Прикладная математика и механика. Том XXVII, 1963

# ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЕ В ТЕОРИИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

**В. Н. Кошляков, В. Ф. Лященко**

(Москва)

Рассматривается в строгой постановке (без перехода к прецессионной теории) движение гирогоризонткомпаса Геккелера—Аншютца [1]. Приводятся динамические уравнения системы, которые дополняются кинематическими уравнениями, аналогичными известным уравнениям Пуассона.

Из этих уравнений при определенных условиях извлекается первый интеграл, являющийся обобщением соответствующего интеграла, полученного в рамках прецессионной теории в работах [2,3].

Указанный интеграл используется для получения условий устойчивости невозмущенного движения системы.

1. Пусть $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ и $Oxyz$ — правые системы координат, начала которых совпадают с точкой подвеса гиросферы. Ось $x^\circ$ первой системы направим по вектору скорости точки подвеса, ось $z^\circ$ — вдоль радиуса земного шара вертикально вверх; ось $y$ второй системы направим вдоль вектора собственного кинетического момента системы, ось $z$ — параллельно осям кожухов гироскопов.

| | $x^\circ$ | $y^\circ$ | $z^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\theta_1$ | $\vartheta_1$ | $\psi_1$ |
| $y$ | $\theta_2$ | $\vartheta_2$ | $\psi_2$ |
| $z$ | $\theta_3$ | $\vartheta_3$ | $\psi_3$ |

Положение осей $xyz$ относительно осей $x^\circ y^\circ z^\circ$ определим [1] посредством углов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Для направляющих косинусов между этими осями, принимая обозначения согласно табличке, приведенной слева, будем иметь

$$\theta_1 = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \qquad \theta_2 = -\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\theta_3 = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$\vartheta_1 = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma, \qquad \vartheta_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$
$$\vartheta_3 = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$\psi_1 = -\cos\beta\sin\gamma, \qquad \psi_2 = \sin\beta, \qquad \psi_3 = \cos\beta\cos\gamma \tag{1.1}$$

Уравнения движения гирокомпаса в проекциях на оси $xyz$ будут иметь вид

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr - Hr = -\left(F - m\frac{v^2}{R}\right)l\psi_2 - mvl\Omega\vartheta_2 - ml\frac{dv}{dt}\theta_2$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + \frac{dH}{dt} = \left(F - m\frac{v^2}{R}\right)l\psi_1 + mvl\Omega\vartheta_1 + ml\frac{dv}{dt}\theta_1 \tag{1.2}$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + Hp = 0 \qquad (H = 2B'\cos\varepsilon)$$
$$-2I\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - 2B'\sin\varepsilon q = N(\varepsilon)$$

Здесь $A$, $B$, $C$ — главные моменты инерции системы относительно осей $xyz$; $I$ — момент инерции ротора гироскопа вместе с кожухом относительно оси кожуха; $B'$ — собственный кинетический момент гироскопа; $p$, $q$, $r$ — проекции угловой скорости трехгранника $xyz$ на его же оси; $\Omega$ — угловая скорость трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ относительно оси $z^\circ$.

Имеем [4]

$$\Omega = U \sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi + \frac{d\alpha^*}{dt} \qquad \left(\operatorname{tg}\alpha^* = \frac{v_N}{RU\cos\varphi + v_E}\right) \tag{1.3}$$

Остальные обозначения в (1.2) и (1.3) — те же, что и в работах [1,4].

Выражения для $p$, $q$, $r$ имеют вид [1]

$$\begin{aligned} p &= \frac{v}{R}\vartheta_1 + (\Omega + \dot\alpha)\psi_1 + \dot\beta\cos\gamma \\ q &= \frac{v}{R}\vartheta_2 + (\Omega + \dot\alpha)\psi_2 + \dot\gamma \\ r &= \frac{v}{R}\vartheta_3 + (\Omega + \dot\alpha)\psi_3 + \dot\beta\sin\gamma \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Пусть $\Omega_0$ и $\Omega_1$ — угловые скорости трехгранников $x^\circ y^\circ z^\circ$ и $xyz$, определенных ортами $\mathbf{i}^\circ$, $\mathbf{j}^\circ$, $\mathbf{k}^\circ$ и $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно; тогда [1]

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{j}^\circ\frac{v}{R} + \mathbf{k}^\circ\Omega, \qquad \boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{i}p + \mathbf{j}q + \mathbf{k}r \tag{2.1}$$

Имеем очевидные равенства

$$\frac{d\mathbf{i}^\circ}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{i}^\circ = \left(\frac{d\mathbf{i}^\circ}{dt}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{i}^\circ \qquad (\mathbf{i}^\circ\mathbf{j}^\circ\mathbf{k}^\circ) \tag{2.2}$$

Здесь индексы $xyz$ относятся к локальной производной, а символы ($\mathbf{i}^\circ$ $\mathbf{j}^\circ$ $\mathbf{k}^\circ$) рядом с формулой означают, что остальные равенства получаются циклической перестановкой. Далее

$$\mathbf{i}^\circ = \mathbf{i}\theta_1 + \mathbf{j}\theta_2 + \mathbf{k}\theta_3, \qquad \mathbf{j}^\circ = \mathbf{i}\vartheta_1 + \mathbf{j}\vartheta_2 + \mathbf{k}\vartheta_3, \qquad \mathbf{k}^\circ = \mathbf{i}\psi_1 + \mathbf{j}\psi_2 + \mathbf{k}\psi_3$$

Учитывая, что

$$\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{i}^\circ = \mathbf{j}^\circ\Omega - \mathbf{k}^\circ\frac{v}{R}, \qquad \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{j}^\circ = -\mathbf{i}^\circ\Omega, \qquad \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{k}^\circ = \mathbf{i}^\circ\frac{v}{R}$$

получим обобщенные уравнения Пуассона в виде

$$\frac{d\theta_1}{dt} + q\theta_3 - r\theta_2 = \Omega\vartheta_1 - \frac{v}{R}\psi_1 \qquad (123,\ pqr) \tag{2.3}$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} + q\vartheta_3 - r\vartheta_2 = -\Omega\theta_1 \qquad (123,\ pqr) \tag{2.4}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} + q\psi_3 - r\psi_2 = \frac{v}{R}\theta_1 \qquad (123,\ pqr) \tag{2.5}$$

Здесь символы (123, $pqr$) означают, что остальные уравнения получаются циклической перестановкой.

3. Допустим, что $v$ и $\Omega$ постоянны, а $N(\varepsilon)$ удовлетворяет условию [1]

$$N(\varepsilon) = -\frac{4B'^2}{mlR}\sin\varepsilon\cos\varepsilon \tag{3.1}$$

Тогда, согласно последнему уравнению системы (1.2), с точностью до слагаемого $-2Id^2\varepsilon / dt^2$, имеем

$$2B' \cos \varepsilon = mlRq \qquad (3.2)$$

Заметим здесь же, что если в схеме управления датчиком момента $N(\varepsilon)$ предусмотрена возможность двухкратного дифференцирования сигнала, пропорционального текущему значению угла $\varepsilon$, то можно прийти к соотношению (3.2), не пренебрегая членом $-2Id^2\varepsilon / dt^2$. В этом случае $N(\varepsilon)$ должен удовлетворять условию

$$N(\varepsilon) = -\frac{4B'^2}{mlR} \sin \varepsilon \cos \varepsilon - 2I \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \qquad (3.3)$$

Осуществляемое по формуле (3.3) управление датчиком момента потребует, конечно, исследования устойчивости самой системы управления.

Пользуясь формулой (3.2), получаем уравнения (1.2) в виде

$$\begin{gathered}
A \frac{dp}{dt} + (C - B_1) qr = -\left(F - m\frac{v^2}{R}\right) l\psi_2 - mvl\Omega\vartheta_2 \\
B_1 \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = \left(F - m\frac{v^2}{R}\right) l\psi_1 + mvl\Omega\vartheta_1 \qquad (3.4) \\
C \frac{dr}{dt} + (B_1 - A) pq = 0 \qquad (B_1 = B + mlR)
\end{gathered}$$

4. Переходя к получению первого интеграла, умножим правые и левые части уравнений (3.4) соответственно на $p, q, r$.

Складывая между собой полученные выражения, имеем равенство

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2} A \frac{d}{dt} p^2 + \frac{1}{2} B_1 \frac{d}{dt} q^2 + \frac{1}{2} C \frac{d}{dt} r^2 = \\
= \left(F - m\frac{v^2}{R}\right) l (q\psi_1 - p\psi_2) + mvl\Omega (q\vartheta_1 - p\vartheta_2)
\end{gathered}$$

которое при учете кинематических уравнений (2.4) и (2.5) получает вид

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2} A \frac{d}{dt} p^2 + \frac{1}{2} B_1 \frac{d}{dt} q^2 + \frac{1}{2} C \frac{d}{dt} r^2 - \left(F - m\frac{v^2}{R}\right) l \frac{d\psi_3}{dt} - mvl\Omega \frac{d\vartheta_3}{dt} = \\
= -\frac{v}{R}\left(F - m\frac{v^2}{R} - mR\Omega^2\right) l\theta_3 \qquad (4.1)
\end{gathered}$$

Умножим теперь уравнения (3.4) и (2.5) соответственно на $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ и $Ap, B_1q, Cr$.

Складывая левые и правые части полученных выражений и принимая во внимание, что $\psi_2\vartheta_1 - \psi_1\vartheta_2 = \theta_3$, будем иметь

$$\begin{gathered}
A \frac{d}{dt} (p\psi_1) + B_1 \frac{d}{dt} (q\psi_2) + C \frac{d}{dt} (r\psi_3) = \\
= mvl\Omega\theta_3 + \frac{v}{R} (Ap\theta_1 + B_1q\theta_2 + Cr\theta_3) \qquad (4.2)
\end{gathered}$$

Умножим затем уравнения (3.4) и (2.4) соответственно на $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, и $Ap, B_1q, Cr$; складывая между собой полученные выражения, имеем также

$$A\frac{d}{dt}(p\vartheta_1)+B_1\frac{d}{dt}(q\vartheta_2)+C\frac{d}{dt}(r\vartheta_3)=$$
$$=-\left(F-m\frac{v^2}{R}\right)l\theta_3-\Omega\left(Ap\theta_1+B_1q\theta_2+Cr\theta_3\right) \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, что

$$\left[A\frac{d}{dt}(p\psi_1)+B_1\frac{d}{dt}(q\psi_2)+C\frac{d}{dt}(r\psi_3)\right]\Omega+$$
$$+\left[A\frac{d}{dt}(p\vartheta_1)+B_1\frac{d}{dt}(q\vartheta_2)+C\frac{d}{dt}(r\vartheta_3)\right]\frac{v}{R}=$$
$$=-\frac{v}{R}\left(F-m\frac{v^2}{R}-mR\Omega^2\right)l\theta_3 \tag{4.4}$$

Сопоставляя это выражение с (4.1), немедленно получаем интегрируемую комбинацию

$$\frac{1}{2}A\frac{d}{dt}p^2+\frac{1}{2}B_1\frac{d}{dt}q^2+\frac{1}{2}C\frac{d}{dt}r^2-\left(F-m\frac{v^2}{R}\right)l\frac{d\psi_3}{dt}-mvl\Omega\frac{d\vartheta_3}{dt}=$$
$$=\left[A\frac{d}{dt}(p\psi_1)+B_1\frac{d}{dt}(q\psi_2)+C\frac{d}{dt}(r\psi_3)\right]\Omega+$$
$$+\left[A\frac{d}{dt}(p\vartheta_1)+B_1\frac{d}{dt}(q\vartheta_2)+C\frac{d}{dt}(r\vartheta_3)\right]\frac{v}{R} \tag{4.5}$$

Отсюда получается искомый первый интеграл

$$V\equiv\frac{1}{2}\left(Ap^2+B_1q^2+Cr^2\right)-\left(F-m\frac{v^2}{R}\right)l\psi_3-mvl\Omega\vartheta_3-$$
$$-\left(Ap\psi_1+B_1q\psi_2+Cr\psi_3\right)\Omega-\left(Ap\vartheta_1+B_1q\vartheta_2+Cr\vartheta_3\right)\frac{v}{R}=C_1 \tag{4.6}$$

Заметим, что при пренебрежении инерционными слагаемыми, содержащими в качестве множителей моменты инерции $A$, $B$, $C$, выражение (4.6) с точностью до постоянных слагаемых переходит в интеграл, полученный Д. Р. Меркиным [2].

5. Интеграл (4.6) можно использовать при анализе устойчивости движения гирогоризонткомпаса. Для этого обратимся к уравнениям (3.4) и выражениям (1.1) и (1.4). Из них следует, что положениям равновесия системы отвечают следующие значения координат $\alpha$, $\beta$, $\gamma$:

$$\alpha=0,\qquad \beta=\beta^*,\qquad \gamma=0 \tag{5.1}$$

причем $\beta^*$ удовлетворяет уравнению

$$(C-B_1)\left\{\frac{1}{2}\left[\Omega^2-\left(\frac{v}{R}\right)^2\right]\sin 2\beta^*+\frac{v}{R}\Omega\cos 2\beta^*\right\}=$$
$$=-\left(F-m\frac{v^2}{R}\right)l\sin\beta^*-mvl\Omega\cos\beta^* \tag{5.2}$$

Движение, определяемое равенствами (5.1), примем в качестве невозмущенного. Положим теперь в возмущенном движении

$$\alpha=x_1,\qquad \beta=\beta^*+x_2,\qquad \gamma=x_3 \tag{5.3}$$

Обозначив через $V_0$ значение функции $V$ при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$, составим разность $V - V_0$. Имеем

$$\begin{aligned} V - V_0 = {} & \frac{1}{2}(B_1 \sin^2\beta^* + C\cos^2\beta^*)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}A\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}B_1\dot{x}_3^2 + \\ & + B_1 \sin\beta^* \dot{x}_1\dot{x}_3 + \frac{1}{2}\frac{v}{R}\left[-A\frac{v}{R} + B_1\cos\beta^*\left(\frac{v}{R}\cos\beta^* + \Omega\sin\beta^*\right) + \right. \\ & \left. + C\sin\beta^*\left(\frac{v}{R}\sin\beta^* - \Omega\cos\beta^*\right) - mlR\Omega\sin\beta^*\right]x_1^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left\{(C - B_1)\left[\left(\Omega\cos\beta^* - \frac{v}{R}\sin\beta^*\right)^2 - \left(\Omega\sin\beta^* + \frac{v}{R}\cos\beta^*\right)^2\right] + \right. \\ & \left. + \left(F - m\frac{v^2}{R}\right)l\cos\beta^* - mvl\Omega\sin\beta^*\right\}x_2^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left[(C - A)\left(\Omega\cos\beta^* - \frac{v\sin\beta^*}{R}\right)^2 + \left(F - \frac{mv^2}{R}\right)l\cos\beta^* - mvl\Omega\sin\beta^*\right]x_3^2 + \\ & + \frac{v}{R}\left[(C - A)\left(\frac{v}{R}\sin\beta^* - \Omega\cos\beta^*\right) - mlR\Omega\right]x_1x_3 + \cdots \end{aligned} \tag{5.4}$$

где точками обозначены члены высшего порядка относительно $x_s$ и $\dot{x}_s$.

Выражение (5.4) можно упростить, если сохранить в нем члены второго порядка уже в отношении $x_s$, $\beta^*$ и соответствующих производных. Тогда имеем

$$\begin{aligned} V - V_0 = {} & \frac{1}{2}C\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}A\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}B_1\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}(B_1 - A)\left(\frac{v}{R}\right)^2 x_1^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left\{(C - B_1)\left[\Omega^2 - \left(\frac{v}{R}\right)^2\right] + \left(F - m\frac{v^2}{R}\right)l\right\}x_2^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left[(C - A)\Omega^2 + \left(F - m\frac{v^2}{R}\right)l\right]x_3^2 - \left[mvl\Omega + (C - A)\frac{v}{R}\Omega\right]x_1x_3 + \cdots \end{aligned} \tag{5.5}$$

Замечая, что первые три слагаемых в выражении (5.5) представляют определенно положительную квадратичную форму, рассмотрим форму

$$\begin{aligned} W \equiv {} & \frac{1}{2}(B_1 - A)\left(\frac{v}{R}\right)^2 x_1^2 + \frac{1}{2}\left\{\left(F - m\frac{v^2}{R}\right)l + (C - B_1)\left[\Omega^2 - \left(\frac{v}{R}\right)^2\right]\right\}x_2^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(F - m\frac{v^2}{R}\right)l + (C - A)\Omega^2\right]x_3^2 - \left[mvl\Omega + (C - A)\frac{v}{R}\Omega\right]x_1x_3 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Применяя к (5.6) критерий Сильвестра, получаем, что $W$ будет определенно положительной для достаточно малых значений $x_s$ при выполнении следующих неравенств:

$$\begin{gathered} B - A + mlR > 0, \qquad Fl - mlR\Omega^2 + (C - B)\left[\Omega^2 - \left(\frac{v}{R}\right)^2\right] > 0 \\ \left(F - m\frac{v^2}{R}\right)\left(1 + \frac{B - A}{mlR}\right) - mR\Omega^2\left[1 + \frac{C - A}{mlR}\left(1 + \frac{C - B}{mlR}\right)\right] > 0 \end{gathered} \tag{5.7}$$

При соблюдении условий (5.7) форма $V - V_0$ также будет определенно положительной.

Так как ее полная производная в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, то невозмущенное движение (5.1) будет устойчивым по Ляпунову.

Достаточные условия устойчивости (5.7) допускают вырождение на случай прецессионной теории. Действительно, пренебрегая в них членами, содержащими в качестве множителей величины $A$, $B$, $C$, получаем неравенство

$$F - m\frac{v^2}{R} - mR\Omega^2 > 0 \tag{5.8}$$

установленное в работе [2].

Это же условие следует из (5.7) в случае полной кинетической симметрии, когда $A = B = C$.

Если ускорение $v^2/R$ включить в состав ускорения силы тяжести, то из (5.8) получаем неравенство

$$\Omega < \nu \qquad (\nu = \sqrt{g/R}) \tag{5.9}$$

установленное ранее в работах [2-4].

В работе [2] было показано (в прецессионной постановке путем введения малых диссипативных сил), что неравенство (5.9) является не только достаточным, но и необходимым условием устойчивости. Эти же рассуждения применимы и к рассматриваемому случаю.

**6.** Обратимся к трансцендентному уравнению (5.2), из которого легко получим приближенное выражение для $\beta^*$ в случае неподвижного основания. Полагая $\beta^*$ малым и считая $F - mv^2/R \approx mg$, имеем

$$\beta^* = -\frac{(C-B)\,U^2\sin\varphi\cos\varphi}{mgl - (C-B_1)\,U^2\cos 2\varphi} \tag{6.1}$$

Учитывая, что $mgl \gg (C-B_1)\,U^2\cos 2\varphi$, из (6.1) получаем окончательно

$$\beta^* = -\frac{C-B}{mlR}\beta_s \qquad \left(\beta_s = \frac{1}{2}\frac{U^2\sin 2\varphi}{\nu^2}\right) \tag{6.2}$$

Величина $\beta^*$, исчисляемая долями дуговой секунды, практического значения не имеет.

Поступила 27 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гирорамы. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
3. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
4. Кошляков В. Н. Об устойчивости гирогоризонткомпаса при наличии диссипативных сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.