\vartheta)$, где ϑ — новая независимая переменная, тогда (1.2) принимает вид (5.2)

$$x'^2 u_{yy} + u_{\vartheta\vartheta} + u_\vartheta\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'}\right) = x'^2 \frac{\rho}{\mu} u_{tt} \qquad \left(\mu' = \frac{d\mu}{d\vartheta},\ x' = \frac{dx}{d\vartheta},\ x'' = \frac{d^2x}{d\vartheta^2}\right)$$

Далее пусть $u = \xi^{-1}(\vartheta)\Psi(\vartheta, y, t)$, тогда (5.2) можно представить так:

$$\begin{gathered} x'^2\Psi_{yy} + \Psi_{\vartheta\vartheta} + \Psi_\vartheta\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'} - 2\frac{\xi'}{\xi}\right) + \\ + \Psi\left[\left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{x''}{x'}\right)\frac{\xi'}{\xi} + 2\frac{\xi'^2}{\xi^2} - \frac{\xi''}{\xi}\right] = x'^2 \frac{\rho}{\mu}\Psi_{tt} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Если принять $\Psi = T(t)\varphi(\vartheta, y)$, то придем к уравнению

$$\begin{gathered} x'^2\varphi_{yy} + \varphi_{\vartheta\vartheta} + \varphi_\vartheta\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'} - 2\frac{\xi'}{\xi}\right) + \\ + \varphi\left[2\frac{\xi'^2}{\xi^2} - \frac{\xi''}{\xi} - \frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'}\right) + x'^2\frac{\rho}{\mu}\omega^2\right] = 0 \end{gathered} \tag{5.4}$$

Здесь положено $T = T_0 e^{i\omega t}$, причем, не ограничивая общности, можно считать $T_0 = 1$. Положим теперь, что

$$\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'} - 2\frac{\xi'}{\xi} = 0 \tag{5.5}$$

$$2\frac{\xi'^2}{\xi^2} - \frac{\xi''}{\xi} - \frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'}\right) + \left(\frac{\rho}{\mu} - \frac{\rho_0}{\mu_0}\right)x'^2\omega^2 = 0 \tag{5.6}$$

где ρ_0, μ_0 — некоторые постоянные значения ρ и μ. Тогда уравнение (5.4) примет вид

$$\varphi_{yy} + \frac{1}{x'^2}\varphi_{\vartheta\vartheta} = \frac{\rho_0}{\mu_0}\omega^2\varphi \tag{5.7}$$

Интегрируя (5.5), найдем, что

$$x' = \frac{A\mu}{\omega\xi^2} \qquad (A = \text{const}) \tag{5.8}$$

Подставляя из (5.5) разность ($\mu'/\mu - x''/x'$) в (5.6), получим

$$\xi'' = \left(\frac{\rho}{\mu} - \frac{\rho_0}{\mu_0}\right) x'^2 \omega^2 \xi = \left(\frac{\rho}{\mu} - \frac{\rho_0}{\mu_0}\right) \frac{A^2\mu^2}{\xi^3} \tag{5.9}$$

Функции $\mu = \mu(x)$ и $\rho = \rho(x)$ заданы; переходя от переменной ϑ снова к переменной x, уравнения (5.9) можно представить в виде

$$\xi'' + \left(\frac{\mu'}{\mu} - 2\frac{\xi'}{\xi}\right)\xi' = \omega^2 \xi \left(\frac{\rho}{\mu} - \frac{\rho_0}{\mu_0}\right) \tag{5.10}$$

Уравнение (5.8) при этом определяет

$$d\vartheta = \frac{\omega \xi^2}{A\mu} dx \tag{5.11}$$

Уравнение (5.7) примет вид

$$\varphi_{yy} + \varphi_{xx} + F(x)\varphi_x = \frac{\rho_0}{\mu_0}\omega^2\varphi \qquad \left(F(x) = \frac{\mu'}{\mu} - \frac{2\xi'}{\xi}\right) \tag{5.12}$$

Зная $\rho = \rho(x)$, $\mu = \mu(x)$, из (59) находим $\xi = \xi(x)$, а затем определяем $F(x)$. Частное решение уравнения (5.12) находится без особого труда. В результате частное решение уравнения (5.1), получим в виде

$$u_n = \xi_n^{-1} e^{-i\omega_n t} \varphi_n(x, y) \tag{5.13}$$

Зная частное решение, можно построить общее решение уравнения (5.1), подчиненное необходимым начальным и граничным условиям.

Уравнение (5.4) можно преобразовать к более удобному виду. Пусть

$$x' = 1, \qquad x = \vartheta, \qquad 2\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\mu'}{\mu}$$

Тогда $\xi = A\sqrt{\mu}$ и уравнение (5.4) принимает вид

$$\varphi_{yy} + \varphi_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi = 0 \tag{5.14}$$

где

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{\mu} + \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{\mu''}{\mu} - \frac{1}{2}\frac{\mu'^2}{\mu^2}\right) = \Phi(x) \tag{5.15}$$

Общее решение уравнения (5.14) легко находится обычными методами [13]. Рассмотрим аналогичным методом другой класс решений. Пусть

$$\Psi = b(y)\varphi(\vartheta, t) \tag{5.16}$$

тогда уравнение (5.2) примет вид

$$\varphi_{\vartheta\vartheta} + \varphi_\vartheta\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'} - 2\frac{\xi'}{\xi}\right) + \varphi\left[a^2x'^2 + 2\frac{\xi'^2}{\xi^2} - \frac{\xi''}{\xi} - \frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'}\right)\right] =$$
$$= \frac{\rho}{\mu}x'^2\varphi_{tt} \qquad \left(a^2 = \frac{b''}{b}\right) \tag{5.17}$$

Пусть

$$\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'} - 2\frac{\xi'}{\xi} = 0, \qquad a^2x'^2 + 2\frac{\xi'^2}{\xi^2} - \frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{x''}{x'}\right) = 0 \tag{5.18}$$

Тогда

$$\frac{A\mu}{a\xi^2} = x', \qquad \xi''\xi^3 = A^2\mu^2 \tag{5.19}$$

Переходя снова к переменной x, будем иметь

$$\xi'' - \xi'\left(\frac{\mu'}{\mu} - 2\frac{\xi'}{\xi}\right) = a^2\xi, \qquad \vartheta' = \frac{a\xi^2}{A\mu}$$

Задавая $\mu = \mu(x)$, определяем $\xi = \xi(x)$ и затем $\vartheta = \vartheta(x)$. Уравнение (5.17) при этом имеет вид

$$\varphi_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{c^2}\varphi_{tt} \qquad \left(\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{\mu}x'^2\right) \tag{5.20}$$

которое легко решается. Заметим, что зная $\rho = \rho(x)$, $\mu = \mu(x)$ и $\vartheta = \vartheta(x)$ легко определить $\rho = \rho(\vartheta)$ и $\mu = \mu(\vartheta)$.

При специальных частных аппроксимациях $\rho(x)$ и $\mu(x)$ решение уравнений (5.14) и (5.20) может быть упрощено. Например, если положить $\mu = (ax+b)^2$ и ввести новую функцию

$$R = (ax+b)u = \frac{\mu'}{2a}u \tag{5.21}$$

то уравнение (5.1) примет вид

$$R_{yy} + R_{xx} = \frac{1}{c^2}R_{tt} \qquad \left(\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{\mu} = \frac{\rho(x)}{(ax+b)^2}\right) \tag{5.22}$$

Решение и исследование этого уравнения можно проводить способами, указанными выше, преобразуя к новым переменным граничные условия.

В заключение укажем, что характеристики основного уравнения и в частности, уравнения (5.1), легко получить, если положить

$$u = A(x, y, t)e^{i\omega f(x, y, t)} \tag{5.23}$$

Тогда подставив (5.23) в уравнение (5.1) и предполагая, что $\omega \to \infty$, получим

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{\rho}{\mu}f_t^2 \tag{5.24}$$

Это и будет уравнением поверхностей волнового фронта.

Поступила 30 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Зволинский Н. В. Волны Релея в неоднородном упругом полупространстве частного типа. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1945, т. IX, № 3.
2. Шерман Д. И., О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве. Тр. Сейсмологического ин-та, 1945, № 115.
3. Кейлис-Борок В. Н. О поверхностных волнах в слое, лежащем на упругом полупространстве. АН СССР, сер. геофиз., 1951, № 2.
4. Зволинский Н. В. Дисперсия поверхностных волн Лява в двуслойной среде. Тр. Ин-та геофизики АН ГрузССР, 1958, 17.
5. Кейлис-Борок В. И. Интерференционные поверхностные волны. АН СССР, 1960.
6. Keller J., Surface waves on water of non—uniform depth, Jour. of fluid mechanics, vol. 4, pt. 6, 1958.
7. Зволинский Н. В., Скуридин Г. А. Об асимптотическом методе решения динамических задач теории упругости. АН СССР, сер. геофиз., 1956, № 2.
8. Скуридин Г. А. О скачках разрывных решений динамических уравнений теории упругости. АН СССР, сер. геофиз., 1956, № 6.
9. Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Физматгиз, 1958, т. IV.
11. Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии АН СССР, 1955.
12. Keller J. B., Karal F. C., Surface wave exitation and propagation, J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, № 6.
13. Соболев С. Л., Волновое уравнение для неоднородной среды. Тр. Сейсмологического ин-та, 1930, № 6.