СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА С РАВНООТСТОЯЩИМИ МАССАМИ

К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

Рассматривается задача о свободных колебаниях тонкого стержня постоянного поперечного сечения с осью, очерченной по окружности, несущего равные и равноотстоящие массы. Предполагается, что колебания стержня распадаются на изгибные колебания в плоскости его оси и колебания, сопровождаемые перемещениями, перпендикулярными плоскости оси и кручением. Получено решение для обоих типов колебаний в случае, когда допустимо считать ось стержня нерастяжимой, участки кольца между массами безынерционными и пренебрегать инерцией вращения масс. Задача представляет интерес для изучения колебаний элементов ряда машин, в частности, корпусов некоторых типов центробежных мельниц, статоров электрических машин, турбинных дисков с массивными ободами [1] и т. п. Приближенное решение для колебаний, перпендикулярных плоскости кольца, дано в работе [1].

1. При указанных выше предположениях в случае изгибных колебаний в плоскости оси кольца форма тангенциального смещения $v(\theta)$ точек оси и ее первые три производные непрерывны, а четвертая и пятая производные в точках, где расположены массы, т. е. при $\theta = k\alpha$, претерпевают разрыв; амплитудные значения скачков производных находятся из известных соотношений между усилиями в сечениях стержня и перемещениями точек его оси

$$\frac{d^4}{d\theta^4} v(k\alpha+0) - \frac{d^4}{d\theta^4} v(k\alpha-0) = \frac{M\lambda^2R^3}{EI}\frac{d}{d\theta} v(k\alpha)$$
$$\frac{d^5}{d\theta^5} v(k\alpha+0) - \frac{d^5}{d\theta^5} v(k\alpha-0) = -\frac{M\lambda^2R^3}{EI} v(k\alpha)$$
$$(k=0, 1, \ldots, n-1) \tag{1.1}$$

Здесь k — номер массы, θ — центральный угол между текущей точкой оси и массой с номером нуль, $\alpha 2\pi/n$ — центральный угол между соседними массами, n — число масс, λ — частота колебаний, M — величина присоединенной массы, EI — соответствующая изгибная жесткость, R — радиус осевой окружности.

Участки кольца между массами предполагаются безынерционными, поэтому при $(k-1)\alpha < \theta < k\alpha$ $(k=0, \ldots, n-1)$ смещение $v(\theta)$ удовлетворяет уравнению [2]

$$\frac{d^6v}{d\theta^6} + 2\frac{d^4v}{d\theta^4} + \frac{d^2v}{d\theta^2} = 0 \tag{1.2}$$

Общий интеграл этого уравнения в промежутке $(k-1)\alpha \leqslant \theta \leqslant k\alpha$ примем в

$$v(\theta) = \sum_{r=0}^{5} v_k^{(r)} \Phi_r(\theta - k\alpha) \tag{1.3}$$

Здесь

$$v_k^{(0)} = v(k\alpha), \qquad v_k^{(r)} = \frac{d^r}{d\theta^r} v(k\alpha-0) \qquad (r=1, \ldots, 5) \tag{1.4}$$

$$\Phi_0(\theta) = 1 \qquad \Phi_1(\theta) = \theta$$
$$\Phi_2(\theta) = 2 - \frac{1}{2}\theta\sin\theta - 2\cos\theta, \qquad \Phi_3(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2}\theta\cos\theta - \frac{5}{2}\sin\theta$$
$$\Phi_4(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\theta\sin\theta - \cos\theta, \qquad \Phi_5(\theta) = \theta + \frac{1}{2}\theta\cos\theta - \frac{3}{2}\sin\theta \tag{1.5}$$

Функции $\Phi_r(\theta)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.2) с единичной матрицей.

После дифференцирования интеграла (1.3), подстановки в него $\theta = (k-1)\alpha$ и замены значений четвертой и пятой производных $v(\theta)$ за $k-1$-й массой их значениями перед этой массой согласно условиям сопряжения (1.1) получается совокупность рекуррентных формул

$$
\left.
\begin{aligned}
v_{k-1}^{(r)} &= \sum_{s=0}^{5} v_k^{(s)} \Phi_s^{(r)}(-\alpha), \qquad (r=0,1,2,3)\\
v_{k-1}^{(4)} &= \sum_{s=0}^{5} v_k^{(s)} \Phi_s^{(4)}(-\alpha) - \beta v_{k-1}^{(1)}\\
v_{k-1}^{(5)} &= \sum_{s=0}^{5} v_k^{(s)} \Phi_s^{(5)}(-\alpha) + \beta v_{k-1}^{(0)}
\end{aligned}
\right\} \tag{1.6}
$$

Здесь

$$
\beta = \frac{MR^3\lambda^2}{EI}, \qquad \Phi_s^{(r)}(\alpha) = \frac{d^r}{d\alpha^r}\Phi_s(\alpha) \qquad (r,\ s = 0,\dots,5).
$$

Формулы (1.6) представляют собой систему шести линейных однородных уравнений первого порядка в конечных разностях относительно шести функций $v_k^{(r)}$ дискретного аргумента — номера массы k.

При решении системы (1.6) целесообразно исключить из нее переменные $v_k^{(3)}$, $v_k^{(4)}$ и $v_k^{(5)}$; определим их через смещения $v(\theta)$ и их первые две производные в $k-1$-м, k-м и $k+1$-м узлах; для этого воспользуемся первыми тремя уравнениями системы (1.6) и аналогичными им соотношениями для k-го и $k+1$-го узлов

$$
v_{k+1}^{(r)} = \sum_{s=1}^{5} v_k^{(s)}\Phi_s^{(r)}(\alpha) + \beta\left[\Phi_4^{(r)}(\alpha)\, v_k^{(1)} - \Phi_5^{(r)}(\alpha)\, v_k^{(0)}\right] \qquad (r=0,1,2) \tag{1.7}
$$

В результате получим

$$
\begin{aligned}
v_k^{(3)} &= \frac{1}{2(\Phi_3\Phi_5'' - \Phi_3''\Phi_5)}\{\Phi_5''\,[(v_{k+1}^{(0)} - v_{k-1}^{(0)} - 2\Phi_1 v_k^{(1)}) - \beta(\Phi_4 v_k^{(1)} - \Phi_5 v_k^{(0)})] -\\
&\qquad - \Phi_5\,[(v_{k+1}^{(2)} - v_{k-1}^{(2)}) - \beta(\Phi_4'' v_k^{(1)} - \Phi_5'' v_k^{(0)})]\}\\
v_k^{(4)} &= \frac{1}{2\Phi_4''}\,[v_{k+1}^{(2)} - 2\Phi_2'' v_k^{(2)} + v_{k-1}^{(2)} - \beta(\Phi_4'' v_k^{(1)} - \Phi_5'' v_k^{(0)})]\\
v_k^{(5)} &= \frac{1}{2(\Phi_3\Phi_5'' - \Phi_3''\Phi_5)}\{-\Phi_3''\,[(v_{k+1}^{(0)} - v_{k-1}^{(0)} - 2\Phi_1 v_k^{(1)}) - \beta(\Phi_4 v_k^{(1)} - \Phi_5 v_k^{(0)})] +\\
&\qquad + \Phi_3\,[v_{k+1}^{(2)} - v_{k-1}^{(2)} - \beta(\Phi_4'' v_k^{(1)} - \Phi_5'' v_k^{(0)})]\}
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Здесь и далее аргументом у всех функций Φ_r $(r=0,\dots,5)$ будет угол α, а штрихом обозначено дифференцирование по α.

Из тех же трех уравнений системы (1.6) и соотношений (1.7) и (1.8) вытекает еще одна группа рекуррентных формул, связывающих значения тангенциального смещения и его первых двух производных в трех соседних узлах стержня

$$
\begin{aligned}
&\Phi_4''\,(v_{k+1}^{(0)} - 2v_k^{(0)} + v_{k-1}^{(0)}) + \beta(\Phi_4''\Phi_5 - \Phi_4\Phi_5'')\, v_k^{(0)} - \Phi_4\,(v_{k+1}^{(2)} + v_{k-1}^{(2)}) +\\
&\qquad + 2(\Phi_2''\Phi_4 - \Phi_2\Phi_4'')\, v_k^{(2)} = 0\\
&\beta(\Phi_4''\Phi_5' - \Phi_4'\Phi_5'')\, v_k^{(0)} + \Phi_4''\,(v_{k+1}^{(1)} - v_{k-1}^{(1)}) - \Phi_4'\,(v_{k+1}^{(2)} + v_{k-1}^{(2)}) +\\
&\qquad + 2(\Phi_2''\Phi_4' - \Phi_2'\Phi_4'')\, v_k^{(2)} = 0\\
&(\Phi_3''\Phi_5' - \Phi_3'\Phi_5'')(v_{k+1}^{(0)} - v_{k-1}^{(0)}) + (\Phi_3\Phi_5'' - \Phi_3''\Phi_5)(v_{k+1}^{(1)} - 2v_k^{(1)} + v_{k-1}^{(1)}) +\\
&\qquad + 2\Phi_1(\Phi_3'\Phi_5'' - \Phi_3''\Phi_5')\, v_k^{(1)} - \beta\,[\Phi_4(\Phi_3''\Phi_5' - \Phi_3'\Phi_5'') + \Phi_4'(\Phi_3\Phi_5'' - \Phi_3''\Phi_5) +\\
&\qquad + \Phi_4''(\Phi_3'\Phi_5 - \Phi_3\Phi_5')]\, v_k^{(1)} + (\Phi_3'\Phi_5 - \Phi_3\Phi_5')(v_{k+1}^{(2)} - v_{k-1}^{(2)}) = 0
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Система (1.9) трех конечно-разностных уравнений второго порядка относительно величин $v_k^{(0)}$, $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ эквивалентна системе (1.6).

После достаточно громоздких вычислений и сокращения на множитель

$$
{}^1/_2\,\alpha\sin\alpha\,({}^1/_4\,\alpha^3 - {}^1/_4\,\alpha\sin^2\alpha + \alpha\cos\alpha - \alpha + \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)
$$

которым различаются характеристические полиномы систем (1.6) и (1.9), характеристическое уравнение системы (1.9) удается представить в форме

$$e^{6q}+1-[4\cos\alpha+2-\beta(\alpha+\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha)](e^{5q}+e^{q})+$$
$$+[4\cos^2\alpha+8\cos\alpha+3+\beta(4\sin\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha-2\alpha-6\alpha\cos\alpha)+$$
$$+\beta^2(^1/_4\,\alpha^2+{}^1/_2\,\alpha^2\cos\alpha-{}^3/_2\,\alpha\sin\alpha-2\cos\alpha+{}^1/_4\cos^2\alpha+{}^7/_4)](e^{4q}+e^{2q})-$$
$$-[8\cos^2\alpha+8\cos\alpha+4-\beta(6\alpha+2\alpha\cos\alpha+4\alpha\cos^2\alpha-4\sin\alpha-8\sin\alpha\cos\alpha)-$$
$$-\beta^2(2\alpha\sin\alpha+\alpha\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha-{}^1/_2\sin^2\alpha-4\cos\alpha-{}^3/_2\alpha^2+1)]\,e^{3q}=0 \qquad (1.10)$$

Из условий периодичности решений разностных уравнений

$$v_0^{(r)}=v_n^{(r)} \qquad (r=0,1,\ldots,5) \qquad (1.11)$$

следует, что характеристическое уравнение (1.10) должно иметь корни вида

$$e^q=\exp\frac{2\pi mi}{n}=e^{\alpha mi} \qquad (i^2=-1,\ m\text{ — любое целое число}) \qquad (1.12)$$

Подстановка (1.12) в (1.10) приводит к квадратному уравнению для вычисления всех частот свободных колебаний при любом числе масс

$$\beta^2[2\cos m\alpha\,(^1/_4\,\alpha^2+{}^1/_2\,\alpha^2\cos\alpha-{}^3/_2\,\alpha\sin\alpha-2\cos\alpha+{}^1/_4\cos^2\alpha+{}^7/_4)-$$
$$-{}^3/_2\,\alpha^2+2\alpha\sin\alpha+\alpha\sin\alpha\cos\alpha-4\cos\alpha+3\cos^2\alpha-{}^1/_2\sin^2\alpha+1]+$$
$$+\beta\,[2\cos 2m\alpha\,(\alpha+\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha)+2\cos m\alpha\,(4\sin\alpha\cos\alpha+$$
$$+4\sin\alpha-6\alpha\cos\alpha-2\alpha)+6\alpha+2\alpha\cos\alpha+4\alpha\cos^2\alpha-4\sin\alpha-$$
$$-8\sin\alpha\cos\alpha]+[2\cos 3m\alpha-2\cos 2m\alpha\,(4\cos\alpha+2)+2\cos m\alpha\,(4\cos^2\alpha+8\cos\alpha+3)-$$
$$-8\cos^2\alpha-8\cos\alpha-4]=0 \qquad (1.13)$$

Следует отметить, что ввиду высокой степени симметрии системы число определяемых из частотного уравнения (1.13) различных значений частот меньше $2n$ — числа ее степеней свободы; кроме того, одной и той же частоте отвечают две линейно независимые формы тангенциального смещения масс

$$(v_{km}^{(0)})_1=\cos mk\alpha, \qquad (v_{km}^{(0)})_2=\sin mk\alpha \qquad (1.14)$$

Соответствующие формы радиального смещения масс $v_{km}^{(1)}$, а также формы стержня в пролетах могут быть построены согласно соотношениям (1.9), (1.8), (1.3) и (1.1).

Разложение частотного уравнения (1.13) в ряд по степеням α

$$\left(\frac{\rho R^4\lambda^2}{EI}\right)^2(0\cdot\alpha^6+\cdots)+\frac{\rho R^4\lambda^2}{EI}\,[(m^2+1)\,\alpha^6+\cdots]\;-\;[m^2\,(m^2-1)^2\,\alpha^6+\cdots]=0$$
$$(\beta=nM/2\pi R) \qquad (1.15)$$

показывает, что если число масс неограниченно увеличивается, а сумма их величин остается постоянной, то половина числа частот рассматриваемой системы стремится к значениям соответствующих частот колебаний кольца плотности ρ, а другая половина частот неограниченно возрастает; это возрастание объясняется тем, что условие нерастяжимости оси кольца при неограниченном увеличении числа масс оказывается эквивалентным наложению некоторой абсолютно жесткой связи. Существенно, что частоты второй группы не могут быть найдены таким приближенным методом, какой использован, например, в работе [1].

2. Рассмотрим колебания, сопровождаемые перемещениями, перпендикулярными плоскости оси кольца и кручением.

Форма прогиба $w(\theta)$ при колебаниях такого типа удовлетворяет дифференциальному уравнению, содержащему дельта-функцию $\delta(\theta)$

$$\frac{d^6w}{d\theta^6}+2\frac{d^4w}{d\theta^4}+\frac{d^2w}{d\theta^2}=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{MR^3\lambda^2}{GI}\,\delta(\theta-k\alpha)-\frac{MR^3\lambda^2}{EI_1}\frac{d^2}{d\theta^2}\,\delta(\theta-k\alpha)\right]w(k\alpha) \qquad (2.1)$$

Здесь EI_1 — соответствующая изгибная жесткость, GI — жесткость стержня на кручение.

Общий интеграл уравнения (2.1) при $\theta = k\alpha$ превращается в рекуррентную формулу для определения прогибов $w(k\alpha)$ точек крепления масс

$$w(k\alpha) = \sum_{r=0}^{5} \frac{d^r w(-0)}{d\theta^r} \Phi_r(k\alpha) + \beta \sum_{j=0}^{k} \{\Phi_3[(k-j)\alpha] - \gamma\Phi_5[(k-j)\alpha]\} w(j\alpha) \qquad (2.2)$$

Здесь

$$\beta = \frac{MR^3\lambda^2}{EI_1}, \qquad \gamma = \frac{EI_1}{GI}$$

Формула (2.2) эквивалентна соответствующим конечно-разностным уравнениям и также позволяет определить прогиб k-й массы как функцию ее номера. Если известна функция

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w(k\alpha) z^k \qquad (2.3)$$

то для вычисления величин $w(k\alpha)$ достаточно знать значения производных $W(z)$ при $z = 0$. Формула (2.2) после умножения на z^k и суммирования дает

$$\{1 - \beta[\Phi_3^*(z) - \gamma\Phi_5^*(z)]\} W(z) = \sum_{r=0}^{5} \frac{d^r w(-0)}{d\theta^r} \Phi_r^*(z) \qquad (2.4)$$

где

$$\Phi_r^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_r(k\alpha) z^k \qquad (r=0,1\ldots,5). \qquad (2.5)$$

Определенная из (2.4) функция $W(z)$ оказывается дробнорациональной и может быть представлена в виде

$$W(z) = \frac{1}{Q(z,\beta)} \sum_{r=0}^{5} \frac{d^r w(-0)}{d\theta^r} P_r(z) \qquad (2.6)$$

где $P_r(z)$ и $Q(z,\beta)$ — полиномы от z, причем $W(z)$ регулярна в бесконечно удаленной точке; значения ее производных при $z = 0$ могут быть определены из соответствующих разложений по корням полинома $Q(z,\beta)$.

Из условия периодичности

$$w(0) = w(n\alpha) \qquad (2.7)$$

следует, что полином $Q(z,\beta)$ должен иметь корни вида

$$z = \exp\frac{2\pi mi}{n} = e^{\alpha mi} \qquad (2.8)$$

Равенство

$$Q(e^{\alpha mi}, \beta) = 0 \qquad (2.9)$$

после некоторых преобразований приводит к явному выражению для частот свободных колебаний

$$\lambda^2 = \frac{EJ_1}{MR^3} 4(\cos m\alpha - 1)(\cos m\alpha - \cos\alpha)^2 : [2(2-\gamma)\alpha(\cos m\alpha - \cos\alpha)^2 +$$
$$+ (1-\gamma)\alpha(\cos m\alpha - 1)(\cos\alpha\cos m\alpha - 1) - (5-3\gamma)\sin\alpha(\cos m\alpha - 1)(\cos m\alpha - \cos\alpha)] \qquad (2.10)$$

При колебаниях рассматриваемого типа, как и в случае колебаний в плоскости оси стержня, одной частоте отвечают две линейно независимые формы колебаний вида (1.14); число определяемых из (2.10) при различных m значений частот, как и ранее, меньше n — числа степеней свободы системы.

Поступила 1 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Колебания кольца с присоединенными массами. Инж. сб., 1956, т. 24.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.