# ОБРАТНАЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Под антиплоской деформацией понимается напряженное состояние в цилиндрическом теле бесконечно большой высоты, возникающее под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянных вдоль образующих. Пусть два цилиндрических тела, одно из которых абсолютно жесткое, приведены в соприкосновение, так что на площадке контакта имеют место условия сцепления. Абсолютно жесткое тело, к которому приложены некоторые силы, будем называть штампом, а задачу определения напряжений и деформаций в упруго-пластическом теле, материал которого следует диаграмме Прандтля,— контактной упруго-пластической задачей. В работе [1] была рассмотрена упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации в том случае, когда на границе тела заданы нагрузки, так что в пластической области задача была статически определимой. Контактная упруго-пластическая задача является статически неопределимой.

Л. А. Галиным[1] была поставлена задача определения контура тела или отдельных участков его, таких чтобы пластическая зона возникала сразу на всем контуре или отдельных его участках. Ниже рассмотрено несколько контактных упруго-пластических задач в такой обратной постановке (§ 2, 3). В § 4 приведено решение задачи, рассмотренной в работе [1] в том случае, когда пластическая зона возникает сразу на некотором участке границы, вырождаясь в линию на границе тела.

**§ 1. Основные соотношения.** 1°. Поле смещений и напряжений в рассматриваемом теле таково, что

$$u = v = 0, \qquad w = w(x, y), \qquad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \qquad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \tag{1.1}$$

Здесь $u$, $v$, $w$ — компоненты вектора смещения; $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$, $\tau_{xy}$, $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ — компоненты тензора напряжений; $x$, $y$, $z$ — декартовы координаты (ось $z$ параллельна образующей). В пластической области имеет место условие текучести

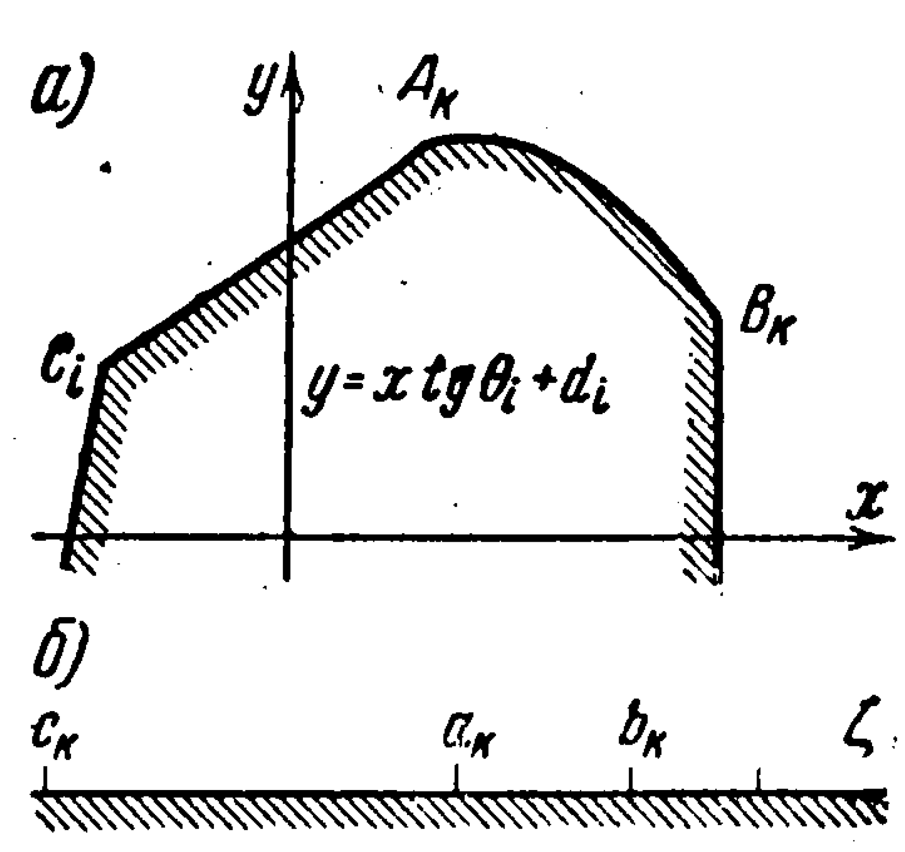
$$|\tau| = k, \qquad \tau = \tau_{xz} + i\tau_{yz} = ke^{i\theta} \tag{1.2}$$

где $k$ — константа пластичности.

Вдоль прямой $y = -x \operatorname{ctg} \theta + C$, $\theta = \text{const}$, совпадающей с линией скольжения и ортогональной вектору $\tau$ в каждой точке, имеем соотношение [1]

$$w = \text{const} \tag{1.3}$$

На границе упругой и пластической областей принимаем непрерывность напряжений и смещения.




Фиг. 1

В упругой области напряжения и смещение можно представить [2] через одну аналитическую функцию комплексного переменного ($\mu$ — модуль сдвига)

$$w = \operatorname{Re} f(z), \qquad \tau = \tau_{xz} + i\tau_{yz} = \mu\overline{f'(z)} \qquad (z = x + iy) \tag{1.4}$$

2°. Пусть пластическая зона имеет ненулевую площадь, а линии скольжения, выходящие из контура тела, на котором задано условие сцепления со штампом $w = \text{const}$, пересекают границу упругой и пластической областей на некотором участке $L$. Из формул (1.3), (1.4) следует тогда, что на участке $L$ должна равняться нулю касательная составляющая вектора напряжения $\tau$, т. е. линии скольжения должны быть касательными к контуру $L$. Если контур тела — выпуклая гладкая дуга, то невозможно построить выпуклый гладкий контур $L$, опирающийся на эту дугу и обладающий указанным свойством. По-видимому, решение в пластической зоне всегда разрывно в этом случае.

§ 2. **Обратная контактная упруго-пластическая задача.** 1°. Пусть контур тела образован заданными отрезками прямых, свободных от нагрузок, и кривых линий, являющихся площадками контакта со штампами. Требуется определить криволинейные дуги из условия, что пластические области расположены на них. Пусть $A_k$, $B_k$, $C_i$ — вершины многоугольника, образующего контур тела (фигура); $A_k$, $B_k$ — точки криволинейных дуг, некоторые из них могут уходить на бесконечность, $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$. Уравнения свободных от нагрузки прямолинейных границ имеют вид

$$y = x \operatorname{tg} \theta_j + d_j \qquad (j = 1, \ldots, m + n)$$

где $\theta_j$ — угол, образованный $j$-й прямой с осью $x$. Условие отсутствия нагрузки на $j$-м прямолинейном участке границы при помощи представления (1.4) запишется в виде

$$\operatorname{Re}[(\operatorname{tg} \theta_j - i) f'(z)] = 0 \tag{2.1}$$

На неизвестном контуре тела имеет место условие сцепления (1.3) и условие (1.2), которые на основе формулы (1.4) запишутся в форме

$$\operatorname{Re} f(z) = h_k, \qquad |f'(z)| = k / \mu \tag{2.2}$$

где $h_k$ — постоянное смещение $k$-го штампа.

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного $\zeta$ при помощи конформного преобразования $z = \omega(\zeta)$ так, чтобы точки $C_i$, $A_k$, $B_k$ плоскости $z$ перешли в точки действительной оси $c_i$, $a_k$, $b_k$ плоскости $\zeta$, а упругая область — в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ (фиг. 1). Обозначим $f[\omega(\zeta)] = F(\zeta)$. Для определения аналитических в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$ функций $\omega(\zeta)$ и $F(\zeta)$ на основании (2.1), (2.2) и уравнений прямых получаем краевую задачу

$$\left|\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right| = \frac{k}{\mu} \quad \text{на } L, \qquad \operatorname{Re}\left[(\operatorname{tg} \theta_j - i)\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] = 0 \quad \text{на } M \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Re} F(\zeta) = h_k \quad \text{на } L, \qquad \operatorname{Re}[(\operatorname{tg} \theta_j + i)\omega(\zeta)] = -d_j \quad \text{на } M \tag{2.4}$$

Здесь $L$ — точки действительной оси, расположенные между $a_k$ и $b_k$, а $M$ — остальные точки действительной оси.

Краевая задача (2.3) относится к типу задач, изученных в работе [1], так что функция $F'(\zeta) / \omega'(\zeta)$ определяется независимо от $\omega(\zeta)$. Продифференцировав краевое условие (2.4) и использовав решение краевой задачи (2.3), для определения $\omega'(\zeta)$ получаем задачу Гильберта для верхней полуплоскости, полное решение которой изложено в монографиях Н. И. Мусхелишвили [3] и Ф. Д. Гахова [4]. При решении этих задач условия равновесия, используются аналогично плоской задаче теории упругости [5]. При подсчете числа нулей, необходимого для решения краевой задачи (2.3), удобно использовать гидродинамическую аналогию [6,1].

2°. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть контур тела образован лучами $\arg z = \pm\theta_0$, свободными от нагрузки, и неизвестной криволинейной дугой, жестко сцепленной со штампом, на который действует сила $P$.

В этом случае криволинейная дуга является окружностью радиуса

$$R = \frac{P}{2k\theta_0} \tag{2.5}$$

а функция $f(z)$ равна

$$f(z) = \frac{kR}{\mu} \ln z + C \tag{2.6}$$

где $C$ — неопределенная константа.

§ 3. **Обратная контактная упруго-пластическая задача.** Пусть жесткий штамп, ограниченный заданными отрезками прямых и криволинейными дугами, полностью заделан в бесконечное упруго-пластическое тело. Пластическая область расположена на криволинейных дугах, которые требуется определить. На отрезках прямых границы тела на основе представления (1.4) выполняется условие

$$\operatorname{Re} f(z) = h \tag{3.1}$$

где $h$ — некоторая постоянная.

Используем обозначения предыдущего параграфа. На параметрической плоскости $\zeta$ для определения функций $z = \omega(\zeta)$ и $F(\zeta) = f[\omega(\zeta)]$ аналогично § 2 получаем краевую задачу

$$\operatorname{Re} F(\zeta) = h \quad \text{на} \quad L + M \tag{3.2}$$

$$\left|\frac{\omega'(\zeta)}{F'(\zeta)}\right| = \frac{\mu}{k} \quad \text{на } L, \qquad \operatorname{Re}\left[(1 - i \operatorname{tg} \theta_j) \frac{\omega'(\zeta)}{F'(\zeta)}\right] = 0 \quad \text{на } M \tag{3.3}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда вся граница жесткого штампа, к которому приложена сила $P$, неизвестна. В рассматриваемом примере граница штампа является окружностью радиуса

$$R = \frac{P}{2\pi k} \tag{3.4}$$

а функция $f(z)$ равна

$$f(z) = \frac{P}{2\pi\mu} \ln z + C \qquad (C = \text{const}) \tag{3.5}$$

**§ 4. Упруго-пластическая задача для внешности контура, образованного отрезками прямых и кривых линий, свободных от нагрузки в том случае, когда пластическая зона вырождается в криволинейные граничные дуги.** 1°. Используем обозначения § 4 работы [1]. Для рассматриваемого вырожденного случая краевая задача для определения функции $\omega'(\zeta)$ отличается от соответствующей краевой задачи для невырожденного случая [1]

$$\arg \omega'(\zeta) = \frac{\pi}{2} + \theta \quad \text{на } L, \ \operatorname{Re}\ [(\operatorname{tg} \theta_j + i)\, \omega'(\zeta)] = 0 \text{ на } M \tag{4.1}$$

Здесь функция $\theta = -\arg F(\zeta)$ известна из решения другой краевой задачи ([1], § 4, (4.3)).

2°. Рассмотрим несколько более общую нелинейную краевую задачу: определить аналитическую в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$ функцию $f(\zeta)$ по краевому условию на действительной оси $t$

$$\arg f(t) = \alpha(t) \quad (t \in L), \qquad \operatorname{Re}\ [a(t) - ib(t) f(t)] = 0 \quad (a + ib \neq 0, \ t \in M) \tag{4.2}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$, $\alpha(t)$ — непрерывные почти всюду функции, удовлетворяющие условию Гельдера на интервалах непрерывности; $L$ и $M$ — отрезки действительной оси.

Построим каноническую функцию $X(\zeta)$ краевой задачи (4.2) совершенно аналогично тому, как это сделано в работе ([1], формулы (3.2), (3.3)). Введем кусочно-аналитическую функцию $\Phi(\zeta)$

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta) / X^+(\zeta) & \text{при } \operatorname{Im} \zeta > 0 \\ \bar{f}(\zeta) / X^-(\zeta) & \text{при } \operatorname{Im} \zeta < 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Для функции $\Phi(\zeta)$, аналитической во внешности разрезов $L$ действительной оси, из граничного условия (4.2) получается однородная линейная краевая задача Римана [3, 4]

$$\Phi^+(t) = e^{2i\alpha(t)}\, \Phi^-(t) \qquad (t \in L) \tag{4.4}$$

*Замечание.* Решение задачи, указанной в названии параграфа, можно получить также, используя гидродинамическую аналогию.

Поступила 12 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации. ПММ, 1962 т. XXVI, вып. 4.
2. Trefftz E. Ueber die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Ueberschreitung der Fließgrenze, ZAMM, 1925, Bd. 5, S. 64—73.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.—Л., ГТТИ, 1946.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
6. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.