ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Я. Н. Ройтенберг (Москва)

Во многих управляемых системах для построения алгоритма управления требуется информация о положении управляемой системы в фазовом пространстве. Не всегда такая информация может быть непосредственно получена, так как некоторые фазовые координаты системы могут оказаться недоступными для измерения, а кроме того, могут отсутствовать сведения о положении системы ориентировки, относительно которой должно определяться положение управляемой системы.

В работах [1,2] рассмотрен один из возможных косвенных методов получения информации о положении управляемых линейных и нелинейных систем непрерывного действия в фазовом пространстве. Ниже дается распространение этого метода на управляемые импульсные системы.

1. Будем исходить из следующей системы нелинейных разностных уравнений, описывающей движение управляемой импульсной системы:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(T)y_k = x_j(t) + \psi_j(y_1, Ty_1, \ldots, T^{m_1-1}y_1, \ldots, y_n, Ty_n, \ldots, T^{m_n-1}y_n, t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь y_k — обобщенные координаты системы, $x_j(t)$ — заданные внешние силы. Через $f_{jk}(T)$ обозначены полиномы от T, коэффициенты которых представляют собой заданные функции времени, а T является оператором упреждения, определяемым соотношением

$$T^{\mu} y_k = y_k(t + \mu\tau) \tag{1.2}$$

где τ — некоторая постоянная величина. Старшая степень T в полиномах $f_{jk}(T)$ $(j = 1, \ldots, n)$ для данного k обозначена через m_k.

Функции ψ_j $(j = 1, \ldots, n)$ в правых частях уравнений (1.1) являются некоторыми нелинейными фукциями своих аргументов. Эти функции предполагаются непрерывными в некоторой замкнутой области по всем своим аргументам и удовлетворяющими в этой области условиям Липшица относительно аргументов

$$y_1, Ty_1, \ldots, T^{m_1-1}y_1, \ldots, y_n, Ty_n, \ldots, T^{m_n-1}y_n$$

Уравнения (1.1) можно привести [3] к следующему виду[1]

$$Tz_\nu + \sum_{k=1}^{r} a_{\nu k}(t)\, z_k = X_\nu(t) + \Psi_\nu(z_1, \ldots, z_r, t) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1.3}$$

Здесь

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = Ty_1, \ldots, \quad z_{m_1} = T^{m_1-1}y_1, \ldots, \quad z_r = T^{m_n-1}y_n \tag{1.4}$$

$$r = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \tag{1.5}$$

$$X_{\sigma_j}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)} x_k(t)$$

$$\Psi_{\sigma_j}(z_1, \ldots, z_r, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)} \psi_k(z_1, \ldots, z_r, t) \qquad (\sigma_j = \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \tag{1.6}$$

$$\sigma_1 = m_1, \qquad \sigma_2 = m_1 + m_2, \ldots, \sigma_n = r \tag{1.7}$$

---

[1] Пользуюсь случаем отметить, что в работе [3] обнаружена опечатка. На стр. 617 формула (1.34) должна иметь вид:

$$K_{s_i}(j_1\tau) = \sum_{\xi=1}^{m} A_{p_\xi s_i}(j_1\tau)\,[r_{p_\xi} - g_{p_\xi}(j_1\tau)] \quad (i = 1, \ldots, m)$$

а функции $X_\mu(t), \Psi_\mu(z_1, \ldots, z_r, t)$, у которых $\mu \neq \sigma_l$ $(l = 1, \ldots, n)$, тождественно равны нулю.

Через $\Delta^*(t)$ в выражениях (1.6) обозначен определитель из коэффициентов $b_{jk}(t)$, с которыми входят величины $T^{m_k} y_k(t)$ в левые части уравнений (1.1)

$$\Delta^*(t) = | b_{jk}(t) | \tag{1.8}$$

причем предполагается, что этот определитель тождественно не равен нулю. Через B_{kj} обозначены алгебраические дополнения элементов b_{kj} в определителе (1.8).

Вводя матрицы

$$\begin{gathered} z(t) = \| z_\nu(t) \|, \quad a(t) = \| a_{\nu k}(t) \|, \quad X(t) = \| X_\nu(t) \| \\ \Psi(z_1(t), \ldots, z_r(t), t) = \| \Psi_\nu(z_1(t), \ldots, z_r(t), t) \| \end{gathered} \tag{1.9}$$

можно заменить систему скалярных уравнений (1.3) матричным уравнением:

$$z(t+\tau) + a(t)\, z(t) = X(t) + \Psi(z_1(t), \ldots, z_r(t), t) \tag{1.10}$$

Для решения разностного уравнения (1.10) необходимо еще задать матрицу

$$z^*(t) = \| z_\nu^*(t) \| \qquad (0 < t < \tau) \tag{1.11}$$

которая определена на интервале времени $0 < t < \tau$ законом изменения искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ на этом (начальном) интервале.

Обозначая через $\theta(t)$ фундаментальную матрицу для однородного линейного матричного уравнения

$$z(t+\tau) + a(t)\, z(t) = 0 \tag{1.12}$$

и вводя функцию

$$N(t, j\tau) = \theta(t)\,\theta^{-1}(t - \vartheta\tau + j\tau) \tag{1.13}$$

представляющую собой матричную функцию веса для матричного разностного уравнения (1.12) (через $\theta^{-1}(t)$ обозначена обратная матрица), можно перейти [8] от системы нелинейных разностных уравнений (1.3) к системе нелинейных уравнений в конечных суммах

$$\begin{gathered} z_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(t, 0)\, z_k^*(t - \vartheta\tau) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} N_{\nu\sigma_i}(t, j\tau)\, X_{\sigma_i}(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} N_{\nu\sigma_i}(t, j\tau)\, \Psi_{\sigma_i}(z_1(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), \ldots, z_r(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau),\ t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \\ (\vartheta = [t/\tau]) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \end{gathered} \tag{1.14}$$

где через ϑ обозначена целая часть t/τ.

Уравнения (1.14) эквивалентны разностным уравнениям (1.3) вместе с заданным законом изменения искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ на начальном интервале времени $0 < t < \tau$. Они представляют собой аналог интегральным уравнениям в непрерывном анализе.

Подставляя вместо X_{σ_i} и Ψ_{σ_i} их выражения (1.6) и обозначая

$$W_{\nu l}(t, j\tau) = \sum_{i=1}^{n} N_{\nu\sigma_i}(t, j\tau) \frac{B_{li}(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)}{\Delta^*(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots, r \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

можно представить уравнения (1.14) в следующем виде

$$z_\nu(t)=\sum_{k=1}^{r}N_{\nu k}(t,0)\,z_k^*(t-\vartheta\tau)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}W_{\nu l}(t,j\tau)\,x_l(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}W_{\nu l}(t,j\tau)\,\psi_l(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ldots,z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ \ t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)$$

$$(\nu=1,\ldots,r)\tag{1.16}$$

2. Решение системы уравнений (1.16) может быть найдено, если известен закон изменения искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu=1,\ldots,r)$ на интервале времени $0<t<\tau$, т. е. если известна матрица (1.11).

Однако во многих задачах закон изменения искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu=1,\ldots,r)$ на начальном интервале времени $0<t<\tau$ неизвестен, а имеется возможность измерения лишь одной из фазовых координат z_s, причем положение начала отсчета этой координаты также неизвестно. Закон, по которому изменяются внешние силы $x_l(t)$ $(l=1,\ldots,n)$, предполагается известным.

Для определения искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu=1,\ldots,r)$ при поставленных здесь условиях выберем новое произвольное начало отсчета фазовой координаты z_s и фиксируем его. Так как фазовая координата z_s доступна измерению, то при помощи измерений можно найти закон, по которому изменяются относительно нового начала отсчета отклонения фазовой координаты z_s

$$S(\gamma_i\tau+\varepsilon)\qquad 0<\varepsilon<\tau\qquad (i=1,\ldots,r+1)$$

на интервалах времени $\gamma_i\tau<t<(\gamma_i+1)\tau$, где γ_i $(i=1,\ldots,r+1)$ — некоторые целые числа. Так как

$$S(\gamma_i\tau+\varepsilon)=S^*+z_s(\gamma_i\tau+\varepsilon)\qquad (i=1,\ldots,r+1)\tag{2.1}$$

где S^* — отклонение нового начала отсчета относительно исходного начала отсчета, то обозначая

$$S(\gamma_{\mu+1}\tau+\varepsilon)-S(\gamma_\mu\tau+\varepsilon)=L_\mu(\varepsilon),\qquad 0<\varepsilon<\tau\qquad (\mu=1,\ldots,r)\tag{2.2}$$

получим следующие, не содержащие неизвестной величины S^*, соотношения между приращениями фазовой координаты z_s и результатами измерений

$$z_s(\gamma_{\mu+1}\tau+\varepsilon)-z_s(\gamma_\mu\tau+\varepsilon)=L_\mu(\varepsilon)\qquad 0<\varepsilon<\tau\qquad (\mu=1,\ldots,r)\tag{2.3}$$

При помощи (1.16) можно привести выражения (2.3) к следующему виду:

$$\sum_{k=1}^{r}c_{\mu k}(\varepsilon)\,z_k^*(\varepsilon)=P_\mu(\varepsilon)-\qquad (0<\varepsilon<\tau;\ \mu=1,\ldots,r)\tag{2.4}$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_{\mu+1}}W_{sl}(\gamma_{\mu+1}\tau+\varepsilon,\,j\tau)\,\psi_l(z_1(\varepsilon+j\tau-\tau),\ldots,z_r(\varepsilon+j\tau-\tau),\ \varepsilon+j\tau-\tau)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_\mu}W_{sl}(\gamma_\mu\tau+\varepsilon,\,j\tau)\,\psi_l(z_1(\varepsilon+j\tau-\tau),\ldots,z_r(\varepsilon+j\tau-\tau),\ \varepsilon+j\tau-\tau)$$

где

$$c_{\mu k}(\varepsilon)=N_{sk}(\gamma_{\mu+1}\tau+\varepsilon,0)-N_{sk}(\gamma_\mu\tau+\varepsilon,0),\quad 0<\varepsilon<\tau,\ (\mu,k=1,\ldots,r)\tag{2.5}$$

$$P_\mu(\varepsilon)=L_\mu(\varepsilon)-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_{\mu+1}}W_{sl}(\gamma_{\mu+1}\tau+\varepsilon,\,j\tau)\,x_l(\varepsilon+j\tau-\tau)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_\mu}W_{sl}(\gamma_\mu\tau+\varepsilon,\,j\tau)\,x_l(\varepsilon+j\tau-\tau),\qquad 0<\varepsilon<\tau,\qquad (\mu=1,\ldots,r)\tag{2.6}$$

Из уравнений (2.4) следует, что

$$z_i^*(\varepsilon)=\frac{1}{\Lambda(\varepsilon)}\sum_{\mu=1}^{r}A_{\mu i}(\varepsilon)P_\mu(\varepsilon)-\frac{1}{\Lambda(\varepsilon)}\sum_{\mu=1}^{r}A_{\mu i}(\varepsilon)\times$$

$$\times\Big[\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_{\mu+1}}W_{sl}(\gamma_{\mu+1}\tau+\varepsilon,\ j\tau)\ \psi_l(z_1(\varepsilon+j\tau-\tau),\ldots,z_r(\varepsilon+j\tau-\tau),\ \varepsilon+j\tau-\tau)-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_\mu}W_{sl}(\gamma_\mu\tau+\varepsilon,\ j\tau)\ \psi_l(z_1(\varepsilon+j\tau-\tau),\ldots,z_r(\varepsilon+j\tau-\tau),\ \varepsilon+j\tau-\tau)\Big]$$

$$0<\varepsilon<\tau\qquad (i=1,\ldots,r)\tag{2.7}$$

где

$$\Lambda(\varepsilon)=\begin{vmatrix}c_{11}(\varepsilon) & c_{12}(\varepsilon)\ldots c_{1r}(\varepsilon)\\ \ldots & \ldots\ldots\\ c_{r1}(\varepsilon) & c_{r2}(\varepsilon)\ldots c_{rr}(\varepsilon)\end{vmatrix}\tag{2.8}$$

а $A_{\mu i}$ (μ, $i=1,\ldots,r$) — алгебраические дополнения элементов $c_{\mu i}$ в определителе (2.8).

Так как $\vartheta=[t/\tau]$, то $0<t-\vartheta\tau<\tau$, и поэтому входящие в уравнения (1.16) функции $z_k^*(t-\vartheta\tau)$ ($k=1,\ldots,r$) можно заменить найденными для $z_k^*(\varepsilon)$ ($0<\varepsilon<\tau$) выражениями (2.7). Таким образом, получим следующую, не содержащую неизвестных функций $z_k^*(\varepsilon)$, систему нелинейных уравнений в конечных суммах относительно искомых функций $z_i(t)$ ($i=1,\ldots,r$):

$$z_\nu(t)=G_\nu(t)-\sum_{\mu=1}^{r}V_{\nu\mu}(t)\Big[\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_{\mu+1}}W_{sl}(t-\vartheta\tau+\gamma_{\mu+1}\tau,\ j\tau)\times$$

$$\times\psi_l(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ldots,z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_\mu}W_{sl}(t-\vartheta\tau+\gamma_\mu\tau,\ j\tau)\times$$

$$\times\psi_l(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ldots,z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)\Big]+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}W_{\nu l}(t,\ j\tau)\psi_l(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ldots,z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)$$

$$(\nu=1,\ldots,r)\tag{2.9}$$

где

$$G_\nu(t)=\frac{1}{\Lambda(t-\vartheta\tau)}\sum_{\xi=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}N_{\nu\xi}(t,0)A_{\mu\xi}(t-\vartheta\tau)P_\mu(t-\vartheta\tau)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}W_{\nu l}(t,\ j\tau)x_l(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)\qquad(\nu=1,\ldots,r)\tag{2.10}$$

$$V_{\nu\mu}(t)=\frac{1}{\Lambda(t-\vartheta\tau)}\sum_{\xi=1}^{r}N_{\nu\xi}(t,0)A_{\mu\xi}(t-\vartheta\tau)\qquad(\nu,\ \mu=1,\ldots,r)\tag{2.11}$$

Для дискретных значений аргумента $t=\vartheta\tau$ ($\vartheta=1,2,\ldots$) уравнения (2.9) принимают вид

$$z_\nu(\vartheta\tau)=G_\nu(\vartheta\tau)-\sum_{\mu=1}^{r}V_{\nu\mu}(\vartheta\tau)\Big[\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_{\mu+1}}W_{sl}(\gamma_{\mu+1}\tau,\ j\tau)\times$$

$$\times\psi_l(z_1(j\tau-\tau),\ldots,z_r(j\tau-\tau),\ j\tau-\tau)-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_\mu}W_{sl}(\gamma_\mu\tau,\ j\tau)\psi_l(z_1(j\tau-\tau),\ldots,z_r(j\tau-\tau),\ j\tau-\tau)\Big]+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}W_{\nu l}(\vartheta\tau,\ j\tau)\psi_l(z_1(j\tau-\tau),\ldots,z_r(j\tau-\tau),\ j\tau-\tau)\Big]$$

$$(\nu=1,\ldots,r)\tag{2.12}$$

Для отыскания значений искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu=1,\ldots,r)$ лишь в дискретных точках $t=\vartheta\tau$ $(\vartheta=1,2,\ldots)$ достаточно найти решение системы уравнений (2.12). Определение же функций $z_\nu(t)$ $(\nu=1,\ldots,r)$ для непрерывного аргумента t требует решения системы уравнений (2.9). Для решения уравнений (2.9) и (2.12) необходимо применить численные методы [4].

Отметим, что условия разрешимости системы уравнений (2.9) в общем случае неизвестны пока во всей полноте. Для отдельных случаев, а именно для линейных систем, этот вопрос изучен в работе Р. Е. Калмана [5], где условие разрешимости соответствующих уравнений названо условием наблюдаемости управляемой системы.

3. В случае, когда нелинейные функции $\psi_l(z_1,\ldots,z_r,t)$ $(l=1,\ldots,n)$ не зависят от некоторых фазовых координат z_ρ, число уравнений, образующих систему (2.9), уменьшится. Так, например, если под знак нелинейных функций ψ_l $(l=1,\ldots,n)$ входит лишь одна фазовая координата z_k

$$\psi_l=\psi_l(z_k(t),\ t)\qquad (l=1,\ldots,n) \tag{3.1}$$

то в соответствии с (2.9) потребуется решить следующее нелинейное уравнение относительно неизвестной функции $z_k(t)$:

$$\begin{gathered}
z_k(t)=G_k(t)-\sum_{\mu=1}^{r}V_{k\mu}(t)\times\\
\times\Bigg[\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_{\mu+1}}W_{sl}(t-\vartheta\tau+\gamma_{\mu+1}\tau,\ j\tau)\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\quad t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)-\\
-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_\mu}W_{sl}(t-\vartheta\tau+\gamma_\mu\tau,j\tau)\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)\Bigg]+\\
+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}W_{kl}(t,\ j\tau)\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Остальные фазовые координаты z_ρ будут выражены в конечных суммах:

$$\begin{gathered}
z_\rho(t)=G_\rho(t)-\sum_{\mu=1}^{r}V_{\rho\mu}(t)\times\\
\times\Bigg[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_{\mu+1}}W_{sl}(t-\vartheta\tau+\gamma_{\mu+1}\tau,j\tau)\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\quad t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)-\\
\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\gamma_\mu}W_{sl}(t-\vartheta\tau+\gamma_\mu\tau,j\tau)\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)\Bigg]+\\
+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta}W_{\rho l}(t,\ j\tau)\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\quad t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)\\
(\rho=1,\ldots,k-1,\ k+1,\ldots,r)
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Поступила 26 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я. Н. О некоторых косвенных методах получения информации о положении управляемой системы в фазовом пространстве. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
2. Ройтенберг Я. Н. Об определении положения нелинейной управляемой системы в фазовом пространстве. ДАН СССР, 1962, т. 144, № 6, стр. 1225—1228.
3. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи динамического программирования для нелинейных импульсных систем. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
4. Канторович Л. В., Акилов Т. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959, стр. 650.
5. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Труды I международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению, том 2, Из-во АН СССР, М, 1961, стр. 521.