Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. М. Матросов

(Казань)

В работе делается попытка получения признаков устойчивости движения с использованием одновременно нескольких функций V. При этом каждая функция V может удовлетворять менее жестким требованиям, чем в соответствующей теореме второго метода Ляпунова [1,2] с одной функцией. Это позволяет надеяться, что использование нескольких функций V может привести к более гибкому аппарату.

Работа базируется на теории дифференциальных неравенств Чаплыгина [3]. Именно, применяется следующая теорема о дифференциальных неравенствах Т. Важевского [4].

Пусть дана система уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(y_1, \ldots, y_k, t) \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{0.1}$$

где f_s определены и непрерывны в некоторой открытой области Ω $k+1$-мерного пространства; каждая функция f_s является неубывающей по $y_1, \ldots, y_{s-1}, y_{s+1}, \ldots, y_k$ в области Ω. Тогда через всякую внутреннюю точку $(y_{10}, \ldots, y_{k0}, t_0)$ области Ω проходит один верхний интеграл $y^+(t, y_0, t_0)$ и один нижний интеграл $y^-(t, y_0, t_0)$ системы (0.1) относительно этой точки[1] и интервала $[t_0, \alpha)$. Число α может быть выбрано равным ∞ или таким, что при $t \to \alpha$ изображающая точка вдоль верхнего (нижнего) интеграла стремится к границе Ω.

Пусть даны непрерывно дифференцируемые в интервале $[t_0, \alpha)$ функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ такие, что $\psi_s(t_0) = y_{s0}$, $(\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t), t) \in \Omega$ при $t \in [t_0, \alpha)$.

1. Если

$$\frac{d\psi_s(t)}{dt} \leqslant f_s(\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t), t) \quad \text{при } t \in [t_0, \alpha) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

то

$$\psi_s(t) \leqslant y_s^+(t, y_0, t_0) \quad \text{при } t \in [t_0, \alpha) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

2. Если же

$$\frac{d\psi_s(t)}{dt} \geqslant f_s(\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t), t) \quad \text{при } t \in [t_0, \alpha) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

то будет

$$\psi_s(t) \geqslant y_s^-(t, y_0, t_0) \quad \text{при } t \in [t_0, \alpha) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Можно было бы применить и другие известные теоремы о дифференциальных и интегральных неравенствах [5]. Тогда условие 3° в полученных признаках устойчивости и неустойчивости заменилось бы несколько иным требованием.

Полученные теоремы об устойчивости с несколькими функциями V позволяют построить признаки устойчивости и неустойчивости, использующие свойства производных функции V порядка выше первого. Подробно рассматриваются такого рода признаки с производными первого и второго порядка.

---

[1] Характеризующиеся тем, что для всякого интеграла $y(t, y_0, t_0)$, проходящего через точку (y_0, t_0), для $t \in [t_0, \alpha)$:

$$y_s^-(t, y_0, t_0) \leqslant y_s(t, y_0, t_0) \leqslant y_s^+(t, y_0, t_0) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

§ 1. Пусть дана система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Совокупность n вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ считаем точкой x в n-мерном пространстве R^n с нормой $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

Функции $X_i(x, t)$ определены, непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица по x в области Γ

$$\|x\| \leqslant H, \qquad t \geqslant 0 \qquad (H = \text{const} > 0)$$

Пусть

$$X_i(0, t) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

т. е. система (1.1) допускает невозмущенное движение $x = 0$.

Возмущенные движения описываются совокупностью функций

$$x(t, x_0, t_0) = \{x_1(t, x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0), \ldots, x_n(t, x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0)\}$$

определенных и непрерывных при $(x_0, t_0) \in \Gamma$, $t \geqslant t_0$, непрерывно дифференцируемых по t.

Рассмотрим вещественные функции $V_1(x, t), \ldots, V_k(x, t)$, определенные и непрерывные в области Γ вместе со своими производными $\dot{V}_1(x, t), \ldots, \dot{V}_k(x, t)$ по времени t, взятыми в силу уравнений возмущенного движения (1.1), и уничтожающиеся на невозмущенном движении, т. е. $V_s(0, t) \equiv 0, \dot{V}_s(0, t) \equiv 0$. Для совокупности этих функций $V = (V_1, \ldots, V_k)$ введем норму $\|V\| = |V_1| + \ldots + |V_k|$.

Рассматривая функции $f_1(V, t), \ldots, f_k(V, t)$ будем предполагать их вещественными, определенными и непрерывными в области G

$$\|V\| < R_1, \quad t \geqslant 0 \qquad (R_1 > R = \sup[\|V(x, t)\| \text{ при } (x, t) \in \Gamma] \text{ или } R_1 = \infty)$$

Функцию $f_s(V, t)$ условимся называть неубывающей по функциям $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$ в G, если для любых точек

$$(V_1^*, \ldots, V_k^*, t^*) \in G, (V_1^{**}, \ldots, V_{s-1}^{**}, V_s^*, V_{s+1}^{**}, \ldots, V_k^{**} t^*) \in G$$

удовлетворяющих неравенствам

$$V_1^{**} \geqslant V_1^*, \ldots, V_{s-1}^{**} \geqslant V_{s-1}^*, V_{s+1}^{**} \geqslant V_{s+1}^*, \ldots, V_k^{**} \geqslant V_k^*$$

имеет место

$$f_s(V_1^{**}, \ldots, V_{s-1}^{**}, V_s^*, V_{s+1}^{**}, \ldots, V_k^{**}, t^*) \geqslant f_s(V_1^*, \ldots, V_k^*, t^*)$$

Например, функция $f_s(V_s, t)$, не зависящая от $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$ является неубывающей по $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$ в G.

Теорема 1.1. Пусть существуют функции $V_1(x, t), \ldots, V_k(x, t)$, обладающие в Γ следующими свойствами.

1°. Функции $V_1(x, t) \geqslant 0, \ldots, V_l(x, t) \geqslant 0$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$, а функция $V_1(x, t) + \ldots + V_l(x, t)$ определенно положительна.

2°. Производные в силу системы (1.1)

$$\dot{V}_s = f_s(V, t) + W_s(x, t) \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.2}$$

где $W_s(x, t) \leqslant 0$ и непрерывны.

3°. Каждая функция $f_s(V, t)$ является неубывающей по функциям $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$ в G.

4°. Решение $y_1 = 0, \ldots, y_k = 0$ системы

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(y_1, \ldots, y_k, t) \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво) относительно $y_1, \ldots, y_l$ при условии $y_{10} \geqslant 0, \ldots, y_{l0} \geqslant 0$.

Тогда невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво).

Если при этом функции $V_1(x, t), \ldots, V_k(x, t)$ допускают бесконечно малый высший предел и устойчивость нулевого решения системы (1.3) равномерна по t_0 (соответственно асимптотическая устойчивость равномерна по $y_{10}, \ldots, y_{k0}, t_0$), то и устойчивость невозмущенного движения будет равномерной по t_0 (соответственно асимптотическая устойчивость будет равномерной по x_0, t_0).

Доказательство. Пусть условия п. п. 1°, 2°, 3° выполнены и нулевое решение системы (1.3) устойчиво относительно $y_1, \ldots, y_l$ при условии $y_{10} \geqslant 0, \ldots, y_{l_0} \geqslant 0$.

Пусть дано любое положительное число A $(0 < A < H)$. Согласно 1°

$$0 < \inf [V_1(x, t) + \ldots + V_l(x, t) \quad \text{при } \|x\| \geqslant A,\ t \geqslant 0] \leqslant R$$

Поэтому если взять положительное число

$$\varepsilon(A) < \inf [V_l(x, t) + \ldots + V_l(x, t) \quad \text{при } \|x\| \geqslant A,\ t \geqslant 0]$$

то

$$\|x\| < A \quad \text{при } t \geqslant 0, \qquad V_1(x, t) + \ldots + V_e(x, t) \leqslant \varepsilon$$

В силу предположения об устойчивости нулевого решения системы (1.3) по отношению к $y_1, \ldots, y_l$ при $y_{10} \geqslant 0, \ldots, y_{l_0} \geqslant 0$ по $\varepsilon(A)$ для $t_0 \geqslant 0$ найдется положительное число $\delta(\varepsilon, t_0)$ $(0 < \delta < \varepsilon < R)$ такое, что

$$|y_1^+(t, y_0, t_0)| + \ldots + |y_l^+(t, y_0, t_0)| < \varepsilon$$

для всех $t \geqslant t_0$ при $|y_{10}| + \ldots + |y_{k0}| \leqslant \delta$, $y_{10} \geqslant 0, \ldots, y_{l0} \geqslant 0$ (верхний интеграл $y^+(t, y_0, t_0)$ системы (1.3) существует по теореме Важевского).

Функция $|V_1(x, t_0)| + \ldots + |V_k(x, t_0)|$ допускает бесконечно малый высший предел, поэтому для δ и t_0 найдется положительное число $\eta(\delta, t_0) = \eta(A, t_0)$ такое, что

$$|V_1(x_0, t_0)| + \ldots + |V_k(x_0, t_0)| \leqslant \delta \quad \text{при } \|x_0\| \leqslant \eta$$

Покажем, что в любом возмущенном движении $x(t, x_0, t_0)$

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < A \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

и при начальных данных $\|x_0\| \leqslant \eta$, $t_0 \geqslant 0$ $(0 < \eta(A, t_0) < A)$.

Предположим, что это не так, т. е. что найдутся x_0^*, t^* $(\|x_0^*\| \leqslant \eta,\ t^* > t_0)$ такие, что $\|x(t, x_0^*, t_0)\| < A$ при $t \in [t_0, t^*)$, но $\|x(t^*, x_0^*, t_0)\| = A$.

Положим $y_{s0}^* = V_s(x_0^*, t_0)$. Тогда по выбору η

$$|y_{10}^*| + \ldots + |y_{k0}^*| = |V_1(x_0^*, t_0^*)| + \ldots + |V_k(x_0^*, t_0)| \leqslant \delta$$

а согласно 1°

$$y_{10}^* \geqslant 0, \ldots, y_{l0}^* \geqslant 0$$

и по выбору δ

$$|y_1^+(t, y_0^*, t_0)| + \ldots + |y_l^+(t, y_0^*, t_0)| < \varepsilon \text{ на } [t_0, t^*]$$

Рассмотрим функции $V_s(x(t, x_0^*, t_0), t)$, непрерывно дифференцируемые по t в интервале $[t_0, t^* + \Delta t)$ (как решение системы (1.1), (1.2) с непрерывными правыми частями). В силу 2°

$$\frac{dV_s(x(t, x_0^*, t_0), t)}{dt} \leqslant f_s(V(x(t, x_0^*, t_0), t), t) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

при $t \in [t_0, t^* + \Delta t)$ ($\Delta t > 0$ достаточно малое), поэтому, применяя теорему Важевского, получаем

$$V_s(x(t, x_s^*, t_0), t) \leqslant y_s^+(t, y_0^*, t_0) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

при $t \in [t_0, t^*]$, а следовательно,

$$\sum_{s=1}^{l} V_s(x(t, x_0^*, t_0), t) \leqslant \sum_{s=1}^{l} |y_s^+(t, y_0^*, t_0)| < \varepsilon$$

Но тогда, согласно выбору ε, $\|x(t, x_0^*, t_0)\| < A$ для $t \in [t_0, t^*]$ и, в частности, $\|x(t^*, x_0^*, t_0)\| < A$, что противоречит сделанному предположению. Противоречие и доказывает устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ системы (1.1).

При этом, если устойчивость нулевого решения системы (1.3) равномерна по t_0 и функции $V_1, \ldots, V_k$ допускают бесконечно малый высший предел, то числа $\delta(\varepsilon)$ и $\eta(\delta) = \eta(A)$ могут быть выбраны не зависящими от t_0, т. е. устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ системы (1.1) будет равномерной по t_0.

Пусть нулевое решение системы (1.3) асимптотически устойчиво относительно $y_1, \ldots, y_l$ при условии $y_{10} \geqslant 0, \ldots, y_{l0} \geqslant 0$, т. е. по любому положительному числу $\alpha < \delta$ для данных t_0, y_0 ($\|x_0\| \leqslant \eta$, $|y_{10}| + \ldots + |y_{k0}| \leqslant \delta$, $y_{10} \geqslant 0, \ldots, y_{l0} \geqslant 0$) найдется $T(\alpha, t_0, y_0) > 0$ такое, что

$$\sum_{s=1}^{l} |y_s^+(t, y_0, t_0)| < \alpha \quad \text{при } t > t_0 + T$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^{l} V_s(x(t, x_0, t_0)\, t) < \alpha \quad \text{при } t > t_0 + T$$

Действительно, предположив от противного существование $t^+ \in (t_0 + T, \infty)$ такого, что $V_1(x(t^+, x_0, t_0), t^+) + \ldots + V_l(x(t^+, x_0, t_0), t^+) \geqslant \alpha$, придем к противоречию с оценкой

$$\sum_{s=1}^{l} V_s(x(t, x_0, t_0), t) \leqslant \sum_{s=1}^{l} y_s^+(t, y_0, t_0)$$

которую можно вывести для отрезка $[t_0, t^+]$ аналогично предыдущему.

Итак, для $\|x_0\| \leqslant \eta$ имеем

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{s=1}^{l} V_s(x(t, x_0, t_0), t) = 0 \quad .$$

В силу определенной положительности $V_1(x, t) + \ldots + V_l(x, t)$ отсюда следует, что $\lim \|x(t, x_0, t_0)\| = 0$ при $t \to \infty$, и что невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Если при этом асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.3) равномерна по y_0, t_0 и функции $V_1, \ldots, V_k$ допускают бесконечно малый высший предел, то число T может быть выбрано не зависящим от t_0, y_0, x_0, т. е.

$$\sum_{s=1}^{l} V_s(x(t, x_0, t_0), t) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

равномерно по x_0, t_0. Отсюда легко заключить, что при $t \to \infty$ и $\|x(t, x_0, t_0)\| \to 0$ равномерно по x_0, t_0, а вслед за этим, что асимптотическая устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ системы (1.1) равномерна по x_0, t_0. Теорема доказана.

Следствие ($k = l = 1$). Пусть в Г существует определенно положительная функция $V(x, t)$, производная которой в силу системы (1.1)

$$\dot{V} = f(V, t) + W(x, t)$$

где $W(x, t) \leqslant 0$, а $f(V, t)$ такова, что решение $y = 0$ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \tag{1.4}$$

устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво) при $y_0 \geqslant 0$.

Тогда невозмущенное движение $x=0$ системы (1.1) устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво). Если при этом функция V допускает бесконечно малый высший предел и устойчивость нулевого решения уравнения (1.4) равномерна по t_0 (соответственно асимптотическая устойчивоть равномерна по x_0, t_0), то и устойчивость невозмущенного движения будет равномерной по t_0 (соответственно асимптотическая устойчивость будет равномерной по x_0, t_0).

Это предложение доказано К. Кордуняну [6] и, в свою очередь, обобщает: классическую теорему Ляпунова [1] об устойчивости движения

$$f(V,\ t)\equiv 0$$

ее модификацию, предложенную Х. И. Ибрашевым [7]

$$f=L\,|\,\theta(t)\,|\,V,\qquad L=\text{const}>0,\qquad \int\limits_0^\infty |\,\theta(t)\,|\,dt<\infty$$

теорему К. П. Персидского [8] о равномерной устойчивости

$$f\equiv 0$$

теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости [1] и ее модификации, полученные Массера [9], Н. Н. Красовским [10], В. И. Зубовым [11]

$$f=-\varphi(t)\,c(V)\ \ (\varphi(t)\geqslant 0,\ \int\limits_0^\infty \varphi\,dt=\infty,\ \ c(0)=0,\ \ c \text{ строго возрастающая функция } V$$

теорему Малкина [12] о равномерной асимптотической устойчивости [9]

$$f=-c(V)$$

Оно примыкает также к результатам Стокса [13] и Л. Ф. Рахматуллиной [14].

Пример 1.1. Задача устойчивости в смысле Ляпунова тел переменной массы. Пусть правые части уравнений возмущенного движения (1.1) голоморфные функции x с непрерывно дифференцируемыми и ограниченными коэффициентами, стремящимися к постоянным при $t\to\infty$, т. е. $\lim X_i(x,\ t)=X_i^*(x)$ при $t\to\infty$

В особенных по Ляпунову для предельной системы

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i^*(x)\qquad (i=1,\ldots,n)$$

случаях М. Ш. Аминовым предложен [15] способ построения функции V. Функция М. Ш. Аминова имеет вид квадратичной формы

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} p_{ij}(t)\,x_i x_j\qquad (p_{ij}(t)=p_{ji}(t))$$

производная которой в силу уравнений возмущенного движения (1.1)

$$\dot V=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{dp_{ij}}{dt}\,x_i x_j$$

Требования определенной положительности функции V и постоянной отрицательности производной $\dot V$ согласно теореме Ляпунова являются достаточными условиями устойчивости. Для тел переменной массы они обычно не совпадают с необходимыми условиями устойчивости [15]. Посмотрим, какое смягчение этих достаточных условий устойчивости может дать применение функции М. Ш. Аминова в теореме Кордуняну. Предполагая, что V определенно положительна, найдем положительное число B такое, что

$$V\geqslant\frac{1}{B}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2$$

Производную $\dot V$ преобразуем следующим образом

$$\dot V=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|\frac{dp_{ij}}{dt}\right|(x_i^2+x_j^2)-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|\frac{dp_{ij}}{dt}\right|(x_i\pm x_j)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|\frac{dp_{ij}}{dt}\right|(x_i^2+x_j^2)\leqslant\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|\frac{dp_{ij}}{dt}\right|\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\leqslant BV\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|\frac{dp_{ij}}{dt}\right|$$

Если

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| \frac{dp_{ij}}{dt} \right| dt < \infty \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

то решение $y = 0$ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = B \sum_{i, j=1}^{n} \left| \frac{dp_{ij}}{dt} \right| y$$

устойчиво и условия теоремы Кордуняну (даже условия теоремы Х. И. Ибрашева) выполнены, так что невозмущенное движение $x = 0$ при этом устойчиво.

Но для тел переменной массы

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} \frac{dp_{ij}}{dt} dt \right| = | p_{ij}(\infty) - p_{ij}(t_0) | < \infty$$

поэтому (1.5) имеет место, если производные dp_{ij} / dt меняют знак на полуоси $[0, \infty)$ конечное число раз. По-видимому, это соответствует большинству практически интересных случаев. В названных случаях, таким образом, единственным достаточным условием устойчивости является условие определенной положительности квадратичной формы V, которое, как следует из результатов М. Ш. Аминова [15], часто является и необходимым условием устойчивости.

Пример 1.2.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (\sin t + e^{-t}) x_1 + (\sin t - e^{-t}) x_2 - \sin^2 t (x_1^3 + x_1 x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= (\sin t - e^{-t}) x_1 + (\sin t + e^{-t}) x_2 - \sin^2 t (x_1^2 x_2 + x_2^3) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами

$$V = {}^1/_2 (x_1^2 + 2Bx_1x_2 + Ax_2^2)$$

Ее производная в силу системы (1.6)

$$\dot V = \dot V^{(2)} + \dot V^{(4)}$$

$$\begin{aligned} \dot V^{(2)} = {} & [(A + B) \sin t + (A - B) e^{-t}] x_1^2 + [(1 + A + 2B) \sin t + (2B - A - 1) e^{-t}] x_1x_2 + \\ & + [(A + B) \sin t + (A - B) e^{-t}] x_2^2 \end{aligned}$$

$$\dot V^{(4)} = - \sin^2 t [x_1^4 + 2Bx_1^3x_2 + (1 + A) x_1^2x_2^2 + 2Bx_1x_2^3 + Ax_2^4]$$

При любых A и B функция V не удовлетворяет теореме Ляпунова об устойчивости движения. Попытаемся удовлетворить теореме Кордуняну, полагая $\dot V^{(2)} = \varphi(t) V$. Это равенство возможно в двух случаях:

1) $A_1 = B_1 = 1, \qquad \varphi_1(t) = 4 \sin t \qquad$ при $V_1 = {}^1/_2 (x_1 + x_2)^2$

2) $A_2 = 1, \quad B_2 = -1, \qquad \varphi_2(t) = 4e^{-t} \qquad$ при $V_2 = {}^1/_2 (x_1 - x_2)^2$

Функция V_1, а также V_2 не будет определенно положительной функцией и, следовательно, не удовлетворяет теореме Кордуняну. Но две функции V_1 и V_2 удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Действительно:

1°. Функции $V_1 \geqslant 0$, $V_2 \geqslant 0$ и допускают бесконечно малый высший предел, а функция $V_1 + V_2 = x_1^2 + x_2^2$ определенно положительна.

2°. Производные $\dot V_1 \leqslant 4 \sin t\, V_1$, $\dot V_2 \leqslant 4e^{-t} V_2$.

3°. Функция $4 \sin t\, V_1$ не убывает по V_2, а функция $4e^{-t} V_2$ не убывает по V_1.

4°. Нулевое решение уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = 4 \sin t y_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = 4e^{-t} y_2$$

устойчиво равномерно по t_0.

Так что невозмущенное движение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ системы (1.6) устойчиво равномерно по t_0.

§ 2. Пусть функции $f_s(V, t)$ определены и непрерывны в G или в полупространстве E $(t \geqslant 0)$ $k+1$-мерного пространства $\{V, t\}$.

Определение. Нулевое решение системы (1.3) называется $+y_1$ — неустойчивым (соответственно $+y_1$ — неустойчивым в G), если для любых положительных чисел δ, ε, t_0, удовлетворяющих условиям $0<\delta<\varepsilon<R$ и ε достаточно мало (соответственно $\delta<\varepsilon=R$, или $\delta<\varepsilon<\infty$ при сколь угодно большом ε) найдется положительное число T и точка x_0 ($\|x_0\| \leqslant \delta$) такие, что всякое решение $y(t, y_0, t_0)$системы (1.3) с начальными данными $y_{s0}=V_s(x_0, t_0)$ $(s=1, \ldots, k)$, $t_0 \geqslant 0$ при всех значениях $t \in [t_0, t_0+T]$ остается в G и удовлетворяет условиям

$$y_1(t_0+T, y_{10}, \ldots, y_{k0}, t_0) > \varepsilon, \quad |y_{10}| + \ldots + |y_{k0}| \leqslant \delta$$

Например, нулевое решение уравнения

$$\frac{dy_1}{dt} = \varphi(y_1)\, p(t) \qquad \left(p(t) \geqslant 0, \ \int_{t_0}^{\infty} p(t)\, dt = \infty\right) \tag{2.1}$$

где $\varphi(y_1) > 0$ при $y_1 > 0$ и $\varphi(0) = 0$, $+y_1$ — неустойчиво в полуплоскости E $(t \geqslant 0)$, если функция $V_1(x, t)$ может принимать положительные значения при сколь угодно малых $\|x\|$ и любых $t > 0$.

Теорема 2.1. Пусть существуют функции $V_1(x, t), \ldots, V_k(x, t)$, обладающие в Γ следующими свойствами.

1°. Функция $V_1(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел (соответственно ограничена).

2°. Производные в силу системы (1.1)

$$\dot{V}_s = f_s(V, t) + W_s(x, t) \qquad (s=1, \ldots, k) \tag{2.2}$$

где $W_s(x, t) \geqslant 0$ и непрерывны.

3°. Каждая функция $f_s(V, t)$ будет неубывающей по функции $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$ в области G.

4°. Нулевое решение системы

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(y_1, \ldots, y_k, t) \qquad (s=1, \ldots, k) \tag{2.3}$$

$+y_1$ — неустойчиво (соответственно $+y_1$ — неустойчиво в G).

Тогда невозмущенное движение $x=0$ системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Согласно 1°, для любого достаточно малого $0<\varepsilon<R$ (соответственно для $\varepsilon=R$ или достаточно большого $\varepsilon>0$) найдется h $(0<h<H)$ такое, что $V_1(x, t) \leqslant \varepsilon$ при $\|x\| \leqslant h$, $t \geqslant 0$. Требуется доказать, что для произвольного числа A $(0<A<h)$ и $t_0 \geqslant 0$ не найдется λ $(0<\lambda<A)$ такого, чтобы при $=x_0\| \leqslant \lambda$ для всех $t \geqslant t_0$ было $\|x(t, x_0, t_0)\| < A$.

Предположим, от противного, что такое λ существует. Обозначим $y_{s0}=V_s(x_0, t_0)$. В силу непрерывности V_s по x_0 можно предположить λ настолько малым, чтобы

$$0 < \sum_{s=1}^{k} |y_{s0}| = \sum_{s=1}^{k} |V_s(x_0, t_0)| < \varepsilon$$

Согласно 4°, найдется $T>0$ и $\|x_0^*\| \leqslant \lambda$ такие, что при всех $t \in [t_0, t_0+T]$ решения $y(t, y_0^*, t_0)$ системы (2.3) будут оставаться в G, а $y_1(t_0+T, y_0^*, t_0) > \varepsilon$.

Причем, по предположению, при всех $t \geqslant 0$ будет

$$\sum_{s=1}^{k} |V_s(x(t, x_0^*, t_0), t)| \leqslant R \ \text{(соответственно} \ \sum_{s=1}^{k} |V_s(x(t, x_0^*, t_0), t)| < \infty)$$

Функции $V_s(x(t, x_0^*, t_0), t)$ непрерывно дифференцируемы в интервале $[t_0, t_0+T+\Delta t)$ и в силу 2° удовлетворяют в нем неравенствам

$$\frac{dV_s(x(t, x_0^*, t_0), t)}{dt} \geqslant f_s(V(x(t, x_0^*, t_0)t), t) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

при $\Delta t > 0$ достаточно малом. Поэтому и в силу 3° применима теорема Важевского, согласно которой существует нижний интеграл $y^-(t, y_0^*, t_0)$ и

$$V_s(x(t, x_0^*, t_0), t) \geqslant y_s^-(t, y_0^*, t_0) \qquad \text{для } t \in [t_0, t_0+T] \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

и, в частности, $V_1(x(t, x_0^*, t_0), t) \geqslant y_1^-(t, y_0^*, t_0)$.

Но тогда $V_1(x(t_0+T; x_0^*, t_0), t_0+T) \geqslant y_1^-(t_0+T, y_0^*, t_0) > \varepsilon$, что, согласно выбору ε, означает $\| x(t_0+T, x_0^*, t_0) \| > h > A$ в противоречие со сделанным предположением. Противоречие и доказывает теорему.

Следствие ($k = 1$). Пусть существует допускающая бесконечно малый высший предел (соответственно ограниченная) функция $V(x, t)$, которая может принимать положительные значения при сколь угодно малых $\| x \|$ и любых $t > 0$, а производная которой в силу системы (1.1) $\dot{V} \geqslant f(V, t)$ где $f(V, t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$ и $0 < V < \sup [V$ при $(x, t) \in \Gamma]$ (соответственно при любых $0 < V < \infty$) и такова, что для любого положительного числа l найдется непрерывная функция

$$m(t) \geqslant 0, \qquad \int_0^\infty m(t)\, dt = \infty$$

такая, что

$$f(V, t) \geqslant m(t) \quad \text{при } t \geqslant 0, \qquad l < V < \sup [V \text{ при } (x, t) \in \Gamma]$$

(соответственно при любых $l < V < \infty$). Тогда невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) неустойчиво.

Это предложение является модификацией теоремы Четаева о неустойчивости [2] и содержит обе классические теоремы Ляпунова [1]

$$f = m(t)\varphi(V), \qquad \varphi(V) > 0 \quad \text{при } V > 0$$

и некоторые их обобщения [9,11].

§ 3. Пусть дана непрерывная в Γ вещественная функция $V(x, t)$, имеющая непрерывные в Γ частные производные по $x_1, \ldots, x_n, t$ до k-го порядка. Пусть функции $X_1, \ldots, X_n$ имеют непрерывные в Γ производные до k — 1-го порядка. Производную $\dot{V}$ функции V в силу системы (1.1) обозначим $V^{(1)}(x, t)$

$$V^{(1)} = \dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x, t) + \frac{\partial V}{dt}$$

Второй производной функции V в силу системы (1.1) назовем

$$V^{(2)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} X_i(x, t) + \frac{\partial V^{(1)}}{dt}$$

Если таким образом определены производные $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(s)}$, то производной порядка $s+1$ функции V в силу системы (1.1) называем

$$V^{(s+1)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^{(s)}(x, t)}{\partial x_i} X_i(x, t) + \frac{\partial V^{(s)}(x, t)}{\partial t} \qquad (s+1 \leqslant k)$$

Из теоремы 1.1 вытекает следующий признак устойчивости движения.

Пусть существует определенно положительная функция $V(x, t)$, производная которой порядка k в силу системы (1.1) удовлетворяет условию $V^{(k)} \leqslant f(V, V^{(1)}, \ldots, V^{(k-1)}, t)$, где функция f является неубывающей по $V, V^{(1)}, \ldots, V^{(k-2)}$ и нулевое решение уравнения

$$\frac{d^k y}{dt^k} = f\left(y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}, t\right)$$

устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво) относительно y при $y_0 \geqslant 0$. Тогда невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво).

Действительно, функции $V_1 = V$, $V_2 = V^{(1)}, \ldots, V_k = V^{(k-1)}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 для $l = 1$, ибо $f_s = V^{(s)}$ $(s = 1, \ldots, k-1)$ не убывают по $V, V^{(1)}, \ldots, V^{(k-1)}$, $af_k = f$ не убывает по $V, V^{(1)}, \ldots, V^{(k-2)}$.

По теореме 2.1 аналогично получаем признак неустойчивости.

Пусть существует допускающая бесконечно малый высший предел (соответственно ограниченная) функция $V(x, t)$, производная порядка k, которой в силу системы (1.1) $V^{(k)} \geqslant f(V, V^{(1)}, \ldots, V^{(k-1)}, t)$, где функция f является неубывающей по $V, V^{(1)}, \ldots, V^{(k-2)}$, и нулевое решение уравнения

$$\frac{d^k y}{dt^k} = f\left(y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}, t\right)$$

$+ y$ — неус ойчиво соответственно в области $|y| + |dy/dt| + \ldots + |d^{k-1}y/dt^{k-1}| \leqslant R$, $t \geqslant 0$ или в полупространстве E $(t \geqslant 0)$ $k+1$-мерного пространства $\{y, dy/dt, \ldots, d^{k-1}y/dt^{k-1}, t\}$. Тогда невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) неустойчиво.

Рассмотрим подробнее случай $k = 2$ и линейной функции f наиболее интересный в приложениях.

Теорема 3.1. Если существует определенно положительная функция $V(x, t)$, вторая производная которой в силу системы (1.1) $V^{(2)} \leqslant p(t) V^{(1)}$, где непрерывная функция $p(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{\infty} \exp \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau\, dt < \infty \tag{3.1}$$

то невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво.

Доказательство. При условиях теоремы функция $f = p(t) V^{(1)}$ является неубывающей по V, ибо не содержит V явно. Нулевое решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = p(t) \frac{dy}{dt}$$

устойчиво по отношению к y, что следует из вида общего решения этого уравнения

$$y(t) = y_0 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \int_{t_0}^{t} \exp \int_{t_0}^{\tau} p(\nu)\, d\nu d\tau$$

и условия ограниченности входящего в него интеграла. Поэтому выполняются условия признака устойчивости, сформулированного в начале этого параграфа, на основании которого и заключаем об устойчивости движения.

[Условию (3.1) удовлетворяют, например, функции

$$p = \text{const} < 0, \qquad p = -\frac{a}{t} \qquad (a = \text{const} > 1)$$

Теорема 3.2. Если существует ограниченная функция $V(x, t)$, вторая производная которой в силу системы (1.1) удовлетворяет условию $V^{(2)} \geqslant aV + 2bV^{(1)}$, где a и b — постоянные, $a \geqslant 0$, причем $b \geqslant 0$, когда $a = 0$, а функция $(\sqrt{b^2+a} - b)V(x, t) + V^{(1)}(x, t)$ может принимать положительные значения при сколь угодно малых $\|x\|$ и любых $t > 0$, то невозмущенное движение системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство. При условиях теоремы функция $f = aV + 2bV^{(1)}$ является неубывающей по V, ибо $a \geqslant 0$. Нулевое решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ay + 2b\frac{dy}{dt}$$

$+ y$ — неустойчиво в полупространстве E $(t \geqslant 0)$ трехмерного пространстве $\{y, dy/dt, t\}$. Действительно, общее решение этого уравнения в случае $a > 0$ есть

$$y = \frac{(\sqrt{b^2+a} - b)y_0 + (dy/dt)_0}{2\sqrt{b^2+a}} e^{(\sqrt{b^2+a}+b)(t-t_0)} + \\ + \frac{(\sqrt{b^2+a} + b)y_0 - (dy/dt)_0}{2\sqrt{b^2+a}} e^{(b-\sqrt{b^2+a})(t-t_0)}$$

Согласно условию теоремы найдется сколь угодно малое $\|x_0\|$ такое, что

$$(\sqrt{b^2+a} - b)V(x_0, t_0) + V^{(1)}(x_0, t_0) = (\sqrt{b^2+a} - b)y_0 + (dy/dt)_0 > 0$$

и, следовательно, $y \to \infty$ при $t \to \infty$. Если же $a = 0$, то общее решение имеет вид

$$y = y_0 + \frac{(dy/dt)_0}{2b}[e^{2b(t-t_0)} - 1] \quad (b > 0), \qquad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 (t - t_0) \quad (b = 0)$$

и также $y \to \infty$ при $t \to \infty$,

$$(dy/dt)_0 = V^{(1)}(x_0, t_0) > 0$$

Так что выполняются условия сформулированного выше признака неустойчивости, что и доказывает теорему.

Вторую производную функции V в силу уравнений возмущенного движения использовал Х. И. Ибрашев, который предложил одну теорему о неустойчивости движения [7]. Можно доказать следующее обобщение названной теоремы Х. И. Ибрашева.

Теорема 3.3. Если существует ограниченная функция $V(x, t)$ такая, что при сколь угодно малых $\|x\|$ и любых $t \geqslant 0$ функции $V(x, t)$ и $V^{(1)}(x, t)$ одновременно могут принимать положительные значения, а $V^{(2)}(x, t) \geqslant 0$ $(V^{(2)} \equiv 0)$ в множестве $E(V > 0,\ V^{(1)} > 0)$, то невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) неустойчиво.

Действительно, выберем в сколь угодно малой окрестности невозмущенного движения точку $(x_0, t_0) \in \Gamma$, в которой

$$V(x_0, t_0) > 0, \qquad V^{(1)}(x_0, t_0) > 0$$

Возмущенное движение $x(t, x_0, t_0)$ будет оставаться в множестве $E(V > 0\, V^{(1)} > 0)$ пока не покинет Γ, ибо в противном случае для некоторого $T > t_0$ было бы $V(x(T, x_0, t_0), T)\ V^{(1)}(x(T, x_0, t_0), T) = 0$ при $V(x(t, x_0, t_0), t)\ V^{(1)}(x(t, x_0, t_0), t) > 0$ для $t \in [t_0, T)$.

Но это невозможно, так как для $t \in [t_0, T)$

$$V(x(t, x_0, t_0), t) V^{(1)}(x(t, x_0, t_0), t) = \\ = [V(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t} V^{(1)} dt]\,[V^{(1)}(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t} V^{(2)} dt] \geqslant V(x_0, t_0) V^{(1)}(x_0, t_0)$$

Следовательно (в силу непрерывности $V(x(t, x_0, t_0), t)\, V^{(1)}(x(t, x_0, t_0), t)$ по t)

$$V(x(T, x_0, t_0), T)\, V^{(1)}(x(T, x_0, t_0), T) \geqslant V(x_0, t_0)\, V^{(1)}(x_0, t_0) > 0$$

Но в множестве $E(V > 0, V^{(1)} > 0)$

$$V^{(1)}(x(t, x_0, t_0), t) = V^{(1)}(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t} V^{(2)}\, dt \geqslant V^{(1)}(x_0, t_0)$$

$$V(x(t, x_0, t_0), t) = V(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t} V^{(1)}\, dt \geqslant V(x_0, t_0) + V^{(1)}(x_0, t_0)(t - t_0)$$

Несовместность последнего неравенства с условием ограниченности $V(x, t)$ указывает на неустойчивость движения.

Поступила 30 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. II, АН СССР, 1956.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1955.
3. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Избр. тр. по механике и математике, ГИТТЛ, 1954.
4. Ważewski T., Systémes des équations et des inegalités différentielles ordinaires aux deuxiémes membres monotones et leurs applications, Ann. de la Soc. Pol. de Math., 1950, 23.
5. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об интегральных неравенствах, 1. Матем. сб., 1962, т. 56 (98), вып. 3.
6. Кордуняну К. Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости. Analele Ştiinţifice ale univ. «Al. i. Cusa» din Iaşi, Sec. 1, т. 6, № 1, 1960.
7. Ибрашев Х. И. О второй методе Ляпунова. Изв. АН Казахск. ССР № 42, сер. матем. и мех., 1947, вып. 1.
8. Персидский К. П. К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1946, т. I, вып. 5—6.
9. Masséra J. L. Contributions to stability teory. Annals. of Math., 1956, 64 182—206.
10. Красовский Н. Н. К теории второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения. ДАН СССР, 1956, т. 109, вып. 3.
11. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Судпромгиз, 1959.
12. Малкин И. Г. К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
13. Stokes A. The Applications of a fixed point theorem to a variety of non-linear stability problems. Annals of Math. Stud., 1960, 5, № 45.
14. Рахматуллина Л. Ф. Об одном применении условий разрешимости задачи Чаплыгина к вопросам ограниченности и устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изв. вузов, Математика, 1959, № 2.
15. Аминов М. Ш. Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы. Тр. Казанск. авиац. ин-та, Математика и механика, 1959 т. XLVIII.