ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

В. Г. Дегтярев (Москва)

Одним из методов исследования движения искусственных спутников Земли является аппроксимация потенциала земного притяжения потенциалом достаточно близким к потенциалу Земли. При этом аппроксимирующий потенциал выбирается таким образом, чтобы задача решалась в квадратурах (разложение потенциала в ряд по полиномам Лежандра [1,2], потенциал двух неподвижных центров [3]). Тогда оказывается проще и качественный анализ движения.

Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников, В. Г. Демин считают, что наиболее общим из всех рассмотренных до настоящего времени аппроксимирующих потенциалов Земли является потенциал двух комплексно-сопряженных масс, находящихся на некотором комплексном расстоянии одна от другой. С любезного разрешения Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина автор использовал постановку таким образом «обобщенной» задачи двух неподвижных центров для исследования устойчивости некоторых типов орбит этой задачи.

§ 1. **Постановка задачи.** Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс притягивающих точек M_1 и M_2 так, чтобы ось z совпала с прямой M_1M_2. Тогда уравнения движения точки запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}$$

где потенциал притяжения имеет такую форму:

$$U=\frac{fM}{2}\left[\frac{1+i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma+i)]^2}}+\frac{1-i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma-i)]^2}}\right] \tag{1.1}$$

Если за M принять массу Земли, то c и σ можно подобрать так, чтобы первые три члена разложений в ряд по полиномам Лежандра потенциала Земли и потенциала (1.1) совпали.

Введем вместо переменных x, y, z новые переменные u, v, w

$$x=c\operatorname{ch}v\sin u\cos w, \qquad y=c\operatorname{ch}v\sin u\sin w \qquad z=c\sigma+c\operatorname{sh}v\cos u \tag{1.2}$$

В этом случае интегралы энергии и площадей будут иметь следующий вид:

$$T-U=h, \qquad \dot{w}\operatorname{ch}^2 v\sin^2 u=c_1 \tag{1.3}$$

Здесь T — живая сила, U — потенциал в новых переменных

$$T=\frac{c^2}{2}\left[(\dot{u}^2+\dot{v}^2)(\operatorname{sh}^2 v+\cos^2 u)+\dot{w}^2\operatorname{ch}^2 v\sin^2 u\right], \qquad U=\frac{fM}{c}\frac{\operatorname{sh}v-\sigma\cos u}{\operatorname{sh}^2 v+\cos^2 u}$$

Кроме того, введем вместо времени t новую регуляризирующую переменную τ

$$dt=(\operatorname{sh}^2 v+\cos^2 u)\,d\tau \tag{1.4}$$

Тогда, делая замену переменных (1.2) и понижая порядок системы на два при помощи первых интегралов (1.3), получим

$$\frac{d^2u}{d\tau^2}=\frac{fM\sigma}{c^3}\sin u+\frac{c_1^2\cos u}{\sin^3 u}-\frac{h}{c^2}\sin 2u, \qquad \frac{d^2v}{d\tau^2}=\frac{fM}{c^3}\operatorname{ch}v-\frac{c_1^2\operatorname{sh}v}{\operatorname{ch}^3 v}+\frac{h}{c^2}\operatorname{sh}2v \tag{1.5}$$

Так как система уравнений движения приводится к двум независимым уравнениям (1.5) это дает возможность исследовать устойчивость по отношению к части переменных. Из (1.4) видно, что при исследовании устойчивости τ будет играть такую же роль, что и t.

§ 2. **Устойчивость эллипсоидальных орбит.** Дополним систему уравнений (1.5), уравнениями

$$dh/d\tau=0, \qquad dc_1/d\tau=0 \tag{2.1}$$

Система уравнений, — второе из (1.5) и (2.1) допускает частное решение

$$v=v_0, \qquad v'=0, \qquad h=h_0, \qquad c_1=c_{10} \tag{2.2}$$

Это решение существует, если v_0 будет корнем уравнения

$$\frac{fM}{c^3}\operatorname{ch} v_0 - \frac{c_{10}^2 \operatorname{sh} v_0}{\operatorname{ch}^3 v_0} + \frac{h_0}{c^2}\operatorname{sh} 2v_0 = 0$$

В этом случае точка будет находиться на поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 v_0} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 v_0} + \frac{(z-c\sigma)^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 v_0} = 1$$

Экваториальная плоскость этого эллипсоида совпадает с экваториальной плоскостью Земли, полуоси его и эксцентриситет будут

$$a = c \operatorname{ch} v_0, \qquad b = c \operatorname{sh} v_0, \qquad e = 1 / \operatorname{ch} v_0 \tag{2.3}$$

При $c_{10} = 0$ орбита будет полярной эллиптической. Если положить $\sigma = 0$, то потенциал (1.1) принимает вид

$$U = \frac{fM}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+[z-ci]^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+[z+ci]^2}}\right] \tag{2.4}$$

Устойчивость движения по эллипсоидальным орбитам в поле с потенциалом (2.4) исследовалась Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым и В. Г. Деминым. Так как σ не входит в систему уравнений(2.1) и во второе уравнение (1.5), то можно использовать результат, полученный Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым и В. Г. Деминым.

Введем следующие обозначения для возмущений:

$$v = v_0 + x_1, \qquad v' = x_2, \qquad h = h_0 + x_3, \qquad c_1^2 = c_{10}^2 + x_4$$

Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения примут вид

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \qquad \frac{dx_3}{d\tau} = 0, \qquad \frac{dx_4}{d\tau} = 0$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \frac{fM}{c^3}\operatorname{ch}(v_0+x_1) - \frac{h_0+x_3}{c^2}\operatorname{sh} 2(v_0+x_1) - \frac{(c_{10}^2+x_4)\operatorname{sh}(v_0+x_1)}{\operatorname{ch}^3(v_0+x_1)}$$

допускают первые интегралы

$$F_1 = x_2^2 - \frac{2fM}{c^3}[\operatorname{sh}(v_0+x_1) - \operatorname{sh} v_0] + 2\,\frac{h_0+x_3}{c^2}\operatorname{sh}^2(v_0+x_1) -$$

$$-2\frac{h_0}{c^2}\operatorname{sh}^2 v_0 - \frac{c_{10}^2+x_4}{\operatorname{ch}^2(v_0+x_1)} + \frac{c_{10}^2}{\operatorname{ch}^2 v_0} = \text{const}, \qquad F_2 = x_3 = \text{const}, \quad F_3 = x_4 = \text{const}$$

Следуя Н. Г. Четаеву [4], построим функцию Ляпунова в виде связки интегралов

$$W = F_1 - 2\operatorname{sh}^2 v_0 F_2 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v_0}F_3 + A_2F_2^2 + A_3F_3^2 =$$

$$= x_2^2 + \left(\frac{fM\operatorname{ch}^2 v_0}{c^3 \operatorname{sh} v_0} - \frac{4c_{10}^2}{\operatorname{ch}^4 v_0}\right)x_1^2 + A_2x_3^2 + A_3x_4^2 + 2\operatorname{sh} 2v_0x_1x_3 + \frac{2\operatorname{sh} v_0}{\operatorname{ch}^3 v_0}x_1x_4 + \ldots$$

Пользуясь критерием Сильвестра, можно записать достаточное условие положительной определенности функции W, по крайней мере, для малых значений x_1, x_2, x_3, x_4. Это условие будет единственным, так как неопределенные множители A_2 и A_3 выбираются так, чтобы остальные условия критерия Сильвестра выполнялись. Это условие будет

$$\frac{fM\operatorname{ch}^2 v_0}{c^3 \operatorname{sh} v_0} > \frac{4c_{10}^2}{\operatorname{ch}^4 v_0} \tag{2.5}$$

Так как производная от функции W равна нулю, то по теореме Ляпунова [5] невозмущенное движение (2.2) будет устойчиво по отношению к полуосям и эксцентриситету эллипсоида, если выполняется условие (2.5). Получением достаточного условия устойчивости (2.5) Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников и В. Г. Демин заканчивают исследование устойчивости эллипсоидальных орбит.

Однако нетрудно показать, что неравенство (2.5) всегда будет выполняться для реальных спутников Земли. Действительно, учитывая обозначения (2.3), неравенство (2.5) можно переписать так

$$fM\frac{a^6}{c^6} > 4c^3c_{10}^2\frac{b}{c} \tag{2.6}$$

Так как $b \leqslant a$, то (2.6) будет выполняться, если

$$fMa^5 > 4c^8c_{10}^2 \tag{2.7}$$

Пусть $\mathbf{d} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ — соответственно радиус-вектор и вектор скорости точки, а d_{10} — проекция вектора $\mathbf{d}$ на ось z, соответствующая начальным данным (2.2). Тогда

$$c_{10}^2 = \frac{d_{10}^2}{c^4} \leqslant \frac{d^2}{c^4} = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{V}|^2}{c^4} \leqslant \frac{r^2V^2}{c^4}$$

Учитывая последнее неравенство и то, что $r \leqslant a$, можно сказать, что (2.7) будет выполняться, если

$$fMa^3 > 4c^4V^2 \tag{2.8}$$

Из первого интеграла (1.3) можно записать

$$\frac{V^2}{2} = \frac{fM}{2}\left[\frac{1+i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma+i)]^2}} + \frac{1-i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma-i)]^2}}\right] + h$$

но так как движение происходит в ограниченном пространстве, то $h < 0$, т. е.

$$V^2 < fM\left[\frac{1+i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma+i)]^2}} + \frac{1-i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma-i)]^2}}\right] \tag{2.9}$$

Разлагая правую часть неравенства (2.9) в ряд по полиномам Лежандра, можно убедиться, что, если (2.9) выполняется, то $V^2 < fM / r$, но тогда (2.8), а значит и все предыдущие неравенства будут выполняться при $r > c\sqrt{2}$. Так как $c = 210$ км, то последнее неравенство будет выполняться для всех реальных спутников Земли ($r > 6370$ км). Итак, все реальные эллипсоидальные движения спутников Земли устойчивы по отношению к полуосям и эксцентриситету эллипсоида.

§ 3. Устойчивость гиперболоидальных орбит. Рассмотрим частное решение системы, — первое из (1.5) и (2.1)

$$u = u_0, \qquad u' = 0, \qquad h = h_0, \qquad c_1 = c_{10} \tag{3.1}$$

Это решение будет существовать, если u_0 будет корнем уравнения

$$\frac{fM\sigma}{c^3}\sin u_0 + \frac{c_{10}^2\cos u_0}{\sin^3 u_0} - \frac{h_0}{c^2}\sin 2u_0 = 0$$

В этом случае точка будет двигаться по поверхности гиперболоида

$$\frac{x^2}{c^2\sin^2 u_0} + \frac{y^2}{c^2\sin^2 u_0} - \frac{(z-c\sigma)^2}{c^2\cos^2 u_0} = 1$$

Его действительная и мнимая полуоси будут

$$a_1 = c\sin u_0, \qquad b_1 = c\cos u_0 \tag{3.2}$$

В частности при $c_{10} = 0$ точка будет двигаться по некоторой меридиональной гиперболе. Обозначим значения переменных в возмущенном движении через

$$u = u_0 + x_1, \qquad u' = x_2, \qquad h = h_0 + x_3, \qquad c_1^2 = c_{10}^2 + x_4$$

Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \qquad \frac{dx_3}{d\tau} = 0, \qquad \frac{dx_4}{d\tau} = 0$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \frac{fM\sigma}{c^3}\sin(u_0+x_1) + \frac{(c_{10}^2+x_4)\cos(u_0+x_1)}{\sin^3(u_0+x_1)} - \frac{h_0+x_3}{c^2}\sin 2(u_0+x_1)$$

допускают первые интегралы

$$F_1 = x_2^2 + \frac{2fM\sigma}{c^3}\cos(u_0+x_1) + \frac{c_{10}^2+x_4}{\sin^2(u_0+x_1)} - \frac{2fM\sigma}{c^2}\cos u_0 -$$

$$-\frac{c_{10}^2}{\sin^2 u_0} + \frac{h_0}{c^2}\cos 2u_0 = \text{const}, \qquad F_2 = x_3 = \text{const}, \qquad F_3 = x_4 = \text{const} \tag{3.3}$$

Для доказательства устойчивости невозмущенного движения (3.1), следуя Н. Г. Четаеву [4], построим функцию Ляпунова в виде связки интегралов

$$W = F_1 + \frac{\cos 2u_0}{c^2}F_2 - \frac{1}{\sin^2 u_0}F_3 + \mu_2F_2^2 + \mu_3F_3^2$$

Здесь μ_2 и μ_3 — пока произвольные постоянные.

Разлагая W в ряд Тейлора в окрестности $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и ограничиваясь членами второго порядка, получим

$$W = \mu_1 x_1^2 + x_2^2 + \mu_2 x_3^2 + \mu_3 x_4^2 + \frac{2}{c^2} \sin 2u_0 x_1 x_3 - \frac{2\cos u_0}{\sin^3 u_0} x_2 x_4 + \ldots$$

Так как производная от функции W в силу (3.3) равна нулю, то для устойчивости невозмущенного движения (3.1) по теореме Ляпунова [5] достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu_1 = \frac{4c_{10}^2 \cos u_0}{\sin^4 u_0} - \frac{fM\sigma \sin^2 u_0}{\cos u_0} > 0 \tag{3.4}$$

$$\mu_2\mu_1 - \frac{\sin^2 2u_0}{c^4} > 0, \qquad \mu_3\left(\mu_2\mu_1 - \frac{\sin^2 2u_0}{c^4}\right) - \mu_2 \frac{\cos^2 u_0}{\sin^6 u_0} > 0 \tag{3.5}$$

Очевидно, что, если выполняется неравенство (3.4), то μ_2 и μ_3 можно подобрать так, чтобы неравенства (3.5) выполнялись. Учитывая (3.2), неравенство (3.4) можно переписать

$$\frac{4c_{10}^2 b_1 c^3}{a_1^4} > \frac{fM\sigma a_1^2}{b_1 c}$$

которое будет выполняться, так как $c > 0$, $b_1 > 0$, $\sigma < 0$.

Итак, гиперболоидальные движения устойчивы по отношению к полуосям и эксцентриситету гиперболоида.

§ 4. **Устойчивость круговых орбит.** Если $u = u_0$, $v = v_0$, то точка движется по окружности

$$x^2 + y^2 = c^2 \operatorname{ch}^2 v_0 \sin^2 u_0, \qquad z = c\sigma - c \operatorname{sh} v_0 \cos u_0$$

В этом случае точка находится на поверхности и эллипсоида и гиперболоида, поэтому все реальные движения спутников Земли устойчивы по отношению к радиусу окружности.

Особого исследования требуют экваториальные круговые орбиты ($z = c\sigma$), так как тогда $\cos u_0 = 0$ и неравенство (3.4) теряет смысл. Чтобы исследовать устойчивость круговых экваториальных орбит, преобразуем потенциал (1.1) к цилиндрическим координатам ρ, ψ, z

$$U = \frac{fM}{2}\left[\frac{1 + i\sigma}{\sqrt{\rho^2 + [z - c(\sigma + i)]^2}} + \frac{1 - i\sigma}{\sqrt{\rho^2 + [z - c(\sigma - i)]^2}}\right]$$

В работе [6] показано, что круговые движения типа рассматриваемого экваториального движения $\rho = \rho_0$, $z = c\sigma$ будут устойчивы тогда и только тогда, когда выполняются некоторые неравенства. В данном случае эти неравенства приводятся к виду

$$\frac{fM\rho_0}{\sqrt{(\rho_0^2 + c^2)^5}} > 0, \qquad \frac{fM(\rho_0^2 - 3c^2)}{\sqrt{(\rho_0^2 + c^2)^5}} > 0$$

Отсюда видно, что они будут выполняться для $\rho_0 > c\sqrt{3}$, т. е. для всех реальных спутников Земли.

Автор приносит глубокую благодарность В. Г. Демину за постановку задачи и В. В. Румянцеву за критику работы.

Поступила 16 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Vinti J. P. Theory of the effect of Drag on the orbital Jnclination of on Earth Satellite. J. of Res. of Nat. Bur. Stand. Math. and Phys., 1959, 62B, № 2, P. 79.
2. Кислик М. Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. Сб. Искусственные спутники Земли, 1960, АН СССР, вып. 4.
3. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. Сб. Искусственные спутники Земли, 1961, АН СССР, вып. 8.
4. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений снаряда. ПММ, 1946, т. IX, вып. 3.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
6. Дегтярев В. Г. Об устойчивости круговых движений в задаче двух неподвижных центров. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.