Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, НАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. Румянцев

(Москва)

Рассматриваются установившиеся движения твердого тела, имеющего полости, частично или целиком наполненные однородной несжимаемой жидкостью, и изучается их устойчивость. Исследование опирается на идеи, развитые Ляпуновым [1, 2] в теории устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. Доказывается, что вопрос об устойчивости равномерного вращения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, приводится к исследованию условий минимума некоторого выражения W. В случае, когда жидкость полностью заполняет полость тела, W является функцией конечного числа переменных; в случае неполного заполнения W представляет собой функционал, зависящий от координат твердого тела и формы жидкости.

Приложение доказанных теорем иллюстрируется на решении двух задач об устойчивости установившихся движений твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, в случаях, когда: 1) свободное твердое тело находится под действием ньютоновского притяжения неподвижным центром; 2) твердое тело движется вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Как известно, эти две задачи представляют и самостоятельный интерес.

1. Рассмотрим абсолютно твердое тело, имеющее односвязную полость произвольной формы, наполненную несжимаемой однородной идеальной жидкостью. Будем рассматривать одновременно как случай полного заполнения жидкостью полости, так и случай неполного наполнения, когда жидкость внутри полости имеет свободную поверхность, гидродинамическое давление на которой остается постоянным во все время движения. Для частиц жидкости, соприкасающихся со стенками полости, нормальные составляющие скорости должны быть равными нормальным составляющим скорости соответствующих точек стенок полости.

Предположим, что на тело наложены стационарные неосвобождающие связи, а заданные силы, приложенные к телу, и массовые силы, действующие на частицы жидкости, обладают силовыми функциями U_1 и U_2, не зависящими явно от времени. Предположим также, что движение тела является непрерывным, а движение жидкости совершается сплошным образом, так что координаты всякой частицы жидкости — непрерывные функции их начальных значений и времени.

При указанных условиях дифференциальные уравнения движения системы допускают интеграл энергии [3]

$$T + V = h \tag{1.1}$$

где T — кинетическая энергия системы в ее движении по отношению к не которой неподвижной системе осей координат $O\xi\eta\zeta$, V — потенциа энергия действующих на систему сил, h — постоянная интегрир

Положение твердого тела относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$ будем определять его лагранжевыми координатами $q_1, \ldots, q_n$ ($n \leqslant 6$). Потенциальная энергия системы V будет являться, вообще говоря, функцией координат $q_1, \ldots, q_r$ ($r \leqslant n$) и формы жидкости. В случае полного заполнения жидкостью полости заданной формы потенциальная энергия системы является функцией $V(q_1, \ldots, q_r)$.

Допустим также, что наложенные на тело связи допускают вращение всей системы как одного твердого тела вокруг некоторой неподвижной прямой, а действующие на систему силы не дают момента относительно этой прямой. При этом, очевидно, потенциальная энергия системы V не будет зависеть от угла q_n поворота тела около названной прямой. При этих условиях существует интеграл площадей для плоскости, ортогональной к этой прямой [3]. Принимая указанную прямую за ось $O\zeta$ неподвижной системы координат, интеграл площадей запишем в виде

$$G_\zeta = \text{const} = k \tag{1.2}$$

где G_ζ обозначает проекцию на ось ζ момента количеств движения системы.

Наряду с неподвижной системой координат введем в рассмотрение систему осей координат $O\xi_1\eta_1\zeta$, вращающуюся вокруг оси ζ с некоторой угловой скоростью ω. Обозначая через $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3) вектор абсолютной скорости какой-либо точки тела или жидкости, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}$ (ξ, η, ζ), а через $\mathbf{u}$ (u, v, w) — вектор скорости той же точки в ее движении относительно системы координат $O\xi_1\eta_1\zeta$, имеем равенство

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

При этом кинетическую энергию и проекцию на ось ζ момента количеств движения системы можно представить в виде

$$T = T_1 + \omega G_\zeta^1 + \frac{1}{2}\omega^2 S, \qquad G_\zeta = G_\zeta^1 + \omega S \tag{1.3}$$

Здесь

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu (u_\nu^2 + v_\nu^2 + w_\nu^2), \qquad G_\zeta^1 = \sum_\nu m_\nu (\xi_\nu v_\nu - \eta_\nu u_\nu)$$

обозначают соответственно кинетическую энергию и проекцию на ось ζ кинетического момента системы в ее движении относительно осей координат $\xi_1\eta_1\zeta$, а

$$S = \sum_\nu m_\nu (\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)$$

момент инерции системы относительно оси ζ. Во всех этих формулах суммирование производится по всем точкам рассматриваемой системы, массы которых обозначены через m_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$).

Угловая скорость ω вращения системы осей координат $\xi_1\eta_1\zeta$ может быть задана произвольно; условимся выбрать ее таким образом, чтобы $G_\zeta^1 = 0$, т. е. в любой момент времени уничтожалась проекция на ось ζ момента количеств относительного движения системы [2], что эквивалентно в силу (1.2) и (1.3) уравнению

$$\omega S = k \tag{1.4}$$

При таком выборе угловой скорости ω вращения системы координат $\xi_1\eta_1\zeta$ интеграл энергии (1.1) можно представить в виде

$$T_1 + \frac{1}{2}\frac{k^2}{S} + V = h \qquad (1.5)$$

Замечание. Представление интеграла энергии в виде, аналогичном (1.5), можно осуществить и другим способом, обобщая метод Рауса игнорирования циклических координат в динамике систем с конечным числом степеней свободы [4].

При сделанных выше предположениях о связях, наложенных на твердое тело, и действующих силах рассматриваемая система может в действительности совершать равномерные вращения как одно твердое тело вокруг неподвижной оси ζ. При этом система будет находиться в равновесии относительно системы координат $\xi_1\eta_1\zeta$, вращающейся вокруг оси ζ с угловой скоростью равномерного вращения системы ω_0.

В самом деле, для действительного движения системы справедливо общее уравнение динамики

$$\sum_\nu \{(m_\nu\xi''_\nu - F_{1\nu})\,\delta\xi_\nu + (m_\nu\eta''_\nu - F_{2\nu})\,\delta\eta_\nu + (m_\nu\zeta''_\nu - F_{3\nu})\,\delta\zeta_\nu\} = 0 \qquad (1.6)$$

выражающее принцип Даламбера — Лагранжа. Здесь ξ''_ν, η''_ν, ζ''_ν — проекции ускорения ν-й точки системы, $F_{1\nu}$, $F_{2\nu}$, $F_{3\nu}$ — проекции заданных сил, приложенных к точкам системы, $\delta\xi_\nu$, $\delta\eta_\nu$, $\delta\zeta_\nu$ — проекции вектора $\delta\mathbf{r}_\nu$ возможного перемещения точки системы.

В случае равномерного вращения всей системы как одного твердого тела вокруг оси ζ с угловой скоростью ω_0

$$\xi''_\nu = -\omega_0^2\xi_\nu, \qquad \eta''_\nu = -\omega_0^2\eta_\nu, \qquad \zeta''_\nu = 0$$

вследствие чего уравнение (1.6) принимает вид

$$\frac{1}{2}\omega_0^2\delta\sum_\nu m_\nu(\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2) + \sum_\nu (F_{1\nu}\delta\xi_\nu + F_{2\nu}\delta\eta_\nu + F_{3\nu}\delta\zeta_\nu) = 0$$

или

$$\delta U = 0 \qquad (1.7)$$

если ввести обозначение

$$U = \frac{1}{2}\omega_0^2 S - V \qquad (1.8)$$

и понимать под δU изменение выражения U на возможном перемещении системы, совместном со связями и не изменяющем объема жидкости.

Но выражение (1.8) можно рассматривать как силовую функцию заданных сил и центробежных сил инерции. Согласно принципу возможных перемещений, равенство (1.7) представляет собой условие равновесия рассматриваемой системы по отношению к осям координат $O\xi_1\eta_1\zeta$, если последние вращаются с постоянной угловой скоростью ω_0.

Введем в рассмотрение функцию

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S} + V \qquad (1.9)$$

где k_0 — значение постоянной площадей k для случая равномерного вращения всей системы как одного твердого тела вокруг оси ζ с угловой скоростью ω_0. Изменение этой функции на возможном перемещении системы

$$\delta W = -\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S_0^2}\delta S + \delta V$$

где S_0 — значение S для установившегося движения.

Сопоставляя δW с $\delta U = {}^1/_2\omega_0^2\delta S - \delta V$ и учитывая, что $\omega_0 S_0 = k_0$, приходим к заключению, что уравнение (1.7) эквивалентно уравнению

$$\delta W = 0 \tag{1.10}$$

Таким образом, в случае установившегося движения системы выражение (1.9) имеет экстремальное (стационарное) значение.

Согласно определению (1.9), выражение W зависит от координат тела $q_1, \ldots, q_{n-1}$, от которых зависят S и V, и формы жидкости, а также от величины постоянной k_0. В случае полного заполнения данной полости тела жидкостью выражение W будет функцией $W(q_1, \ldots, q_{n-1}, k_0)$.

Величину k_0 можно рассматривать как переменный параметр и прилагать к рассматриваемой механической системе результаты общей теории «равновесия» материальных систем с потенциальной энергией, зависящей от параметров [5].

Условие (1.10) приводит, как легко видеть, к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = -\frac{1}{2}\omega_0^2\frac{\partial S}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{1.11}$$

для координат q_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ твердого тела в установившемся движении, а также к уравнениям для давления в жидкости, позволяющим получить уравнение

$$\frac{1}{2}\omega_0^2(\xi^2 + \eta^2) + U_2 = \text{const} \tag{1.12}$$

ее свободной поверхности в этом движении, если жидкость не полностью заполняет полость тела. Здесь $U_2(\xi, \eta, \zeta)$ обозначает силовую функцию действующих на жидкость массовых сил, отнесенных к единице массы, причем потенциальная энергия жидкости

$$V_2 = -\rho\int_\tau U_2 d\tau \qquad (\tau \text{ — объем жидкости})$$

Для фиксированного значения параметра k_0 уравнения (1.11) и (1.12) определяют координаты твердого тела и форму свободной поверхности жидкости в установившемся движении. При непрерывном изменении параметра будут меняться вещественные корни уравнений (1.11)

$$q_i^{(s)} = \varphi_i^{(s)}(k_0)$$

и соответствующие им формы относительного равновесия жидкости.

В n-мерном пространстве $(q_1, \ldots, q_{n-1}, k_0)$ последние уравнения определяют вещественную кривую, различные точки которой отвечают возможным различным установившимся движениям. Отдельные ветви этой кривой пересекаются в точках бифуркации [5], где имеется совпадение по меньшей мере двух вещественных корней уравнений (1.11).

2. Рассмотрим некоторое установившееся движение системы, соответствующее заданному значению постоянной площадей k_0. Без уменьшения общности допустим, что корни уравнений (1.11) при данном значении k_0 суть $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. При этом жидкость имеет форму относительного равновесия F_0, ограниченную свободной поверхностью σ_0, определяемой уравнением (1.12), и стенками полости, с которыми соприкасается жидкость.

Исследуем устойчивость этого установившегося движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, используя интеграл энергии (1.5).

Рассматриваемая механическая система обладает $n + \infty$ степенями свободы, и нужно условиться, что понимать под устойчивостью ее движения.

В случае, когда жидкость полностью заполняет полость тела, под устойчивостью движения будем подразумевать устойчивость в смысле Ляпунова [5] по отношению к нециклическим координатам $q_1, \ldots, q_{n-1}$ тела (от которых явно зависят потенциальная энергия V и момент инерции S системы), обобщенным скоростям $q'_1, \ldots, q'_{n-1}$ тела и кинетической энергии $T_1^{(2)}$ жидкости.

В случае неполного заполнения, когда жидкость в полости имеет свободную поверхность, дело обстоит сложнее. Как выяснил Ляпунов [1], интеграл энергии оказывается вообще для жидкости недостаточным для того, чтобы после нарушения ее покоя (абсолютного или относительного) обнаружить тот характер движения, который принимается за признак устойчивого равновесия в механике систем с конечным числом степеней свободы. Ляпунов установил, что все затруднение уничтожается только при условии, если устойчивую форму равновесия определить как такую, для которой, после сообщения жидкости достаточно малых возмущений, форма жидкости остается насколько угодно мало отличающейся от этой формы равновесия, по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости не образуются сколько угодно тонкие нитеобразные или листообразные выступы. Такие выступы могут быть большими по линейным размерам, но малыми по объему, и тем самым они могут нести на себе малые порции энергии.

Примем это определение и, следуя Ляпунову, приведем некоторые относящиеся сюда понятия применительно к поставленной задаче. С формой относительного равновесия жидкости F_0 будем сравнивать ее форму F в какой-либо момент возмущенного движения, оставляя без внимания движение самих частиц жидкости, но принимая в расчет величину кинетической энергии жидкости. Форма F ограничена свободной поверхностью σ жидкости и стенками полости, с которыми в данный момент соприкасается жидкость. Для возмущенного движения, достаточно близкого к невозмущенному, в системе координат xyz, жестко связанной с твердым телом, формы F_0 и F отличаются лишь свободными поверхностями σ_0 и σ. В силу несжимаемости жидкости объем формы F равен, разумеется, объему формы F_0.

Рассмотрим какую-нибудь точку P поверхности σ и наиболее близкую к ней точку P_0 поверхности σ_0. Вместе с изменением положения точки P на поверхности σ, а следовательно, и положение точки P_0 на поверхности σ_0, будет изменяться и расстояние PP_0, и для некоторого положения точки P это расстояние сделается самым большим из всех возможных для данного момента времени. Этот максимум расстояния PP_0 Ляпунов назвал удалением; обозначим эту величину через l. Введем в рассмотрение также уклонение Δ формы жидкости F от формы равновесия F_0, принимая за последнее объем части формы F, находящейся вне формы F_0, или, что то же самое, объем части формы F_0, находящейся вне формы F.

Очевидно, что при удалении, имеющем данное значение l, уклонение Δ будет допускать некоторый максимум вида $l\psi(l)$, где $\psi(l)$ есть положительная функция, все значения которой не превосходят некоторого определенного предела. При l, не превосходящем какого-либо заданного числа A, функция $\psi(l)$ будет допускать отличный от нуля минимум. Минимум же уклонения Δ для данного значения удаления l всегда равен нулю [2].

При непрерывном движении тела и жидкости удаление l и уклонение Δ будут, очевидно, непрерывными функциями времени.

Дадим теперь следующее определение устойчивости движения системы в случае неполного заполнения полости. Сообщая системе начальные возмущения, рассмотрим возмущенное ее движение. Если начальное удаление свободной поверхности жидкости от поверхности σ_0 и начальные относительные скорости частиц жидкости, а также начальные отклонения и относительные скорости тела могут быть выбраны настолько малыми, чтобы координаты q_i и скорости q'_i по абсолютной величине, кинетическая энергия $T_1^{(2)}$ жидкости и удаление l ее поверхности σ от поверхности равновесия σ_0 оставались меньшими некоторых наперед данных пределов, как бы последние малы ни были, во все время движения или, по крайней мере, до тех пор, пока уклонение формы жидкости от формы равновесия не делается меньшим некоторого наперед данного возможного уклонения, как бы все значения последнего малы ни были, то рассматриваемое движение системы устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

Таким образом, если при всяких произвольно задаваемых положительных числах L_1 и L_2 как бы малы они ни были, может быть выбираемо положительное число λ так, чтобы при всяких начальных значениях координат q_{i0} и обобщенных скоростей q'_{i0} $(i = 1, \ldots, n-1)$ тела, удаления l_0, уклонения Δ_0 и относительных скоростей жидкости u_0, v_0, w_0, удовлетворяющих условиям

$$|q_{i0}| \leqslant \lambda, \quad |q'_{i0}| \leqslant \lambda, \quad |l_0| \leqslant \lambda, \quad |u_0| \leqslant \lambda, \quad |v_0| \leqslant \lambda$$
$$|w_0| \leqslant \lambda, \quad \Delta_0 > \varepsilon l_0 \tag{2.1}$$

и при всяком $t \geqslant t_0$ или, по крайней мере, до тех пор, пока

$$\Delta > \varepsilon l \tag{2.2}$$

выполнялись неравенства

$$|q_i| < L_1, \qquad |l| < L_1, \qquad |q_i'| < L_2, \qquad |T_1^{(2)}| < L_2 \tag{2.3}$$

то невозмущенное установившееся движение твердого тела с жидкостью устойчиво; в противном случае — неустойчиво.

Здесь ε обозначает положительное число, меньшее, чем минимум функции $\psi(l)$ при условии $|l| \leqslant L_1$, а величину εl можно рассматривать как возможное уклонение жидкости. Отметим, что в случае полного заполнения жидкостью полости условие, связанное с (2.2), следует опустить.

В дальнейшем понадобится понятие минимума выражения W. В случае, если W представляет собой функцию $W(q_1, \ldots, q_{n-1}, k_0)$, под минимумом этой функции при фиксированном значении постоянной k_0 будем понимать изолированный минимум этой функции по отношению к переменным $q_1, \ldots, q_{n-1}$, от которых она явно зависит. В случае, если жидкость не полностью заполняет полость, следуя Ляпунову [1], примем следующее определение изолированного минимума W.

Если для рассматриваемого установившегося движения, когда $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $l = 0$, $\Delta = 0$, W_0 есть минимум выражения W, то существует такое достаточно малое положительное число E, что при всех системах значений координат тела q_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, удаления l и уклонения Δ таких, что

$$|q_i| \leqslant E, \qquad |l| \leqslant E, \qquad \Delta > \varepsilon l$$

где ε — положительное число, меньшее, чем минимум функции $\psi(l)$ при условии $|l| \leqslant E$, все значения, принимаемые разностью $W - W_0$, будут оставаться положительными, обращаясь в нуль только при $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ $l = 0$, $\Delta = 0$. Отметим, что при всяком данном значении l разность $W - W_0$ может быть сделана насколько угодно малой выбором такого положения тела и такой формы жидкости, для которых $|q_i|$ и Δ достаточно малы. Но предельный случай, когда при $l \neq 0$ все $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, Δ, а следовательно, и $W - W_0$ обращаются в нуль, очевидно невозможен, если рассматривать только такие формы, какие может принимать жидкость. Для устранения этого неудобства и введено условие $\Delta > \varepsilon l$.

Теорема 2.1. Если для установившегося движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, выражение

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S} + V$$

имеет изолированный минимум W_0, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство [2]. Выведем систему из рассматриваемого установившегося движения, сообщая ее точкам некоторые достаточно малые начальные отклонения и скорости. Предоставленная самой себе, система будет далее двигаться в соответствии с интегралом энергии (1.5), который перепишем в виде

$$T_1 + W + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{S} = T_1^{(0)} + W^{(0)} + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{S^{(0)}} \tag{2.4}$$

где верхний индекс (0) обозначает начальное значение соответствующей величины, k — величина постоянной площадей для возмущенного движения.

Пусть A есть некоторое отличное от нуля произвольно малое положительное число, не превосходящее числа L_1, которое во всяком случае будем предполагать меньшим названного выше числа E. Обозначим через W_1 наименьшее возможное значение, какое может принять выражение W, если удаление l или одна из координат q_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ по абсолютной величине равны A, а остальные из этих величин и уклонение Δ удовлетворяют условиям

$$|q_i| \leqslant A, \quad |l| \leqslant A, \quad \Delta \geqslant \varepsilon l$$

Так как по предположению для установившегося движения выражение W имеет минимум W_0, то будем иметь неравенство

$$W_1 > W_0$$

Но выбирая l и $|q_i|$ достаточно малыми, а $\Delta > \varepsilon l$, выражение W можно сделать как угодно мало отличающимся от W_0. Выберем A настолько малым, чтобы было удовлетворено неравенство

$$|W_1 - W_0| < L_2 \tag{2.5}$$

Начальные значения координат q_i и удаления l можно взять столь малыми, чтобы начальное значение выражения W было меньше величины W_1

$$W^{(0)} < W_1 \tag{2.6}$$

Выбирая так начальное положение системы, будем предполагать относительно начальных значений координат q_i и начальной формы жидкости, что они удовлетворяют неравенствам

$$|q_i| < A, \qquad |l| < A, \qquad \Delta > \varepsilon l$$

Какими бы ни были начальные положение и форма жидкости, начальные скорости точек системы можно выбрать такими, чтобы постоянные величины

$$\frac{1}{2}|k^2 - k_0^2|, \qquad T_1^{(0)}$$

были как угодно малыми. Выберем эти постоянные столь малыми, чтобы

$$\frac{1}{2}(k^2 - k_0^2)\left(\frac{1}{S^{(0)}} - \frac{1}{S}\right) + T_1^{(0)} + W^{(0)} < W_1 \tag{2.7}$$

для всех значений, которые может иметь S при выполнении условий

$$|q_i| \leqslant A, \qquad |l| \leqslant A \tag{2.8}$$

Величину λ, фигурирующую в определении устойчивости и определяющую область начальных возмущений, условимся выбрать именно так, чтобы при соблюдении условий (2.1) выполнялось неравенство (2.7) для всех значений S при условиях (2.8). При таком выборе начальных условий во все последующее время движения, пока выполняются неравенства (2.8), будем, согласно интегралу энергии (2.4), иметь неравенство

$$T_1 + W < W_1 \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что $W < W_1$. Это неравенство будет удовлетворено, по крайней мере, до тех пор, пока $|q_i|$ и $|l|$ остаются не превосходящими A. Но начальные значения координат q_i и удаления l по условию меньше A, причем начальное уклонение $\Delta > \varepsilon l$, и так как q_i, l и Δ меняются непрерывным образом с течением времени, то $|q_i|$ и $|l|$ не могут сделаться превосходящими A, не сделавшись предварительно равными A. Равенства же

$$|q_i| = A \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad |l| = A$$

в силу неравенства (2.9) при условии $\Delta > \varepsilon l$, очевидно, невозможны.

Из неравенства (2.9) с учетом (2.5) следует, что $|T_1| < L_2$; на основании чего заключаем, что

$$|q'_i| < L_2 \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad |T_1^{(2)}| < L_2$$

Следовательно, если движение системы происходит непрерывно, так что q_i, l, Δ непрерывно изменяются с течением времени, то исходя от начального момента времени будем иметь неравенства

$$|q_i| < L_1, \quad |q'_i| < L_2, \quad |l| < L_1, \quad |T_1^{(2)}| < L_2, \quad \Delta > \varepsilon l$$

и все они не перестанут выполняться, пока соблюдается последнее из них. Теорема доказана.

Отметим, что в случае полного заполнения жидкостью полости условия на l и Δ становятся излишними и при условиях теоремы для любого момента времени $t \geqslant t_0$ выполняются неравенства

$$|q_i| < L_1, \qquad |q_i'| < L_2 \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad |T_1^{(2)}| < L_2$$

Замечание 2.1. Ляпунов [2] отмечал, что для характеристики отличия возмущенной формы жидкости от невозмущенной вместо удаления l можно ввести некоторые другие количества, которые могут обращаться в нуль лишь для невозмущенной формы. За такую величину можно, например, принять уклонение Δ, и аналогично предыдущему доказать, что если для рассматриваемого установившегося движения твердого тела с полостью, не полностью заполненной жидкостью, W имеет минимум

W_0 в том смысле, что $W - W_0 > 0$ для всех значений $|q_i|$ и Δ, не равных одновременно нулю и меньших определенного постоянного предела, то при достаточно малых возмущениях $|q_i|$, $|q_i'|$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, Δ и $T_1^{(2)}$ будут оставаться во все время движения меньше наперед заданных постоянных, как бы последние малы ни были.

Замечание 2.2. Если имеют место теоремы живых сил и площадей для движения твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, по отношению к центру масс всей системы, то теорема 1.1 справедлива и для этого относительного движения.

В этом смысле теорема является обобщением теоремы Ляпунова об устойчивости фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, частицы которой притягиваются одна к другой по закону Ньютона.

В самом деле, если рассматриваемая система состоит из одной только гравитирующей жидкости, то

$$W = \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S} - \frac{f}{2}\iint \frac{d\tau d\tau'}{r}$$

и если для формы равновесия жидкости имеет место минимум выражения $\Pi = W / \pi f$, то эта форма равновесия устойчива [1,2].

Следствие. Если для положения равновесия твердого тела с полостью, наполненной жидкостью (при $k_0 = 0$), потенциальная энергия системы V имеет изолированный минимум V_0, то положение равновесия устойчиво [6].

Отметим, что этот результат применим также и для случая относительного равновесия твердого тела с полостью, заполненной жидкостью.

Допустим для определенности, что на систему, кроме сил, производных от силовой функции V, действуют также неконсервативные силы, приводящиеся к моменту N, направленному по оси ζ, величина которого такова, что во все время движения угловая скорость ω вращения твердого тела вокруг оси ζ остается постоянной. В этом случае вместо интегралов энергии (1.1) и площадей (1.2) будем иметь уравнения [4]

$$d(T + V) = N\omega dt, \qquad \frac{dG_\zeta}{dt} = N$$

из которых следует, что во все время движения

$$T + V - \omega G_\zeta = \mathrm{const}$$

Снова вводя в рассмотрение подвижную систему осей координат $\xi_1\eta_1\zeta$ и имея в виду формулы (1.3), представим этот интеграл в виде

$$T_1 + V - \tfrac{1}{2}\omega^2 S = \mathrm{const}$$

Положения относительного равновесия твердого тела с жидкостью определяются условием (1.7). Почти дословным повторением доказательства теоремы 2.1 легко убедиться, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Если для положения относительного равновесия твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, выражение

$$W_* = V - \tfrac{1}{2}\omega^2 S$$

имеет изолированный минимум, то это положение относительного равновесия устойчиво.

Как выше уже отмечалось, условие (1.7) эквивалентно при выполнении равенства (1.4) уравнению (1.10); это позволяет сопоставлять положения относительного равновесия системы при постоянной угловой скорости вращения ω с установившимися движениями при наличии интеграла площадей (1.2). Нетрудно видеть при этом, что если для некоторого положения относительного равновесия выражение W_* имеет минимум, то для соответствующего установившегося движения выражение W также имеет минимум [4].

В самом деле, пусть W_{*0} есть минимум выражения W_*, т. е. в достаточно малой окрестности положения относительного равновесия

$$V - V_0 - \frac{1}{2}\omega^2 (S - S_0) > 0$$

и допустим, что для соответствующего установившегося движения выражение W не имеет минимума, т. е. в достаточно малой окрестности найдутся точки, в которых

$$\frac{1}{2} k_0^2 \left(\frac{1}{S_0} - \frac{1}{S}\right) - V + V_0 \geqslant 0$$

Заменяя в последнем неравенстве k_0 на $S_0\omega$ и складывая с первым, получим

$$-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{S}(S - S_0)^2 > 0$$

что невозможно. Следовательно, если положение относительного равновесия твердого тела с жидкостью в случае, когда $\omega = \mathrm{const}$, устойчиво, то устойчиво и соответствующее установившееся движение в случае, когда $G_\zeta = \mathrm{const}$.

Пусть для данного фиксированного значения параметра k_0 выражение W имеет минимум, т. е. установившееся движение устойчиво. Будем теперь непрерывным образом изменять параметр k_0, тогда корни уравнений (1.11) будут описывать некоторую ветвь C кривой «равновесий». Если при этом будет непрерывно изменяться и выражение W, то для всех точек кривой C, для которых W сохраняет минимум, установившиеся движения будут устойчивыми. Смена устойчивости на этой ветви может происходить лишь в точках бифуркации [5].

3. В предыдущем изложении предполагалось, что жидкость, наполняющая полость тела, является идеальной. Рассмотрим теперь движение твердого тела с вязкой жидкостью, коэффициент вязкости которой обозначим через μ. Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье — Стокса

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

где $\nu = \mu / \rho$ — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность, p — гидродинамическое давление. Принимается, что на свободной поверхности вектор напряжения $\mathbf{p}_n = -p_0\mathbf{n}$ (где $\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности, $p_0 = \mathrm{const}$), а на твердых стенках жидкость не имеет относительного движения по отношению к твердому телу [7].

Используя эти уравнения и граничные условия для жидкости, а также уравнения движения твердого тела, нетрудно получить следующее уравнение для скорости рассеяния энергии:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\mu\int_\tau \left\{2\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial \zeta}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_3}{\partial \eta} + \frac{\partial v_2}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\tau \qquad (3.1)$$

в предположениях п.1 относительно действующих на систему сил и непрерывности ее движения.

Из уравнения (3.1) видно, что движение твердого тела с полостью, наполненной вязкой жидкостью, без рассеяния энергии вследствие вязкости возможно только тогда, когда в каждой точке жидкости выполняются равенства

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial \eta} + \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \quad (3.2)$$

означающие, что нигде в жидкости не происходит удлинения или сокращения линейных элементов [7], а последнее возможно только тогда, когда жидкость движется вместе с твердым телом, в полости которого она находится, как одно твердое тело.

Предполагая как и ранее, что диссипативные силы по циклической координате q_n на твердое тело не действуют и учитывая, что силы вязкости являются внутренними силами, нетрудно установить существование интеграла площадей (1.2) и в случае вязкой жидкости. Вводя, как и в п.1, вращающуюся вокруг оси $O\zeta$ систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta$, в силу уравнения (3.1) будем иметь вместо интеграла энергии (1.5) неравенство

$$T_1 + W + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{S} \leqslant T_1^{(0)} + W^{(0)} + \frac{1}{2}\frac{k^2 - k_0^2}{S^{(0)}} \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Если для равномерного вращения твердого тела с полостью, наполненной вязкой жидкостью, выражение W имеет изолированный минимум, то это движение устойчиво, а всякое достаточно близкое к нему возмущенное движение будет стремиться в пределе к установившемуся движению системы, как одного твердого тела, если никогда не нарушается неравенство $\Delta > \varepsilon l$.

Доказательство. В рассматриваемом случае вместо уравнения (2.4) имеем неравенство (3.3) и для доказательства устойчивости равномерного вращения твердого тела с вязкой жидкостью нужно лишь повторить доказательство теоремы 2.1. Докажем вторую часть теоремы.

Рассмотрим какое-нибудь возмущенное движение системы, достаточно близкое в начальный момент времени к невозмущенному, и пусть неравенство $\Delta > \varepsilon l$ не перестает иметь места, пока $|l|$ не превосходит L_1. В этом случае возмущенное движение будет всегда достаточно близко к устойчивому невозмущенному движению. Согласно уравнению (3.1), полная механическая энергия системы в ее возмущенном движении рассеивается, пока жидкость и твердое тело не будут двигаться как одно твердое тело. В этих условиях возможно, следовательно, сделать только одно из двух предположений: или полная механическая энергия системы будет постоянно убывать и система в конце концов остановится, или ее движение в пределе станет вращением всей системы как одного твердого тела, отвечающим экстремуму выражения $^1/_2\ (k^2/S) + V$. Первое предположение при $G_\zeta \neq 0$ невозможно в силу существования интеграла площадей (1.2), и остается только второе предположение [8]. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичным образом можно доказать и справедливость теоремы 2.2 для случая вязкой жидкости, если во все время движения $\omega = \mathrm{const}$.

Теорема 3.2. Если для изолированного установившегося движения твердого тела с полостью, наполненной вязкой жидкостью, выражение W не имеет минимума, то это движение неустойчиво.

Доказательство. Пусть корни уравнений (1.11) для рассматриваемого движения суть $q_i = 0 (i = 1, \ldots, n-1)$ и $W_0 = 0$. Предположим, что существует такое достаточно малое положительное число L_1, что для всех значений координат q_i и удаления l, удовлетворяющих условиям

$$|q_i| \leqslant L_1, \qquad |l| \leqslant L_1 \quad (3.4)$$

выражение W не будет иметь экстремума, кроме единственного, отвечающего значениям $q_i=0 (i=1,\ldots,n-1)$, $l=0$. Это предположение и означает, что рассматриваемое установившееся движение является изолированным. Так как для последнего W не имеет минимума, то в области (3.4) существует область, где $W<0$. Тогда в области малых по абсолютной величине значений координат q_i, удаления l и относительных скоростей q_i', u, v, w можно выделить существующую при наших предположениях для сколь угодно малых по абсолютной величине значений координат и скоростей область, определенную неравенством

$$T_1+W<0$$

Начальные возмущения выберем именно в этой области, причем так, что постоянная площадей k остается равной k_0. Предоставленная самой себе рассматриваемая система будет двигаться в соответствии с соотношением (3.3), принимающим при высказанных условиях вид

$$T_1+W \leqslant T_1^{(0)}+W^{(0)}<0$$

Допустим, вопреки условиям теоремы, что невозмущенное движение устойчиво. Это означает, согласно определению, что все время, или, по крайней мере, до тех пор, пока $\Delta > \varepsilon l$, выполняются условия (2.3).

При выполнении этих условий можно, очевидно, указать такое положительное число L, зависящее от L_1 и L_2, которое ограничивает сверху абсолютную величину механической энергии системы

$$|T_1+W|<L \tag{3.5}$$

Но в области, определяемой неравенствами (2.3), по условию нигде, кроме как для рассматриваемого невозмущенного движения, не выполняются тождественно равенства (3.2). Следовательно, энергия системы будет постоянно рассеиваться и все больше отличаться от своей начальной величины и в конце концов по абсолютной величине превзойдет L, что противоречит условию (3.5). Это означает, что система выйдет из области (2.3). Теорема доказана.

4. Рассмотрим задачу об устойчивости установившегося движения свободного твердого тела с полостью, заполненной целиком жидкостью, притягиваемого неподвижным центром по закону Ньютона.

Притягивающий центр O примем за начало неподвижной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$, а центр масс O_1 твердого тела с полостью, заполненной жидкостью — за начало подвижных осей x, y, z, направленных по главным центральным осям инерции системы. Положение в пространстве последней определяется координатами ξ,η,ζ центра масс O_1 и тремя углами Эйлера. Вводя сферические координаты R, ψ, φ центра масс, будем иметь

$$\xi = R\cos\psi\cos\varphi, \qquad \eta = R\cos\psi\sin\varphi, \qquad \zeta = R\sin\psi \tag{4.1}$$

Потенциальная энергия сил притяжения с достаточной степенью точности может быть представлена в виде [9]

$$V = -f\frac{M}{R} + \frac{3}{2}\frac{f}{R^3}\left(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - \frac{A+B+C}{3}\right) \tag{4.2}$$

Здесь f — постоянная тяготения; M — масса системы; A, B, C — главные центральные моменты инерции системы; γ_1, γ_2, γ_3 — косинусы углов прямой OO_1 с осями x, y, z соответственно. Момент инерции системы относительно оси $O\zeta$

$$S = MR^2\cos^2\psi + A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2 \tag{4.3}$$

где β_1, β_2, β_3 — косинусы углов оси $O\zeta$ с осями x, y, z соответственно.

Величины β_i и γ_i связаны очевидными соотношениями

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1, \qquad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1$$

Исключая β_2 и γ_3 из (4.2) и (4.3) при помощи этих соотношений, получаем

$$V = -f\frac{M}{R} + \frac{3}{2}\frac{f}{R^3}\left[(A-C)\gamma_1^2 + (B-C)\gamma_2^2 - \frac{A+B-2C}{3}\right]$$
$$S = MR^2\cos^2\psi + B + (A-B)\beta_1^2 + (C-B)\beta_3^2 \tag{4.4}$$

Уравнения (1.11) в данном случае удовлетворяются значениями переменных [9]

$$R = R_0, \qquad \psi = 0, \qquad \beta_1 = \beta_3 = 0, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \tag{4.5}$$

если постоянная R_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{k_0^2}{S_0^2} MR_0 = \frac{fM}{R_0^2} + \frac{3}{2} \frac{f}{R_0^4}(A + B - 2C) \tag{4.6}$$

где

$$S_0 = MR_0^2 + B, \qquad k_0 = S_0\omega_0$$

Частное решение (4.5) уравнений движения описывает движение центра масс O_1 системы по круговой орбите, расположенной в плоскости $O\xi\eta$, радиуса R_0 с угловой скоростью ω_0, причем ось O_1z направлена по прямой OO_1, ось O_1x — по касательной к орбите, ось O_1y — параллельна оси $O\zeta$. Это движение примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость.

Для этого надо найти условия минимума функции W для движения (4.5).

При условиях (4.5), (4.6) будем иметь

$$\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} = \frac{f}{R_0^3}\left[M\left(1 - 4\frac{B}{S_0}\right) - \frac{3}{2}\frac{A + B - 2C}{R_0^2}\left(1 + 4\frac{B}{S_0}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} = MR_0^2\omega_0^2, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \beta_1^2} = (B - A)\,\omega_0^2, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \beta_3^2} = (B - C)\,\omega_0^2$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1^2} = 3\frac{f}{R_0^3}(A - C), \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_2^2} = 3\frac{f}{R_0^3}(B - C)$$

а все остальные вторые производные от функции W равны нулю тождественно.

Таким образом, условия минимума функции W сводятся к неравенствам

$$B > A > C \tag{4.7}$$

которые согласно теореме (2.1) являются достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (4.5) твердого тела с полостью, заполненной жидкостью по отношению к переменным [10]

$$R, \quad \psi, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3$$

В случае вязкой жидкости возмущенное движение при условиях (4.7) будет затухать и стремиться к установившемуся движению, представляющему собой равномерное вращение всей системы вокруг вектора момента количеств движения.

5. В качестве второго примера рассмотрим задачу об устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой O, имеющего полость, заполненную жидкостью.

Неподвижную ось ζ направим вертикально вверх, а также введем в рассмотрение подвижную систему осей координат $Oxyz$, жестко связанную с твердым телом

Для потенциальной энергии V и момента инерции относительно оси ζ имеем:

$$V = Mg\left(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}\right) \tag{5.1}$$

$$S = (A - C)\,\gamma_1^2 + (B - C)\,\gamma_2^2 + C - 2\,(D\gamma_2 + E\gamma_1)\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} - 2F\gamma_1\gamma_2$$

где M, x_0, y_0, z_0 — масса и координаты центра масс системы; g — ускорение силы тяжести; A, B, C, D, E, F — моменты инерции и произведения инерции относительно подвижных осей; γ_1, γ_2, $\gamma_3 = \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}$ — косинусы углов, образуемых осью ζ с осями x, y, z соответственно. Уравнения (1.11) в данном случае

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = -\omega_0^2\left[(A - C)\,\gamma_1 - E\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} - F\gamma_2 + \frac{(D\gamma_2 + E\gamma_1)\,\gamma_1}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}\right] + Mg\left(x_0 - \frac{z_0\gamma_1}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = -\omega_0^2\left[(B - C)\,\gamma_2 - D\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} - F\gamma_1 + \frac{(D\gamma_2 + E\gamma_1)\,\gamma_2}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}\right] + Mg\left(y_0 - \frac{z_0\gamma_2}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}\right) = 0$$

удовлетворяются при любой величине ω_0 угловой скорости вращения твердого тела, если

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \tag{5.2}$$

$$D = E = 0, \qquad x_0 = y_0 = 0 \tag{5.3}$$

т. е. если ось вращения z совмещена с вертикалью и является главной центральной осью инерции системы.

Примем эти условия и совместим также оси x и y с двумя другими главными осями инерции системы для точки O.

При условиях (5.2) имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1^2} = (C - A)\,\omega_0^2 - Mgz_0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_2^2} = (C - B)\,\omega_0^2 - Mgz_0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = 0$$

В случае полного заполнения жидкостью полости условия минимума функции $W(\gamma_1, \gamma_2, k_0)$ приводятся к следующим неравенствам:

$$(C - A)\,\omega_0^2 - Mgz_0 > 0, \qquad (C - B)\,\omega_0^2 - Mgz_0 > 0 \tag{5.4}$$

являющимся, согласно теоремам (2.1) и (3.1), достаточными условиями устойчивости тяжелого несимметричного волчка с полостью, целиком заполненной жидкостью [11].

Если жидкость частично заполняет полость, то уравнение (1.12) ее свободной поверхности σ_0 в рассматриваемом установившемся движении имеет вид параболоида вращения

$$\frac{1}{2}\,\omega_0^2 (x^2 + y^2) - gz = \mathrm{const} \tag{5.5}$$

Форму жидкости F в возмущенном движении можно рассматривать как образованную наложением на форму F_0 вдоль ее свободной поверхности (5.5) слоя жидкости переменной толщины [4] χ. Так как объем F равен объему F_0, то должно при этом выполняться условие

$$\int_{\sigma_0} \chi d\sigma = 0 \tag{5.6}$$

Так как в случае устойчивого движения волчка с жидкостью величина χ имеет порядок малости величин γ_1 и γ_2, с точностью до малых высшего порядка малости будем иметь

$$\begin{aligned} W - W_0 = \frac{1}{2}\Big\{ &[(C - A)\,\omega_0^2 - Mgz_0]\,\gamma_1^2 + [(C - B)\,\omega_0^2 - Mgz_0]\,\gamma_2^2 + \\ &+ 2\rho \int_{\sigma_0} (\omega_0^2 z + g)(x\gamma_1 + y\gamma_2)\,\chi d\sigma + \rho \int_{\sigma_0} \sqrt{\omega_0^4 (x^2 + y^2) + g^2}\,\chi^2 d\sigma + \\ &+ \frac{\omega_0^2}{S_0}\Big(\rho \int_{\sigma_0} (x^2 + y^2)\,\chi d\sigma\Big)^2 \Big\} + \cdots \end{aligned} \tag{5.7}$$

используя развитые в теории устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости [4] приемы вычислений интегралов, взятых по объему τ возмущенной фигуры F.

Из равенства (5.7) следует, что условия (5.4) являются необходимыми для того, чтобы выражение W имело минимум для установившегося движения волчка с полостью, частично заполненной жидкостью [1].

Грубое достаточное условие минимума выражения W можно получить, если всю правую часть равенства (5.7) записать под знаком интеграла, взятого по поверхности σ_0, и потребовать, чтобы подинтегральное выражение было определенно положительным по отношению к величинам γ_1, γ_2, χ.

Для получения достаточного условия устойчивости волчка с полостью, заполненной жидкостью, можно разложить величину χ в ряд по полной системе собственных функций соответствующей краевой задачи.

Допустим, например, что полость имеет форму тела вращения, боковая поверхность которого образована вращением вокруг оси z плоской выпуклой кривой, а основания являются плоскостями, уравнения которых суть

$$z = h - c, \qquad z = h + c$$

Для простоты предположим, что квадрат величины угловой скорости вращения

$$\omega_0^2 \gg 2g(h + c) \tag{5.8}$$

так что свободная поверхность (5.5) весьма мало отличается от кругового цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Пренебрегая этим отличием, можем положить [12]

$$\chi = \sum_{k=0}^{\infty} (A \ \cos\varphi + B_k \sin\varphi) \cos\frac{k\pi}{2c}(z - h + c) \tag{5.9}$$

и получить согласно формуле (5.7)

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\Big\{[(C - A)\omega_0^2 - Mgz_0]\gamma_1^2 + [(C - B)\omega_0^2 - Mgz_0]\gamma_2^2 +$$

$$+ 4\rho\pi ca^2h\omega_0^2(A_0\gamma_1 + B_0\gamma_2) - 16\rho a^2\omega_0^2\frac{c}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_{2j+1}\gamma_1 + B_{2j+1}\gamma_2}{(2j+1)^2} +$$

$$+ \rho\pi a^2c\omega_0^2\left[2(A_0^2 + B_0^2) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2 + B_k^2)\right] + \cdots$$

Условия определенной положительности правой части этого равенства, рассматриваемой как функция γ_1, γ_2, A_k, B_k $(k = 0, 1, 2\ldots)$, приводятся, как нетрудно видеть, при $A \geqslant B$ к единственному неравенству

$$\left(C - A - 2\rho\pi a^2c\frac{3h^2 + c^2}{3}\right)\omega_0^2 - Mgz_0 > 0 \tag{5.10}$$

Неравенство (5.10) является, согласно теоремам (2.1) и (3.1) в первом приближении достаточным условием устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого волчка, имеющего полость, не полностью наполненную жидкостью, если справедливо условие (5.8). В неравенстве (5.10) величины A, B, C, z_0 вычисляются для невозмущенного положения волчка и жидкости.

Автор благодарен Л. Н. Сретенскому за обсуждение данной работы.

Поступила 12 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч., т. III, АН СССР, 1959.
2. Ляпунов А. М. Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч., т. III, АН СССР, 1959.
3. Румянцев В. В. Уравнения движения твердого тела, имеющего полости, не полностью наполненные жидкостью. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 6.
4. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. ОНТИ, 1936.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
6. Румянцев В. В. Об устойчивости равновесия твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.
7. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ, 1947.
8. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, ОГИЗ, 1948.
9. Белецкий В. В. О либрации спутника. Сб. Искусственные спутники Земли, АН СССР, 1959, вып. 3.
10. Колесников Н. Н. Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
11. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью, ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
12. Stewartson K. On the stability of a spinnig top containing liquid. Journal of fluid mechanics, 1959, vol. 5, part 4.