ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ф. Х. Цельман (Москва)

В работах Жуковского [1], Слудского [2], Хафа [3], Пуанкаре [4] было показано, что движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этот же факт приводимости уравнений движения к обыкновенным дифференциальным уравнениям (для эллипсоидальной полости) доказан в статье [5].

В статье В. В. Румянцева [6] получены достаточные условия устойчивости.

В данной статье приводимость уравнений движения используется для исследования устойчивости движения твердого тела, имеющего полость в форме трехосного эллипсоида, полностью заполненную идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Отметим, что Н. Г. Четаев [7] дал решение подобной задачи в случае безвихревого движения жидкости.

Пусть $Ox_1y_1z_1$ — неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O тела, z_1 — направлена вертикально вверх, $Oxyz$ — подвижная система координат, оси которой совпадают с главными осями инерции твердого тела для точки O; уравнение поверхности полости, заполненной жидкостью в системе xyz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

Движение жидкости, заполняющей полость (I), можно описать [2,3] формулами

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\omega_2 z-\omega_3 y,\qquad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\omega_3 x-\omega_1 z,\qquad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\omega_1 y-\omega_2 x \tag{2}$$

где v_x, v_y, v_z обозначают соответственно проекции на подвижные оси вектора $\mathbf{v}$ абсолютной скорости жидкости; $\varphi(x, y, z, t)$ — гармоническая функция координат; ω_1, ω_2, ω_3 — функции одного только времени t. Функцию φ можно выписать в явном виде [6]. Обозначим через p, q, r проекции на оси xyz вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости тела, а через γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы неподвижной оси z_1, относительно подвижных осей.

Движение системы оболочка — жидкость можно описать [6] следующими тремя группами уравнений, первая из которых соответствует теореме момента количества движения, вторая — уравнению Гельмгольца вихревого движения, третья — уравнению Пуассона для направляющих косинусов

$$\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}+A_2\frac{d\omega_1}{dt}+(C-B)qr+C_2q\omega_3-B_2r\omega_2=R\gamma_2\\
&B\frac{dq}{dt}+B_2\frac{d\omega_2}{dt}+(A-C)rp+A_2r\omega_1-C_2p\omega_3=-R\gamma_1\qquad (R=Mgz^\circ)\\
&C\frac{dr}{dt}+C_2\frac{d\omega_3}{dt}+(B-A)pq+B_2p\omega_2-A_2q\omega_1=0
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\omega_1}{dt}=2a^2\left(\frac{r\omega_2}{a^2+b^2}-\frac{q\omega_3}{c^2+a^2}\right)-2\,\omega_2\omega_3\frac{a^2(c^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}, &&\frac{d\gamma_1}{dt}=r\gamma_2-q\gamma_3\\
&\frac{d\omega_2}{dt}=2b^2\left(\frac{p\omega_3}{b^2+c^2}-\frac{r\omega_1}{a^2+b^2}\right)-2\,\omega_3\omega_1\frac{b^2(a^2-c^2)}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}, &&\frac{d\gamma_2}{dt}=p\gamma_3-r\gamma_2\\
&\frac{d\omega_3}{dt}=2c^2\left(\frac{q\omega_1}{c^2+a^2}-\frac{p\omega_2}{b^2+c^2}\right)-2\,\omega_1\omega_2\frac{c^2(b^2-a^2)}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}, &&\frac{d\gamma_3}{dt}=q\gamma_1-p\gamma_2
\end{aligned}$$

Здесь M — общая масса тела и жидкости, z° — координата центра тяжести системы. Через A, B, C обозначены суммы моментов инерции твердого тела A_1, B_1, C_1 и эквивалентного в смысле Жуковского [1] твердого тела A_1', B_1', C_1' относительно подвижных осей (4)

$$A=A_1+A_1',\qquad B=B_1+B_1',\qquad C=C_1+C_1'$$

$$A_1'=\frac{m_2}{2}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2}+m_2z_0^2,\quad B_1'=\frac{m_2}{5}\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2}+m_2z_0^2,\quad C_1'=\frac{m_2}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$$

$$m_2=4/3\,\pi\rho abc$$

Разности между соответствующими моментами инерции жидкости и эквивалентного твердого тела обозначены через A_2, B_2, C_2

$$A_2 = \frac{4m_2}{5}\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}, \qquad B_2 = \frac{4m_2}{5}\frac{a^2c^2}{a^2+c^2}, \qquad C_2 = \frac{4m_2}{5}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \tag{5}$$

Полная система уравнений (3) допускает частное решение

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega; \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1$$

Исследуем устойчивость движения по переменным p, q, r, ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3. Уравнения возмущенного движения получим, полагая в возмущенном движении

$$r = \omega + \xi, \qquad \omega_3 = \omega + \eta, \qquad \gamma_3 = 1 + \zeta$$

и сохраняя прежние обозначения для остальных переменных. Уравнения в вариациях, ввиду элементарности их получения, выписывать не будем. Последние уравнения в вариациях в каждой группе, полученной соответственно из систем (3), имеют очевидные решения

$$\xi = \text{const}, \qquad \eta = \text{const}, \qquad \zeta = \text{const}$$

Решение оставшихся шести уравнений в вариациях будем искать в виде $e^{i\lambda t}$. Характеристическое уравнение будет кубическим относительно $\lambda_1 = \lambda^2 / \omega^2$

$$\begin{aligned}
&\lambda^6 AB - \lambda^4\omega^2 \Big[AB(1+\mu\nu) + (C + C_2 - B - \nu B_2)(C + C_2 - A - \mu A_2) + \\
&+ B_2 B(\nu - 1)\nu + A_2 A(\mu - 1)\mu - \frac{R}{\omega^2}(A+B)\Big] - \lambda^2\omega^4 \Big[\frac{R}{\omega^2}\mu\nu(A+B) + \\
&+ \frac{R}{\omega^2}\mu(\mu-1)A_2 + \frac{R}{\omega^2}\nu(\nu-1)B_2 + A_2A\mu(1-\mu) + B_2B\nu(1-\nu) - AB\mu\nu - \\
&- \left(\frac{R}{\omega^2} + A + \mu A_2 - C - C_2\right)\left(\frac{R}{\omega^2} + B + \nu B_2 - C - C_2\right) - \\
&- \mu\nu(A + A_2 - C - C_2)(B + B_2 - C - C_2)\Big] - \\
&- \mu\nu\omega^6\left(\frac{R}{\omega^2} + A + A_2 - C - C_2\right)\left(\frac{R}{\omega^2} + B + B_2 - C - C_2\right) = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\left(\mu = \frac{2a^2}{a^2+c^2}, \quad \nu = \frac{2b^2}{b^2+c^2}\right)$$

Для устойчивости необходимо, чтобы все λ были действительны, т. е. все λ_1 должны быть неотрицательными. Условия неотрицательности λ_1 и дают необходимые условия устойчивости. Не выписывая необходимых условий устойчивости ввиду их громоздкости, отметим одно условие неустойчивости, сразу вытекающее из структуры свободного члена. Если

$$\frac{R}{\omega^2} + A + A_2 - C - C_2, \qquad \frac{R}{\omega^2} + B + B_2 - C - C_2$$

имеют различные знаки, то должен существовать, по крайней мере, один корень $\lambda_1 < 0$ и, следовательно, движение неустойчиво. В статье [6] доказано, что условия

$$\frac{R}{\omega^2} + A + A_2 - C - C_2 < 0, \qquad \frac{R}{\omega^2} + B + B_2 - C - C_2 < 0$$

являются достаточными условиями устойчивости. В случае

$$\frac{R}{\omega^2} + A + A_2 - C - C_2 > 0, \qquad \frac{R}{\omega^2} + B + B_2 - C - C_2 > 0 \tag{7}$$

возможны как устойчивые, так и неустойчивые движения в зависимости от действительных величин этих выражений. Исследование корней при условиях (7) в общем случае затруднительно, но в каждом конкретном примере, когда заданы все величины, кроме ω, можно искать ω, при которых будет устойчивость, обращаясь непосредственно к характеристическому уравнению (6).

В случае, когда $A_1 = B_1$, $a = b$, т. е. в случае симметричного волчка с полостью в форме эллипсоида вращения, рассмотренного в статьях [5,8], исследование можно несколько упростить. Если ввести переменные

$$P = p + iq, \qquad \Omega = \omega_1 + i\omega_2, \qquad \Gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

то уравнения в вариациях принимают следующий вид

$$A\frac{dP}{dt} = i\omega(C + C_2 - A - A_2\mu)P - i\omega A_2(1-\mu)\Omega - iR\Gamma$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = i\omega\mu(P - \Omega), \qquad \frac{d\Gamma}{dt} = iP - i\omega\Gamma$$

Решение ищем в виде $e^{i\lambda t}$. Получим следующее характеристическое уравнение:

$$A\lambda_1^3 + \lambda_1^2[A(2+\mu) + A_2\mu - C - C_2] + \lambda_1\left[\frac{R}{\omega^2} + A(1+2\mu) + 2A_2\mu - (C+C_2)(1+\mu)\right] +$$

$$+\mu\left[\frac{R}{\omega^2} + A + A_2 - C - C_2\right] = 0 \qquad \left(\lambda_1 = \frac{\lambda}{\omega}\right)$$

Это уравнение совпадает с уравнением, полученным в статье [5].

Условием устойчивости является условие действительности корней. Оно совпадает с условием, полученным в статьях [5,8].

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 13 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. III, ОНТИ, 1936.
2. Слудский Ф. А. De la rotation de la terre supposée fluide à son interieur. Bulletin de la Société des naturalites de Moscou, 1895, IX, 285—318.
3. Hough. The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell containing Fluid. Phil. Transactions (A), 186, 1, 1895.
4. Poincaré H. Sur le precession de corps deformables. Bulletin astronomique. 1910, XXVII.
5. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
6. Румянцев В. В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью. ПММ 1957, т. XXI, вып. 6.
7. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
8. Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.

К ТЕОРИИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

Ю. К. Жбанов (Москва)

Изучается влияние произвольных перекосов и дебалансов на поведение гирогоризонткомпаса. Приводится оценка азимутальных уходов разбалансированного компаса при маневрировании и указывается возможность точного замера дебаланса по кривой его азимутальных колебаний на неподвижном основании при отключенном демпфировании.

Идеальный гирогоризонткомпас [1] представляет собой двухгироскопный маятник со специально подобранными параметрами и связями. Вариант такого маятника, выполненный в виде плавающей гиросферы, схематично изображен на фиг. 1. Обозначим: **H** — суммарный кинетический момент обоих гироскопов, **r** — единичный вектор компасной вертикали (фиг. 2), направленный от центра тяжести гиросферы к ее геометрическому центру, играющему роль точки опоры, a — расстояние от центра тяжести до точки опоры (метацентрическая высота), m — масса гиросферы. Трехгранник

$$\left\{\frac{\mathbf{H}}{H}, \ \mathbf{r}, \ \frac{\mathbf{H}\times\mathbf{r}}{H}\right\}$$

характеризующий ориентацию прибора, назовем компасным трехгранником. Положение и маневр точки опоры (основания) на земной поверхности зададим единичным вектором местной вертикали $\mathbf{r}_1(t)$, направленным от центра Земли к точке опоры.