ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ, ОТНОСЯЩЕЙСЯ К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Ю. А. Архангельский (Москва)

1. Как известно [1], приближенные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием центрального ньютоновского поля сил

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=y'_0\gamma''-z'_0\gamma'+\alpha(C-B)\gamma'\gamma''$$
$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=z'_0\gamma-x'_0\gamma''+\alpha(A-C)\gamma''\gamma$$
$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=x'_0\gamma'-y'_0\gamma+\alpha(B-A)\gamma\gamma' \qquad (1.1)$$
$$\frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma'',\qquad \frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma,\qquad \frac{d\gamma''}{dt}=q\gamma-p\gamma'$$
$$\left(x'_0=Mgx_0,\ y'_0=Mgy_0,\ z'_0=Mgz_0,\ \alpha=\frac{3g}{R}\right)$$

имеют три первых независимых интеграла: интеграл живой силы, интеграл площадей и тривиальный интеграл

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2-2(x'_0\gamma+y'_0\gamma'+z'_0\gamma'')+\alpha(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)=\text{const} \qquad (1.2)$$
$$Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=\text{const},\qquad \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$$

Так как система уравнений (1.1) не содержит явно время t и имеет последний множитель Якоби, равный единице, то для сведения задачи к квадратурам достаточно иметь лишь четыре независимых первых интеграла, не содержащих время. Три первых независимых интеграла (1.2) будут алгебраическими. В двух случаях

$$(1)\quad x_0=y_0=z_0=0,\qquad (2)\quad A=B,\ x_0=y_0=0$$

в которых удалось свести систему (1.1) к квадратурам и которыми исчерпываются все случаи, когда возможно решение задачи в однозначных функциях времени [2], был найден четвертый алгебраический интеграл. В первом случае (аналогичном случаю Эйлера в классической задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле сил тяжести) четвертый интеграл есть

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2-\alpha(BC\gamma^2+AC\gamma'^2+AB\gamma''^2)=\text{const}$$

Во втором случае (аналогичном случаю Лагранжа в упомянутой задаче)

$$r=\text{const}$$

Возникает вопрос, в каких еще случаях возможно существование четвертого алгебраического интеграла.

Покажем, что для рассматриваемой задачи имеет место следующая теорема Пуанкаре [3, 4]: для существования у системы (1.1) нового алгебраического интеграла необходимо, чтобы эллипсоид инерции относительно неподвижной точки был эллипсоидом вращения.

2. Перепишем систему уравнений (1.1) в новых переменных y_1, y_2, z_1, z_2 вместо p, q, γ, γ' (предполагая, конечно, что A, B и C все различны)

$$y_1=\sqrt{A(A-C)}\,p+i\sqrt{B(B-C)}\,q,\qquad z_1=\gamma+i\gamma'$$
$$y_2=\sqrt{A(A-C)}\,p-i\sqrt{B(B-C)}\,q,\qquad z_2=\gamma-i\gamma'$$

и заменяя величины y_1, z_1, z_2, γ'' на λy_1, λz_1, λz_2, $\lambda\gamma''$, где λ — произвольный параметр, и t на $-it$, получим

$$\frac{dy_1}{dt}=-\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\,ry_1-\left[x'_0\sqrt{\frac{B-C}{B}}+iy'_0\sqrt{\frac{A-C}{A}}\right]\gamma''+$$
$$+\frac{z'_0}{2}\left[\sqrt{\frac{B-C}{B}}(z_1+z_2)+\sqrt{\frac{A-C}{A}}(z_1-z_2)\right]-$$
$$-\lambda\frac{\alpha\gamma''}{2}\left[(C-B)\sqrt{\frac{A-C}{A}}(z_1-z_2)-(A-C)\sqrt{\frac{B-C}{B}}(z_1+z_2)\right]$$

$$\frac{dy_2}{dt}=\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\,ry_2+\left[x'_0\sqrt{\frac{B-C}{B}}-iy'_0\sqrt{\frac{A-C}{A}}\right]\lambda\gamma''-$$
$$-\frac{\lambda z'_0}{2}\left[\sqrt{\frac{B-C}{B}}(z_1+z_2)-\sqrt{\frac{A-C}{A}}(z_1-z_2)\right]-$$
$$-\lambda^2\frac{\alpha\gamma''}{2}\left[(C-B)\sqrt{\frac{A-C}{A}}(z_1-z_2)+(A-C)\sqrt{\frac{B-C}{B}}(z_1+z_2)\right]\qquad(2.1)$$

$$C\frac{dr}{dt}=\frac{A-B}{4\sqrt{AB(A-C)(B-C)}}(y_2^2-\lambda^2y_1^2)-\frac{\lambda}{2}[x'_0(z_1-z_2)-iy'_0(z_1+z_2)+$$
$$+\frac{\lambda^2\alpha}{4}(A-B)(z_1^2-z_2^2)$$

$$\frac{dz_1}{dt}=-rz_1+\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda y_1+y_2}{\sqrt{A(A-C)}}+\frac{\lambda y_1-y_2}{\sqrt{B(B-C)}}\right]\gamma''$$

$$\frac{dz_2}{dt}=rz_2-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda y_1+y_2}{\sqrt{A(A-C)}}-\frac{\lambda y_1-y_2}{\sqrt{B(B-C)}}\right]\gamma''$$

$$\frac{d\gamma''}{dt}=\frac{1}{4\sqrt{A(A-C)}}(\lambda y_1+y_2)(z_1-z_2)-\frac{1}{4\sqrt{B(B-C)}}(\lambda y_1-y_2)(z_1+z_2)$$

Эта система имеет следующие первые алгебраические интегралы:

$$\frac{(\lambda y_1+y_2)^2}{A-C}-\frac{(\lambda y_1-y_2)^2}{B-C}+4Cr^2-4\lambda[x'_0(z_1+z_2)-iy'_0(z_1-z_2)+2z'_0\gamma'']+$$
$$+\lambda^2\alpha[A(z_1+z_2)^2-B(z_1-z_2)^2+4C\gamma''^2]=h_1\qquad(2.2)$$
$$\frac{A}{2\sqrt{A(A-C)}}(\lambda y_1+y_2)(z_1+z_2)-\frac{B}{2\sqrt{B(B-C)}}(\lambda y_1-y_2)(z_1-z_2)+Cr\gamma''=h_2$$
$$z_1z_2+\gamma''^2=h_3$$

где h_1, h_2, h_3 — некоторые произвольные постоянные.

Гюссон [5] доказал теорему Пуанкаре для задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле сил тяжести, рассматривая систему уравнений, получающуюся из системы (2.1) при $\alpha=0$. Для доказательства использовалась полученная система уравнений и соответствующие ей первые интегралы при $\lambda=0$. Относительно же правых частей системы дифференциальных уравнений и ее первых интегралов при $\lambda\neq0$ считалось достаточным, что они являются полиномами от y_1, y_2, z_1, z_2, r, γ'', λ.

Так как при $\lambda=0$ уравнения (2.1) и их первые интегралы (2.2) не зависят от α и при $\lambda\neq0$, $\alpha\neq0$ правые части системы (2.1) и соотношения (2.2) являются также полиномами от y_1, y_2, z_1, z_2, r, γ'', α, то результат Гюссона распространяется и на рассматриваемую нами задачу.

Таким образом, для задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки под действием центрального ньютоновского поля сил имеет место следующая теорема Пуанкаре: если эллипсоид инерции относительно точки опоры не есть эллипсоид вращения, то, кроме случая $x_0=y_0=z_0=0$, при произвольных начальных условиях не может быть нового алгебраического интеграла системы (1.1).

Поступила 21 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2.
2. Архангельский Ю. А. Об однозначных интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
3. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892, vol. Ich. V.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Сб. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Изд-во АН СССР, 1940.
5. Husson Ed. Sur un théoréme de H. Poincaré, relativement au mouvement d'un solide pesant. Acta math., 1908, 31, p. 71—88.