

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ПОЛОСТЬ, ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

И. Б. Богоряд

(Томск)

Задача о колебаниях идеальной жидкости в полости исследуется вариационным методом, который позволяет получить приближенное решение любой степени точности для полости произвольной конфигурации.

Показана эквивалентность нахождения решения краевой задачи о свободных колебаниях жидкости определению системы функций, сообщающих минимум вариации функционала Гамильтона.

Полученные результаты применены к определению коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела, имеющего сферическую полость, частично заполненную идеальной жидкостью.

§ 1. Сведение краевой задачи о колебаниях жидкости к вариационной. Будем исходить из предположения, что движение жидкости определяется кинетической энергией T и потенциальной энергией V .

Вариационный принцип Гамильтона требует, чтобы функционал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \quad (1.1)$$

имел стационарное значение. В рассматриваемом случае

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \iiint_Q (\nabla \dot{U})^2 dQ, \quad V = \frac{1}{2} j \rho_0 \iint_{\Sigma} \kappa^2 ds \quad (1.2)$$

Поэтому равенство (1.1) означает, что в промежутке между моментами t_1 и t_2 действительное движение должно происходить так, чтобы вариация $\delta J = 0$, т. е.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_Q (\nabla \dot{U})^2 dQ - j \iint_{\Sigma} \kappa^2 ds \right] dt = 0 \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем Σ — свободная поверхность, κ — уравнение свободной поверхности, ρ_0 — плотность жидкости, U — потенциал смещений, Q — объем, занятый жидкостью, j — ускорение массовых сил, S — смоченная поверхность.

Следуя работе [1], введем потенциал смещений U краевой задачи

$$\Delta U = 0 \quad (\text{в обл. } Q), \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + j \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \quad (\text{на } \Sigma) \quad (1.4)$$

где ν — орт внешней нормали. Потенциал U представим в виде абсолютно и равномерно сходящегося в области Q и на конечном отрезке времени $0 \leq t \leq t_k$ бесконечного ряда

$$U(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \zeta_n(x, y, z) \quad (1.5)$$

Функции $p_n(t)$ будем рассматривать как коэффициенты разложения U в обобщенный ряд Фурье по функциям ζ_n , которые ортогональны на свободной поверхности и для которых принята нормировка вида

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial \nu} = 1 \quad (\text{в точке контура } C) \quad (1.6)$$

где C — контур свободной поверхности.

Краевая задача (1.4) может быть записана в виде

$$\Delta \zeta_n = 0 \quad (\text{в обл. } Q), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial \nu} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial \nu} = \sigma_n^2 \zeta_n \quad (\text{на } \Sigma) \quad (1.7)$$

$$\sigma_n^2 = - \frac{1}{j} \frac{\ddot{p}_n(t)}{p_n(t)} = \text{const}$$

Применяя к выражению (1.3) формулу Грина и используя разложение (1.5), будем требовать, чтобы

$$\delta L = \delta \left[\iiint_Q \zeta_n \Delta \zeta_n dQ - \iint_S \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial \nu} ds - \iint_{\Sigma} \zeta_n \left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial \nu} - \sigma_n^2 \zeta_n \right) ds \right] = 0 \quad (1.8)$$

Равенство (1.8), как это следует из основных положений вариационного исчисления, выполняется лишь для функций ζ_n , сообщающих минимум функционалу L . Покажем, что функция ζ_n , дающая минимум функционалу $L[\zeta_n]$, есть решение задачи (1.7).

Пусть ζ_n дает минимум функционалу $L[\zeta_n]$. Рассмотрим значение функционала для функции $\zeta_n + \alpha \eta_n$, где η_n — любая функция непрерывная вместе со своими производными в области Q . При малых α функция $\zeta_n + \alpha \eta_n$ сколь угодно близка к ζ_n и, кроме того,

$$L[\zeta_n] \leq L[\zeta_n + \alpha \eta_n]$$

Из определения вариации

$$\delta L = \left\{ \frac{d}{d\alpha} L[\zeta_n + \alpha \eta_n] \right\}_{\alpha=0} = 0$$

получим

$$\iiint_Q \eta_n \Delta \zeta_n dQ - \iint_S \eta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial \nu} ds - \iint_{\Sigma} \eta_n \left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial \nu} - \sigma_n^2 \zeta_n \right) ds = 0 \quad (1.9)$$

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления [2] находим, что из (1.9) следуют уравнения (1.7) или, иначе, уравнениями Эйлера функционала L являются уравнения свободных малых колебаний идеальной жидкости.

Таким образом, нахождение решения краевой задачи (1.4) свелось к вариационной задаче вида: внутри некоторого класса допустимых функциональных аргументов найти функцию экстремальную для функционала L .

Для решения вариационной задачи воспользуемся методом Ритца, основанном на построении такой минимизирующей последовательности $\varphi^{(k)}$, что

$$L[\varphi^{(k)}] = \text{minimum}$$

и заключающемся в нахождении полной системы функций $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, определенных в области Q и обладающих тем свойством, что линейные комбинации вида

$$\varphi^{(k)} = c_1 \gamma_1 + \dots + c_k \gamma_k \quad (1.10)$$

будут допустимы функциональными аргументами и что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое k , что

$$|L[\zeta_n] - L[\varphi^{(k)}]| < \varepsilon$$

Предполагая $L[\varphi^{(k)}]$ непрерывной функцией параметров c_i , нахождение минимума функционала означает, следовательно, определение таких c_i , что

$$\frac{\partial L[\varphi^{(k)}]}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, k) \quad (1.11)$$

Итак, будем искать k -е приближение n -й собственной функции в форме (1.10), для чего из (1.11) получим систему уравнений

$$\frac{\partial L[\varphi^{(k)}]}{\partial c_i} = \iiint_Q \nabla \gamma_i \nabla \varphi^{(k)} dQ - \sigma^2 \iint_{\Sigma} \gamma_i \varphi^{(k)} ds = 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

которую удобно представить в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^k (a_{ij} - \sigma^2 b_{ij}) c_i = 0 \quad (j = 1, \dots, k) \quad (1.12)$$

где

$$a_{ij} = \iiint_Q \nabla \gamma_i \nabla \gamma_j dQ, \quad b_{ij} = \iint_{\Sigma} \gamma_i \gamma_j ds \quad (1.13)$$

Полученная однородная система k уравнений с k неизвестными имеет нетривиальное решение тогда, когда определитель

$$D(\sigma^2) = |\alpha_{ij} - \sigma^2 b_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (1.14)$$

Определитель (1.14) — уравнение k -й степени относительно σ^2 — дает k корней σ_n^2 , при каждом из которых система (1.12) имеет отличное от нуля решение $c_i^{(n)}$, которое с точностью до постоянной определяет функцию $\varphi_n^{(k)}$ ($n = 1, \dots, k$). Для однозначного определения $\varphi_n^{(k)}$ нужно использовать нормировку (1.6) при $\varphi = \pi/2$.

С другой стороны, решение системы уравнений (1.12) является приближенным решением задачи (1.7). Следовательно, найденные из (1.14) значения k корней σ_n^2 есть не что иное, как приближения к первым k собственным значениям $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$, а функции $\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_k^{(k)}$ — приближения для соответствующих собственных функций ζ_1, \dots, ζ_k .

§ 2. Решение задачи для сферической полости. Уравнения движения твердого тела при наличии полости, частично заполненной идеальной жидкостью, получены в работах [1, 3, 4] и др.

Используя результаты работы [1], исследуем зависимость присоединенных масс и первой частоты собственных колебаний от глубины жидкости, а также проанализируем на основе результатов вычислений быстроту сходимости процесса последовательных приближений. При расчете инерционных коэффициентов жидкости учитывался только первый тон ее колебаний.

Уравнения возмущенного движения твердого тела со сферической полостью, частично заполненной жидкостью, когда силы, действующие на тело со стороны жидкости, вычислены относительно центра сферы, имеют вид

$$\begin{aligned} (\mu + \mu^0) \ddot{\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n(t) \lambda_{2n} &= P_{GZ}, & \lambda_{2n} &= \rho_0 \sigma_n^2 \iint_{\Sigma} z \varphi_n ds \\ (J_{yy} + J_{yy}^0) \ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n(t) \lambda_{4n} &= M_{GY}, & \lambda_{4n} &= \lambda_{2n} (X_G - X_c) \\ \mu_n \ddot{p}_n + i \sigma_n^2 \mu_n p_n + \lambda_{2n} \ddot{\eta} + \lambda_{4n} \ddot{\vartheta} &= 0, & \mu_n &= \rho_0 \sigma_n^2 \iint_{\Sigma} \varphi_n^2 ds \\ & & & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь η — смещение тела параллельно оси Z , ϑ — угол поворота тела относительно оси, параллельной оси y ; μ, μ^0 — массы жидкости и твердого тела соответственно, J_{yy}, J_{yy}^0 — моменты инерции жидкости и твердого тела соответственно, x_c — координата центра сферы.

Эти уравнения описывают движение системы твердое тело плюс жидкость относительно метacentра X_G , положение которого относительно центра тяжести системы твердое тело плюс затвердевшая жидкость определяется по формуле

$$X_G = X_T + \frac{\pi \rho_0 R_{\Sigma}^4}{4(\mu + \mu^0)}$$

где R_{Σ} — радиус свободной поверхности.

Легко показать, что для сферической полости метacentром является центр сферы. Введем сферическую систему координат

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \cos \varphi, \quad z = R \sin \theta \sin \varphi$$

с началом в центре сферы. Ось x перпендикулярна к свободной поверхности Σ и имеет направление, обратное вектору ускорения массовых сил. Перейдем к безразмерным величинам

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad l = \frac{h}{R_0}, \quad \omega_n^2 = R_0 \sigma_n^2, \quad \alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{R_0^3}, \quad \beta_{ij} = \frac{b_{ij}}{R_0^4} \quad (2.2)$$

где R_0 — радиус сферы, h — глубина жидкости.

Тогда элементы характеристического определителя будут иметь вид:

а) при $l < 1$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{r^*}^1 \nabla \gamma_i \nabla \gamma_j r^2 dr \quad \left(r^* = \frac{l-1}{\cos \theta} \right)$$

$$\beta_{ij} = (1-l)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} [\gamma_i \gamma_j]_{r=r^*} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \quad (\theta_0 = \arccos(1-l)) \quad (2.3)$$

б) при $l > 1$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \int_0^{r^*} \nabla \gamma_i \nabla \gamma_j r^2 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \nabla \gamma_i \nabla \gamma_j r^2 dr$$

$$\beta_{ij} = (l-1)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} [\gamma_i \gamma_j]_{r=r^*} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \quad \left(r^* = \frac{l-1}{\cos \theta}, \theta_0 = \arccos(l-1) \right)$$

В качестве минимизирующей последовательности $\varphi^{(k)}$ возьмем совокупность частных решений уравнения Лапласа, гармонических внутри сферы

$$\varphi^{(k)} = \sin \varphi \sum_{i=1}^k c_i r^i P_i^1(\cos \theta) \quad (2.4)$$

где $P_i^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода.

Последовательность функций $\varphi^{(k)}$ выбрана в виде (2.4), исходя из следующих соображений:

а) первый член разложения дает частоту, совпадающую с частотой эквивалентного математического маятника (длина маятника — расстояние от центра сферы до центра масс невозмущенной жидкости).

Для малых относительных глубин частота такого маятника близка к частоте первого тона жидкости;

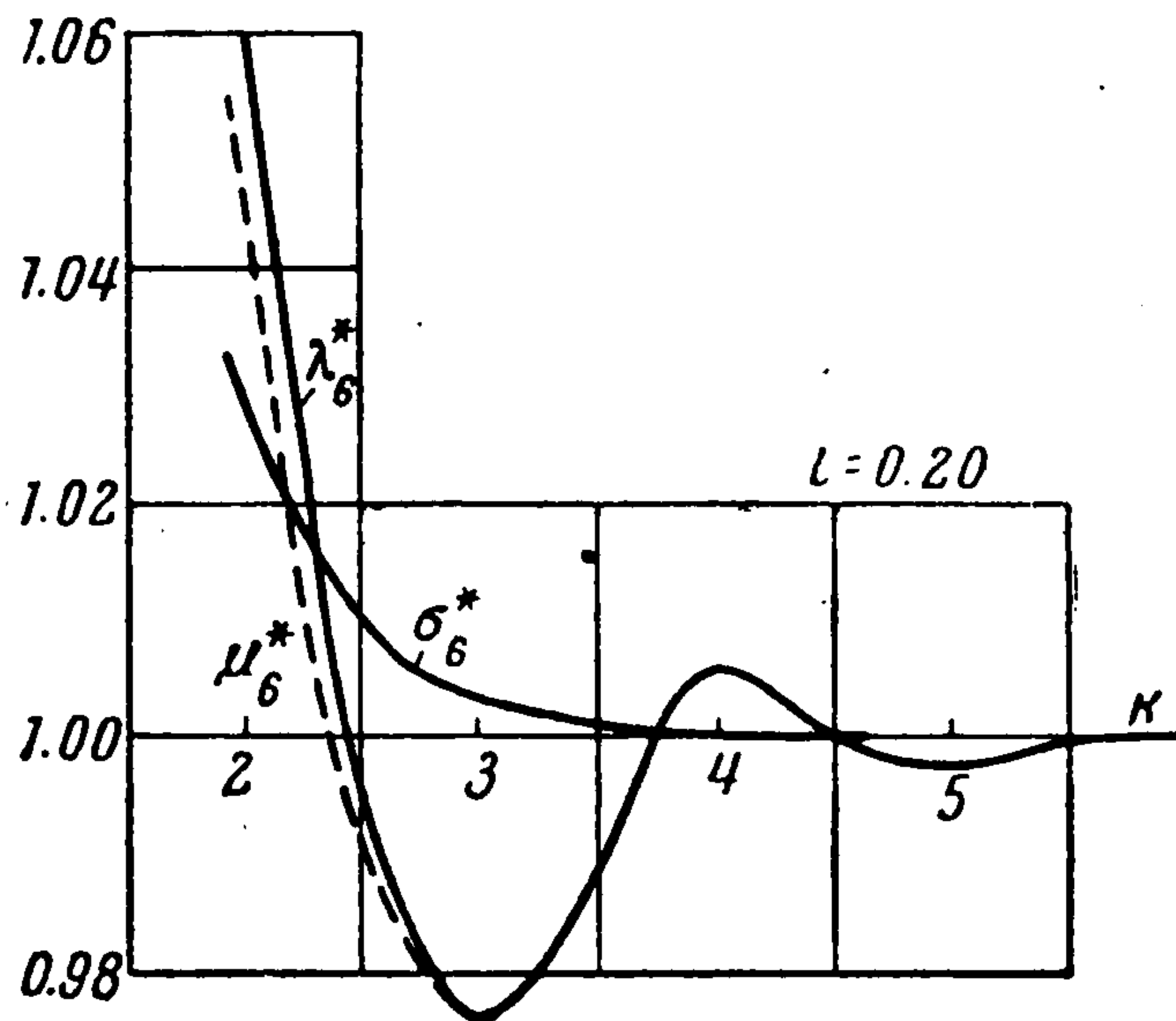
б) второй член разложения есть потенциал смещений эквивалентного физического маятника, который, как будет показано дальше, для некоторого диапазона глубин можно считать хорошим механическим аналогом жидкости, колеблющейся в сфере.

Расчеты по определению собственной частоты первого тона колебаний жидкости и присоединенных масс проводились на электронно-вычислительной цифровой машине. Программа вычислений была построена таким образом, что процесс приближения к точному значению любого из коэффициентов уравнений движения продолжается до тех пор, пока два соседних сближения не станут отличаться одно от другого менее чем на 1%.

Фиг. 1, 2, полученные по результатам расчетов, иллюстрируют быстроту сходимости коэффициентов уравнений движения для двух значений относительных глубин жидкости $l = h/R_0$. По оси абсцисс отложены цифры, обозначающие порядок характеристического определителя (число членов k , учтенных в разложении (2.4)); по оси ординат отложены значения отношений любого из коэффициентов, вычисленного из определителя порядка k к соответствующему коэффициенту, принятому за точный; так

$$\mu_6^* = \frac{\mu_1^{(k)}}{\mu_1^{(6)}}, \quad \lambda_6^* = \frac{\lambda_{21}^{(k)}}{\lambda_{21}^{(6)}}, \quad \sigma_6^* = \frac{(\sigma_1^2)^{(k)}}{(\sigma_1^2)^{(6)}}$$

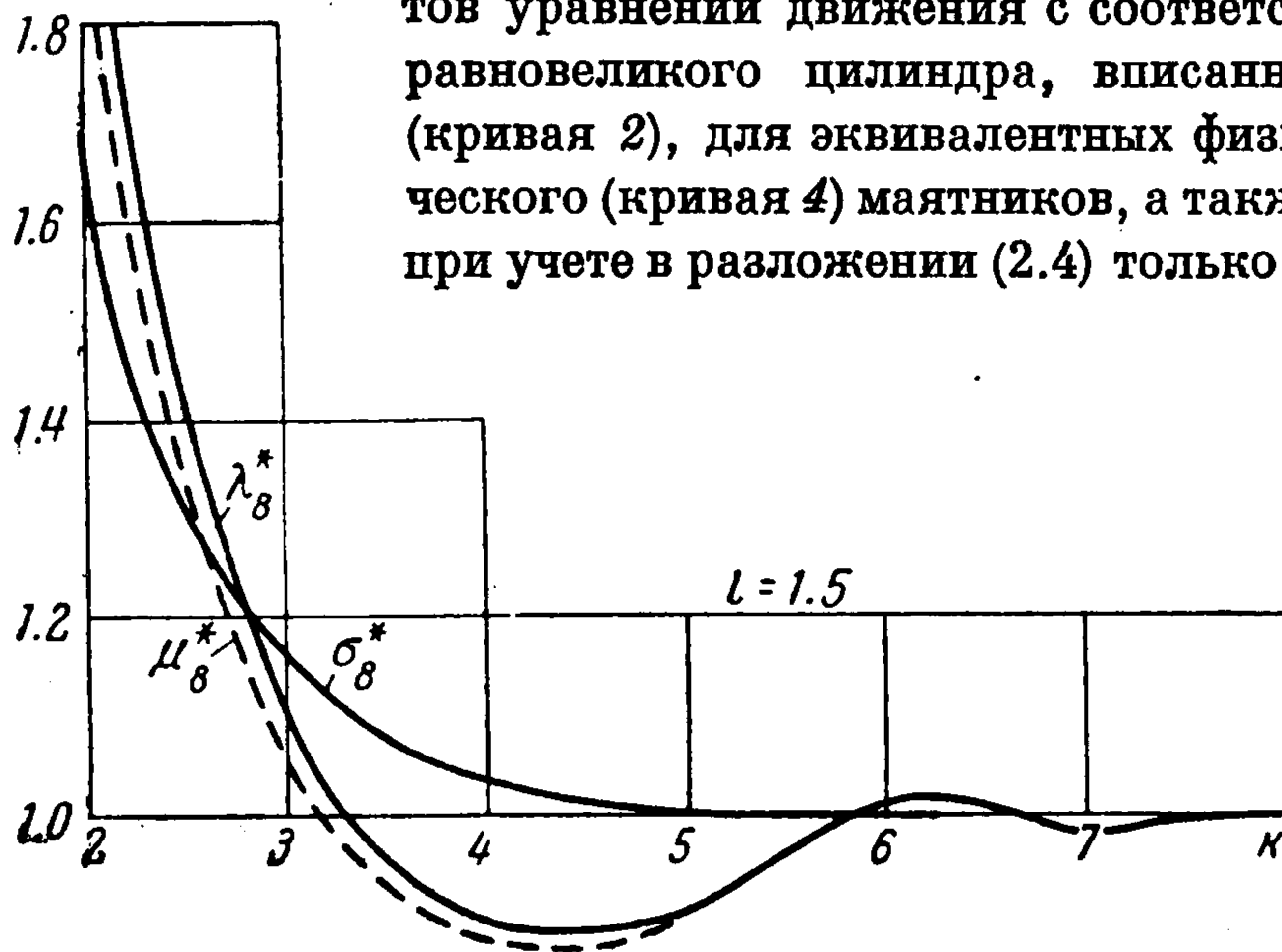
$$\mu_8^* = \frac{\mu_1^{(k)}}{\mu_1^{(8)}}, \quad \lambda_8^* = \frac{\lambda_{21}^{(k)}}{\lambda_{21}^{(8)}}, \quad \sigma_8^* = \frac{(\sigma_1^2)^{(k)}}{(\sigma_1^2)^{(8)}}$$



Фиг. 1

Эти фигуры показывают, что для глубин $l \leq 0.2$ определение инерционных характеристик жидкости по двум первым членам разложения можно производить с точностью $\sim 5\%$, достаточной для практических расчетов.

Этот же вывод можно сделать и при рассмотрении фиг. 3 — 5, где проведено сравнение результатов вычислений по вариационному методу (кривая 1) с другими методами и с экспериментом [5]. В частности, проводится сравнение коэффициентов уравнений движения с соответствующими коэффициентами для



Фиг. 2

равновеликого цилиндра, вписанного в свободную поверхность (кривая 2), для эквивалентных физического (кривая 3) и математического (кривая 4) маятников, а также с результатами, полученными при учете в разложении (2.4) только первых двух членов (кривая 5).

Проведено сравнение и с результатами работы [6], в которой решение краевой задачи для сферы получено на основе приближенных интегральных уравнений (кривая 6).

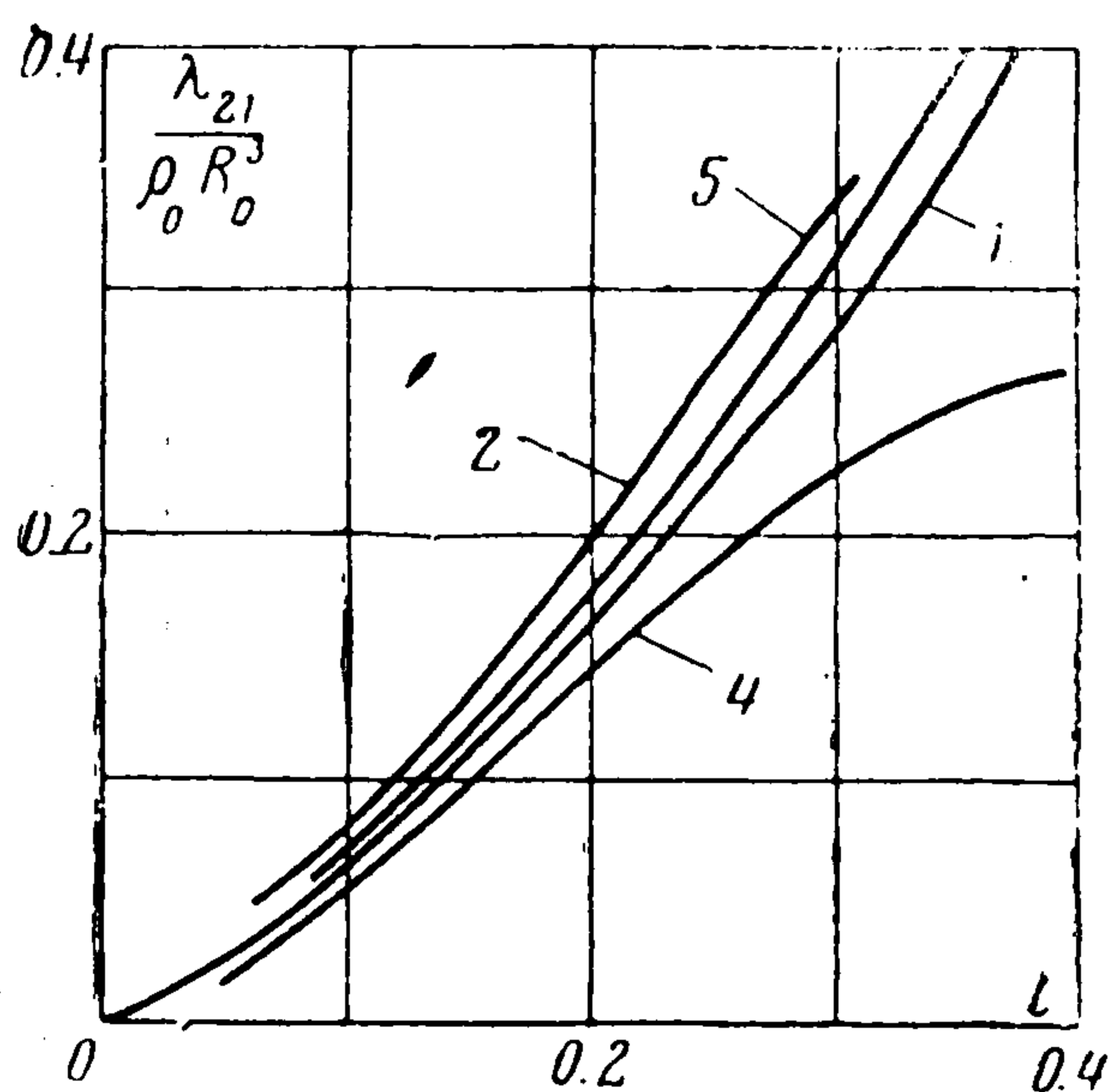
На фиг. 6 представлена общая картина процесса сходимости первой формы собственных колебаний.

Графическая зависимость λ_{21} , μ_1 , σ_1^2 , вычисленных

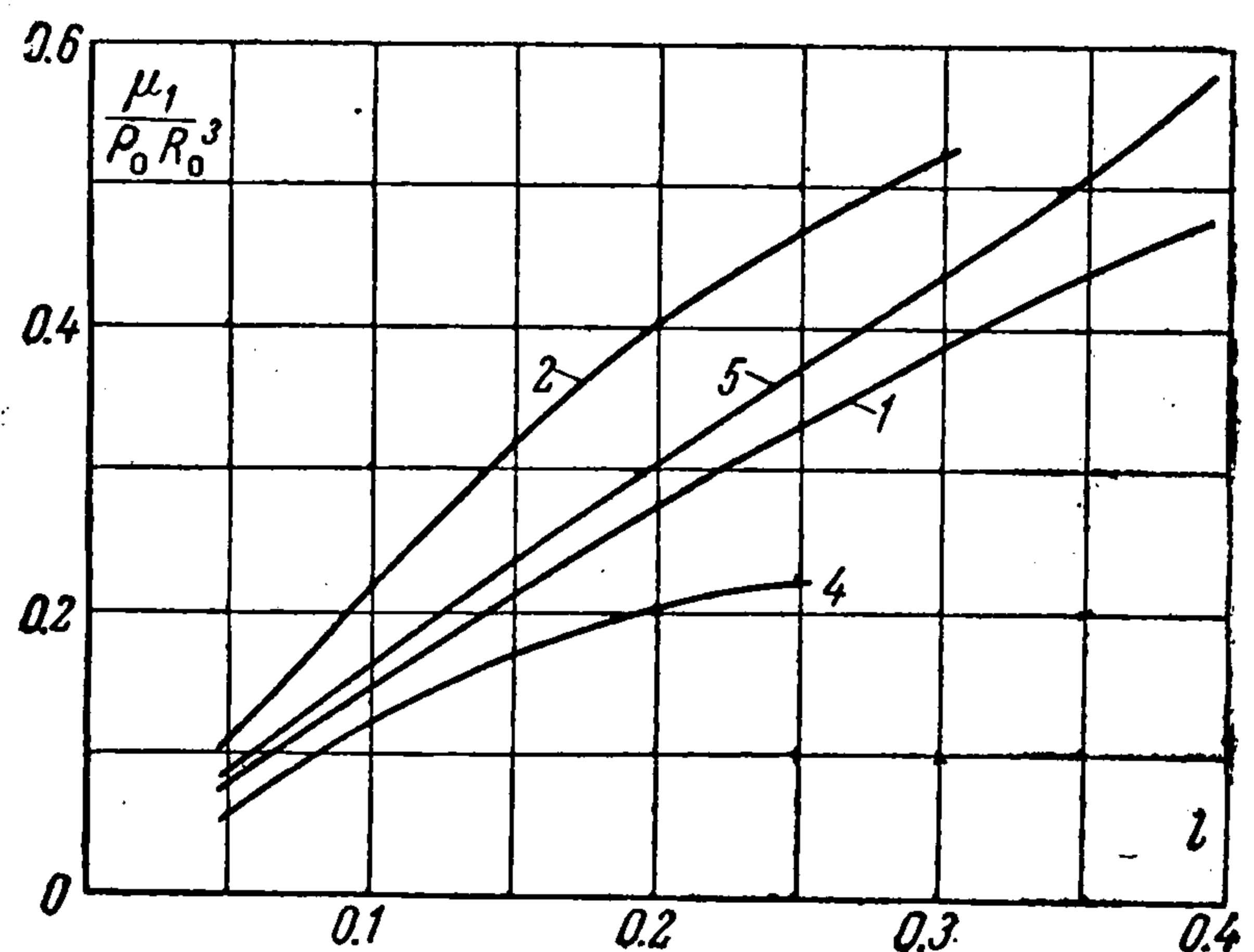
с ошибкой $\sim 1\%$, от относительной глубины l помещена на фиг. 7.

Из рассмотрения представленных результатов можно сделать некоторые выводы.

1. Эквивалентные маятники являются достаточно хорошими механическими аналогами жидкости, колеблющейся в сфере при глубинах $l < 0.1$.



Фиг. 3

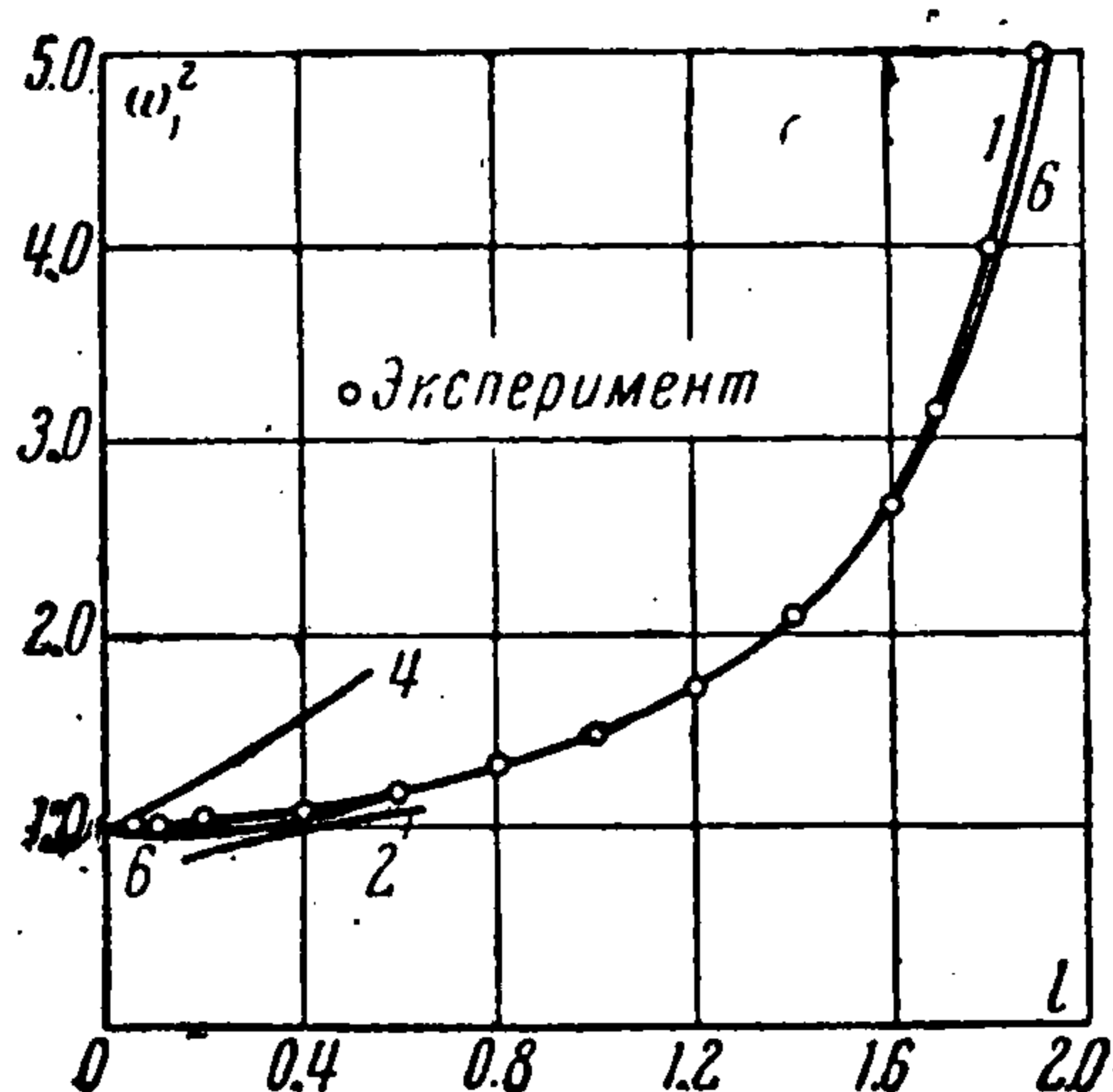


Фиг. 4

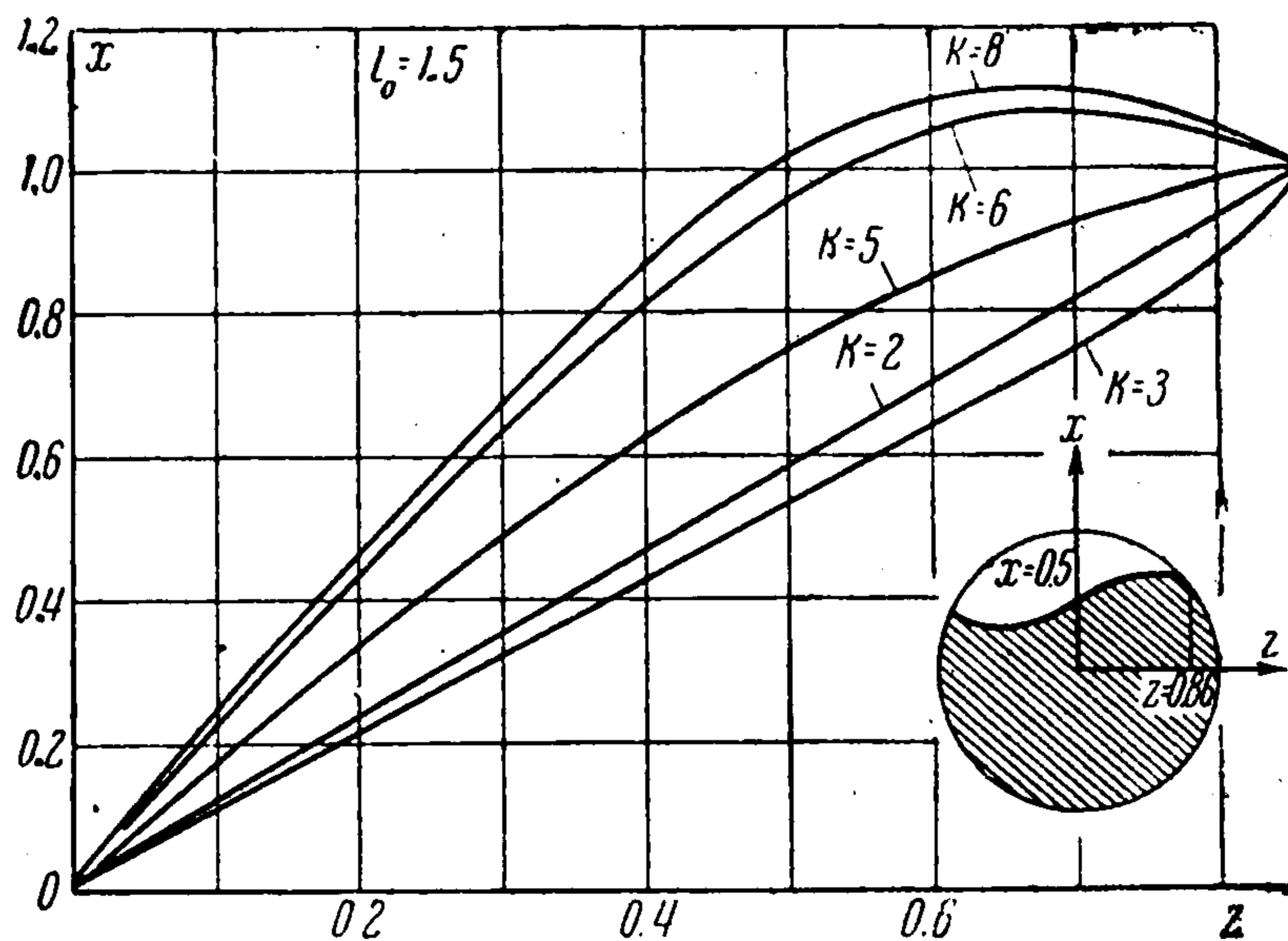
2. Ошибки в определении λ_{21} , μ_1 , σ_1^2 , связанные с попыткой замены сферической полости равновеликой цилиндрической, увеличиваются по мере уменьшения относительной глубины и в диапазоне глубин $0.05 < l < 0.4$ составляют 10 — 75% в сторону завышения для λ_{21} , μ_1 и в сторону занижения для σ_1^2 .

3. Для достаточно точного (ошибка $\sim 1\%$) определения коэффициентов λ_{21} , μ_1 в случае малых относительных глубин в разложении (2.4) достаточно учесть 4 — 5 первых членов; в случае больших относительных глубин — 7 — 9 членов. Для определения первой собственной частоты с такой же точностью следует учитывать в первом случае 3 — 4, во втором 5 — 6 первых членов.

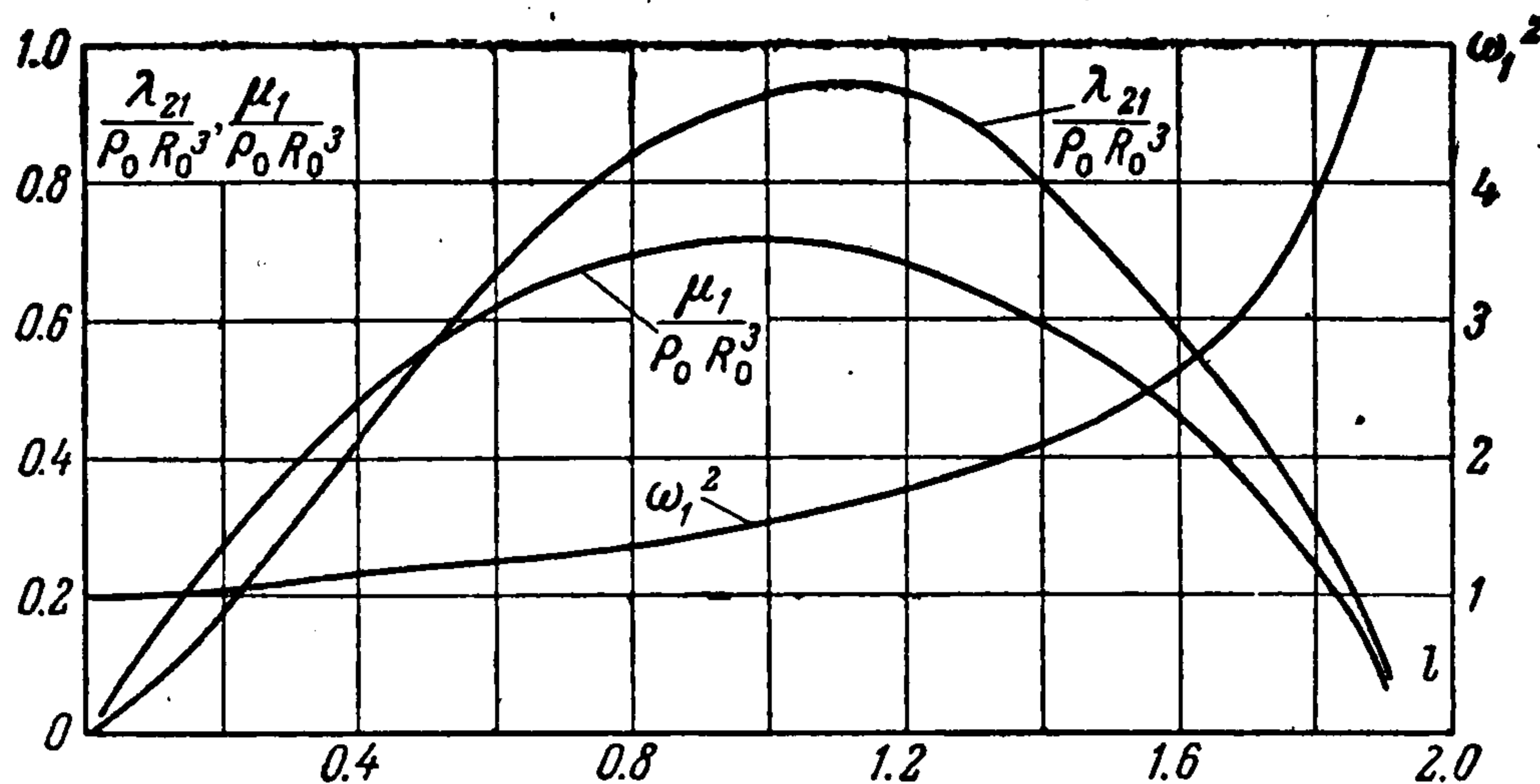
4. Результаты расчетов по вариационному методу находятся в полном соответствии с экспериментальными данными.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Программирование задачи и машинный счет проведены З. М. Поляковой, которую автор благодарит, автор также признателен Б. И. Рабиновичу за руководство этой работой.

Поступила 26 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович Б. И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.— Л., ГИТТЛ, 1959.
3. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
4. Охотимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
5. Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
6. Вудьянску В. Колебания жидкости в круглых каналах и сферических баках. JAS, 1960, III, vol. 27, № 3, pp. 161—173.