О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ И ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ ПЛОСКОГО КОНТУРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

А. Н. Шебалов (Ленинград)

Задача о вычислении волнового сопротивления цилиндра движущегося под свободной поверхностью при неустановившемся движении ранее решалась Л. Н. Сретенским [1] и Т. Х. Хавелоком [2]. Ниже вычисляются выражения для комплексной скорости и сил при неустановившемся движении произвольного плоского контура под свободной поверхностью.

1. Пусть под свободной поверхностью тяжелой идеальной несжимаемой жидкости движется из состояния покоя со скоростью $v(t)$ плоский контур произвольной формы.

Выберем систему координат таким образом, что начало координат расположено на горизонтальной плоскости, совпадающей с первоначальным невозмущенным уровнем. Ось x направлена по направлению движения, ось y — вертикально вверх. Будем считать движение жидкости потенциальным, а волны, возникающие на свободной поверхности малыми. Последнее предположение эквивалентно тому, что контур глубоко погружен в жидкости.

Для отыскания абсолютного потенциала вызванных скоростей $\varphi(x, y, t)$ движущегося контура в подвижной системе координат имеем уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ с граничными условиями:

на свободной поверхности при $y = 0$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v^2(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2v(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} - \frac{dv(t)}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

на поверхности тела

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_n(t) \tag{1.2}$$

на бесконечности

$$\varphi(x, y, t) \to 0 \quad \text{при } x \to +\infty, \qquad \varphi(x, y, t) \to 0 \quad \text{при } y \to -\infty \tag{1.3}$$

В качестве начальных условий можно взять условие, что движение контура начинается без начальной скорости и, кроме того, жидкость находится в покое, а поверхность ее горизонтальная. Действительно, для рассматриваемой задачи уравнение свободной поверхности будет определяться формулой

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.4}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ контур находится в состоянии покоя, т. е. $v(0) = 0$, тогда при $t = 0$

$$\zeta(x, 0) = \frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{y=0}$$

Таким образом, для того чтобы жидкость в начальный момент времени $t = 0$ находилась в относительном покое и ее свободная поверхность была горизонтальна, необходимо потребовать, чтобы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{y=0} = 0, \quad \varphi\,|_{y=0} = 0 \qquad \text{при } t = 0 \tag{1.5}$$

Предварительно рассмотрим частные случаи неустановившегося движения особенностей типа плоского вихря, источника и т. п.

2. Пусть на глубине h под свободной поверхностью перемещается из состояния покоя плоский вихрь с постоянной циркуляцией Γ. Тогда потенциал скорости абсолютного движения $\varphi(x, y, t)$ найдется из решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ с условием (1.1) и граничных условий на бесконечности. Образуем выражение

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 \qquad \left(\varphi_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y+h}{x}, \ \varphi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-h}{x}\right) \tag{2.1}$$

в котором φ_3 — пока неизвестная функция. Очевидно, что при $y = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1 - \varphi_2) = -2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$$

Тогда уравнение (1.1) с учетом (2.1) при $y=0$ примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}-2v(t)\frac{\partial\varphi_3}{\partial x\partial t}+v^2(t)\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}+g\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}-\frac{dv(t)}{\partial t}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=2g\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \tag{2.2}$$

В дальнейшем всюду будем писать v вместо $v(t)$. Так как

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+(y-h)^2}$$

то при $y=0$ будет справедливо равенство

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=-\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{k(y-h)}\sin kxdx \tag{2.3}$$

Тогда уравнение (2.2) будет иметь вид при $y=0$

$$\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}+g\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}-\frac{dv}{dt}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=-2g\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{k(y-h)}\sin kx\,dk \tag{2.4}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2v\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{dv}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{g\Gamma}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{k[(y-h)+ix]}dk \tag{2.5}$$

Очевидно, что если будет определено u, то φ_3 найдется из условия $\varphi_3=\operatorname{Im}u$. Решение уравнения (2.5) будем искать в виде

$$u=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A(k,t)\,e^{k[(y-h)+ix]}dk \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.5) и сравнивая левую и правую части, найдем условие для определения $A(k,t)$

$$\frac{d^2A}{dt^2}-2ikv\frac{dv}{dt}-\left[v^2k^2-gk+ik\frac{dv}{dt}\right]A=-g\Gamma \tag{2.7}$$

Введем новую переменную

$$B=A\exp\left(-ik\int\limits_0^t vd\tau\right)$$

Подставляя последнее равенство в (2.7), получим

$$B''+gkB=-g\Gamma\exp\left(-ik\int\limits_0^t vd\tau\right) \tag{2.8}$$

Характеристическое уравнение (2.8) будет

$$m^2+gk=0,\qquad m_{1,2}=\pm i\sqrt{gk}$$

Частное решение неоднородного линейного уравнения возьмем в виде:

$$B=-g\Gamma\int\limits_0^t\exp\left(-ik\int\limits_0^\tau vd\tau\right)\frac{\sin[\sqrt{gk}(t-\tau)]}{\sqrt{gk}}d\tau \tag{2.9}$$

тогда получим

$$A=-g\Gamma\int\limits_0^t\exp\left(ik\int\limits_\tau^t vd\tau\right)\frac{\sin[\sqrt{gk}(t-\tau)]}{\sqrt{gk}}d\tau \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.6), получим

$$u=-\frac{g\Gamma}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^t\exp\left\{k\left[(y-h)+i\left(x+\int\limits_\tau^t vd\tau\right)\right]\right\}\frac{\sin[\sqrt{gk}(t-\tau)]}{\sqrt{gk}}d\tau\,dk \tag{2.11}$$

Отсюда

$$\varphi_3=\operatorname{Im}u=-\frac{g\Gamma}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{gk}}e^{k(y-h)}\sin k\left[x+\int\limits_\tau^t vd\tau\right]\sin\sqrt{gk}(t-\tau)\,d\tau\,dk \tag{2.12}$$

Определим теперь вид функции тока по уравнениям

$$\partial\varphi / \partial x = \partial\psi / \partial y, \qquad \partial\varphi / \partial y = -\partial\psi / \partial x$$

Для вычисления ψ_3 имеем равенство

$$\psi_3 = \int \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} dx + Q(y) \tag{2.13}$$

где $Q(y)$ — пока неизвестная функция от y. Ее можно найти из условия

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} = -\int \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2} dx + \theta'(y) \tag{2.14}$$

Проделывая вычисления, получим, что $Q'(y) = 0$. Положим, что $\theta(y) = \text{const} = 0$. Следовательно,

$$\psi_3 = -\frac{g\Gamma}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t \frac{1}{\sqrt{gk}} e^{k(y-h)} \cos\left[k\left(x + \int_\tau^t v d\tau\right)\right] \sin\left[\sqrt{gk}(t-\tau)\right] d\tau dk \tag{2.15}$$

Составим выражение для комплексного потенциала вихря при неустановившемся движении $\omega_3(z,t) = \varphi_3 + i\psi_3$, $(z = x + iy)$

$$\omega_3(z,t) = \frac{g\Gamma}{\pi i}\int_0^\infty\int_0^t \frac{e^{-ik[z-ih]}}{\sqrt{gk}} \exp\left(-ik\int_\tau^t v d\tau\right) \sin\left[\sqrt{gk}(t-\tau)\right] d\tau\, dk \tag{2.16}$$

Суммарный комплексный потенциал движения вихря будет (2.17)

$$W(z,t) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z+ih}{z-ih} + \frac{g\Gamma}{\pi i}\int_0^\infty\int_0^t \frac{e^{-ik(z-ih)}}{\sqrt{gk}} \exp\left(-ik\int_\tau^t v d\tau\right) \sin\left[\sqrt{gk}(t-\tau)\right] d\tau\, dk$$

Из выражения (2.17) видно, что полученное выражение удовлетворяет как граничным условиям, так и начальным условиям. Действительно, предполагая, что в начальный момент времени вихрь находится в состоянии покоя ($v(0) = 0$), из (2.17) получим

$$\zeta(x, 0) = \frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \qquad \varphi = 0 \qquad \text{при } t = 0,\ y = 0$$

т. е. в начальный момент времени свободная поверхность жидкости горизонтальна и движение жидкости начинается без начальных скоростей.

3. Пусть в точке $(0, -h)$ находится плоский источник обильности $Q(t)$, который перемещается из состояния покоя неустановившимся образом вдоль оси x.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ мощность источника равна $Q(0) = 0$. Потенциал скорости абсолютного движения $\varphi(x, y, t)$ найдется из решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ с условием (1.1) и граничных условий на бесконечности. В качестве начальных условий можно взять условие, что при $t = 0$ свободная поверхность первоначально находится в покое в своем горизонтальном положении равновесия.

Для отыскания потенциала вызванных скоростей $\varphi(x, y, t)$ составим выражение

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 \qquad \left(\varphi_1 = \frac{Q(t)}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + (y+h)^2},\ \varphi_2 = \frac{Q(t)}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + (y-h)^2}\right) \tag{3.1}$$

Уравнение (1.1) с учетом (3.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2} - 2v\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial t} + v^2\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2} + g\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} - \frac{dv}{dt}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} = \frac{gQ(t)}{\pi}\int_l^\infty e^{k(y-h)}\cos kx dk \tag{3.2}$$

Решая (3.2) аналогично изложенному в п. 2, получим

$$\varphi_3 = \frac{g}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{gk}} e^{k(y-h)} \cos\left[k\left(x + \int_\tau^t v d\tau\right)\right] \sin\left[\sqrt{gk}(t-\tau)\right] dk d\tau \tag{3.3}$$

Легко проверить, что (3.1) удовлетворяет начальным условиям задачи. Действительно, из формулы (3.1) с учетом (3.3) видно, что если $Q(0) = 0$ при $t = 0$, то движение жидкости возникает из состояния покоя. Если $Q(0) = Q_0 \neq 0$ при $t = 0$, то в начальный момент будем иметь

$$\varphi(x, y, 0) = \frac{Q_0}{2\pi}\left(\ln\sqrt{x^2 + (y+h)^2} - \ln\sqrt{x^2 + (y-h)^2}\right). \tag{3.4}$$

Уравнение свободной поверхности в начальный момент будет определяться (1.4). Подставляя (3.4) в (1.4), получим, что $\zeta(x, 0) = 0$, т. е. в этом случае в начальный момент времени $t = 0$ свободная поверхность находится в покое в своем горизонтальном положении. Выражение для функции тока найдем из условия (2.13).

Производя вычисления, получим

$$\psi_3 = \frac{g}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{gk}} e^{k(y-h)} \sin\left[k\left(x + \int_\tau^t v d\tau\right)\right] \sin\left[\sqrt{gk}(t-\tau)\right] dk d\tau \qquad (3.5)$$

Тогда $\omega_3(z, t)$ будет иметь вид

$$\omega_3(z, t) = \frac{g}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t \frac{Q(\tau)}{\sqrt{gk}} e^{-ik[z-ih]} \exp\left(-ik\int_0^t v d\tau\right) \sin\left[\sqrt{gk}(t-\tau)\right] dk d\tau \qquad (3.6)$$

Комплексный потенциал неустановившегося движения источника будет иметь вид

$$W(z, t) = \frac{Q(t)}{2\pi} \ln\left[(z+ih)(z-ih)\right] +$$

$$+ \frac{g}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t \frac{Q(t)}{\sqrt{gk}} e^{-ik[z-ih]} \exp\left(-ik\int_\tau^t v\, d\tau\right) \sin\left[\sqrt{gk}(g-\tau)\right] dk\, d\tau \qquad (3.7)$$

Дифференцируя (3.7) по z, получим выражение комплексного потенциала для диполя с осью, параллельной оси x

$$W(z, t) = \frac{Q(t)}{2\pi}\left[\frac{1}{z+ih} - \frac{1}{z-ih}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty\int_0^t Q(t)\sqrt{gk}\, e^{-ik(z-ih)} \exp\left(-ik\int_\tau^t v d\tau\right) \sin \sqrt{gk}(t-\tau)\, dk\, d\tau \qquad (3.8)$$

В силу линейности граничных условий выражение комплексного потенциала для вихреисточника в случае безграничной жидкости имеет вид

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+ih) + \frac{Q(t)}{2\pi}\ln(z+ih) = \frac{\Gamma + Q(t)\, i}{2\pi i}\ln(z+ih) \qquad (3.9)$$

Тогда для вихреисточника комплексный потенциал неустановившегося движения под свободной поверхностью будет иметь вид

$$W(z, t) = \frac{B}{2\pi i}\ln(z - z_1) - \frac{\overline{B}}{2\pi i}\ln(z - \overline{z}_1) +$$

$$+ \frac{g}{\pi i}\int_0^\infty\int_0^t \frac{e^{-ik(z-\overline{z}_1)}}{\sqrt{gk}} \overline{B} \exp\left(-ik\int_\tau^t v d\tau\right) \sin\sqrt{gk}(t-\tau)\, dk d\tau \qquad (3.10)$$

Здесь введены обозначения

$$\Gamma + iQ = B, \qquad \Gamma - iQ = \overline{B}, \qquad z + ih = z - z_1$$

4. Вычислим комплексный потенциал $W(z, t) = \varphi + i\psi$ при неустановившемся движении произвольного контура со скоростью $v(t)$ под свободной поверхностью.

Предположим, что движение контура начинается из состояния покоя. В этом случае задача по отысканию $W(z, t)$ сведется к отысканию аналитических функций $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ в нижнем полупространстве по уравнению $\Delta\varphi = 0$ с условиями (1.1), (1.2) и (1.3). В качестве начальных условий опять возьмем условие, что при $t = 0$ жидкость находится в состоянии относительного покоя, в горизонтальном положнии, т. е.

$$(dW / dt)_{y=0} = 0, \qquad \varphi = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Обозначим через $W_0(z, t)$ комплексный потенциал скорости того течения, которое получается при неустановившемся движении контура C в безграничной жидкости.

Возьмем произвольный контур C_1, внутри которого находится тело, тогда для произвольной точки z, находящейся между контуром и телом, по формуле Коши значение $W_0(z, t)$ будет

$$W_0(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{W_0(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (4.1)$$

Где через ζ обозначена переменная интегрирования, которая пробегает весь контур интегрирования. По формуле Коши выражение комплексной скорости будет

$$\frac{dW_0}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{dW_0}{d\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^1}\frac{dW_0}{\zeta - z} \tag{4.2}$$

Пусть $dW_0(\zeta, t) = d\varphi_0 + id\psi_0$. Из формулы (3.9) видно, что комлексная скорость вихреисточника будет

$$\bar{v}(z, t) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\frac{1}{z - \zeta}$$

Если сравнить последнее выражение $\bar{v}(z, t)$ с формулой (4.2), то можно представить себе, что движение жидкости происходит вследствие наличия на контуре C ряда вихреисточников. При этом на каждом элементарном участке контура $d\zeta$ расположены вихрь $d\varphi_0$ и источник $d\psi_0$. Тогда, заменяя $B = \Gamma + iQ$ в формуле (3.10) на $dW_0(z, t)$ и производя интегрирование по контуру C, получим выражение комплексной скорости от распределенных по контуру вихреисточников.

Это волновое движение в первом приближении можно считать за то, которое вызывалось бы движением контура C. Приближенность решения объясняется тем, что при движении контура под свободной поверхностью интенсивность вихрей и источников будет отлична от того значения, которое имели бы Γ и Q при движении контура в безграничном потоке. Это изменение будет тем меньше, чем глубже контур будет погружен в жидкость.

В первом приближении решение задачи о неустановившемся движении контура C под свободной поверхностью можно определять формулой

$$\frac{dW(z, t)}{dz} = \left(\frac{dW(z, t)}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dW(z, t)}{dt}\right)_2 \tag{4.3}$$

Здесь

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dW_0(\zeta, t)}{z - \zeta} \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\overline{W}_0(\zeta, t)}{z - \zeta} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_C d\overline{W}_0(\zeta, t)\int_0^\infty \sqrt{gk}\, e^{-ik(z-\bar{\zeta})}dk\int_0^t \exp\left(-ik\int_\tau^t v d\tau\right)\sin\sqrt{gk}(t - \tau)\,d\tau \tag{4.5}$$

Решение (4.3), (4.4), (4,5) удовлетворяет всем уравнениям задачи, в том числе и начальным уравнениям, так как при $t = 0$ и $W_0 = 0$.

Силы, действующие на тело, можно вычислить по формуле

$$X + iY = i\rho\int_C\frac{dW}{dt}dz_1 + \frac{\rho i}{2}\frac{dv(t)}{dt}\int_C(z - z_1)\,dz_1 + \frac{i\rho}{2}\int_C\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\Bigg] \tag{4.6}$$

где X и Y обозначают проекции силы на оси x и y, а $z_1 = x - iy$.

Формула (4.6) получена Л. Н. Сретинским [1] и вытекает как частный случай более общей формулы Чаплыгина [3]. При расчетах сил, как это указано Кочиным [4], в первом приближении можно вместо $\bar{v}(z) = dW_0/dz$ брать $\bar{v}(z) = (dW_0/dz)_\infty$ комплексную скорость для безграничной жидкости. Л. Н. Сретенский [1] показал, что первые два члена формулы (4.6) дают силы, возникающие от ускоренного движения. Эта категория сил в работе не рассматривается.

Волновое сопротивление произвольного контура, его подъемная сила волновой природы будет определяться третьим членом (4.6), т. е.

$$X + iY = \frac{i\rho}{2}\int_C\left(\frac{dW}{dz}\right)_0^2 dz \tag{4.7}$$

В формуле (4.7) производная $(dW_0/dz)_0$ есть комплексная скорость в относительном движении; поэтому

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_0 = \left(\frac{dW}{dz}\right)_1 + \left(\frac{dW}{dz}\right)_2 - v(t)$$

Вычислим интеграл

$$J=\int\limits_{C_1}\left(\frac{dW}{dz}\right)_0^2 dz=$$

$$=\int\limits_{C_1}\left(\frac{dW}{dz}\right)_1^2 dz+\int\limits_{C_1}\left[\left(\frac{dW}{dz}\right)_2-v(t)\right]^2 dz+2\int\limits_{C_1}\left(\frac{dW}{dz}\right)_1\left[\left(\frac{dW}{dz}\right)_2-v(t)\right]dz \tag{4.8}$$

Здесь два первых интеграла исчезают, т. е.

$$\int\limits_{C_1}\left(\frac{dW}{dz}\right)_1^2 dz=0,\quad \int\limits_{C_1}\left[\left(\frac{dW}{dz}\right)_2-v(t)\right]^2 dz=0$$

так как функция $(dW/dz)_1$, голоморфна на и вне контура C_1 и имеет на бесконечности нуль по крайней мере первого порядка, а функция $(dW(z,t)/dz)_2$ голоморфна на и внутри контура C_1. Равенство (4.8) можно представить еще и так:

$$J=2\int\limits_{C_1}\left[\left(\frac{dW}{dz}\right)_1+\left(\frac{dW}{dz}\right)_2\right]\left[\left(\frac{dW}{dz}\right)_2-v(t)\right]dz=2\int\limits_{C_1}\frac{dW}{dz}\left[\left(\frac{dW}{dz}\right)_2-v(t)\right]dz \tag{4.9}$$

$$\int\limits_{C_1}\left(\frac{dW}{dz}\right)_2\left[\left(\frac{dW}{dz}\right)_2-v(t)\right]dz=0$$

Следовательно,

$$J=2\int\limits_{C_1}\frac{dW}{dz}\left(\frac{dW}{dz}\right)_2 dz-2v(t)\int\limits_{C_1}\frac{dW}{dz}dz=2\int\limits_{C_1}\frac{dW}{dz}\left(\frac{dW}{dz}\right)_2 dz-2v(t)\Gamma$$

$$\left(\Gamma=\int\limits_{C_1}\frac{dW}{dz}dz\right) \tag{4.10}$$

Здесь Γ — циркуляция скорости около контура C. Воспользовавшись выражением (4.5), получаем

$$\int\limits_{C_1}\frac{dW}{dz}\left(\frac{dW}{dz}\right)_2 dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\int\limits_{C}\frac{dW(z,t)}{dz}\,\overline{\frac{dW(\zeta,t)}{d\zeta}}\left[\frac{1}{z-\bar\zeta}-\right.$$

$$\left.-2i\int\limits_0^\infty\sqrt{gk}e^{-ik(z-\bar\zeta)}dk\int\limits_0^t\exp\left(-ik\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}(t-\tau)\,d\tau\right]dz\,d\bar\zeta \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в (4.7), получим

$$X+iY=\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_C\int\limits_{C_1}\frac{dW}{dz}\frac{d\overline{W}}{d\bar\zeta}\left[\frac{1}{z-\bar\zeta}-2i\int\limits_0^\infty\sqrt{gk}e^{-ik(z-\bar\zeta)}dk\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^t\exp\left(ik\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}(t-\tau)\,d\tau\right]dz\,d\bar\zeta-i\rho v(t)\,\Gamma \tag{4.12}$$

Преобразуем правую часть (4.12). Если точки z и ζ принадлежат нижней полуплоскости, то справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{z-\bar\zeta}=i\int\limits_0^\infty e^{-ik(z-\bar\zeta)}dk$$

Тогда первый интегральный член (4.12) примет вид

$$\int\limits_{C_1}\int\limits_{C}\frac{dW}{dz}\frac{d\overline{W}}{d\bar\zeta}\frac{1}{z-\bar\zeta}dz\,d\bar\zeta=\int\limits_{C_1}\int\limits_{C}\int\limits_0^\infty\frac{dW}{dz}\frac{d\overline{W}}{d\bar\zeta}e^{-ikz}e^{ik\bar\zeta}dk\,dz\,d\bar\zeta=$$

$$=i\int\limits_0^\infty H(k,t)\overline{H(k,t)}\,dk=i\int\limits_0^\infty|H(k,t)|^2dk\qquad\left(H(k,t)=\int\limits_C e^{-ikz}\frac{dW}{dz}dz\right) \tag{4.13}$$

За контур интегрирования можно брать произвольный контур нижней полуплоскости, охватывающий в положительном направлении контур C.

Оставшаяся часть (4.12) запишется в следующем виде:

$$-2i\int\limits_{C_1}\int\limits_{C}\frac{dW}{dz}\frac{d\overline{W}}{d\overline{\zeta}}\int\limits_0^\infty \sqrt{gk}\,e^{-ik(z-\overline{\zeta})}\,dk\int\limits_0^t \exp\left(-ik\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,d\tau\,dz\,d\overline{\zeta}=$$

$$=-2i\int\limits_0^\infty |H(k,t)|^2\sqrt{gk}\,dk\int\limits_0^t\exp\left(-ik\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,d\tau \qquad (4.14)$$

Следовательно,

$$X+iY=\frac{i\rho}{2\pi}\int\limits_0^\infty |H(k,t)|^2\,dk-\frac{i\rho}{\pi}\int\limits_0^\infty |H(k,t)|^2\sqrt{gk}\,dk\times$$

$$\times\int\limits_0^t\exp\left(-ik\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,d\tau-i\rho v(t)\Gamma \qquad (4.15)$$

Тогда волновое сопротивление

$$R=\frac{\rho}{\pi}\int\limits_0^\infty |H(k,t)|^2\sqrt{gk}\,dk\int\limits_0^t\sin\left(k\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,d\tau \qquad (4.16)$$

$$Y=\rho gS+\rho v(t)\Gamma-\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^\infty |H(k,t)|^2\,dk+ \qquad (4.17)$$

$$+\frac{\rho}{\pi}\int\limits_0^\infty |H(k,t)|^2\sqrt{gk}\,dk\int\limits_0^t\cos\left(k\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\cos\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,d\tau$$

Здесь ρgS — архимедова сила поддержания; S — площадь, охвитываемая контуром.

В заключение найдем волновое сопротивление и подъемную силу цилиндра радиуса r_0 с циркуляцией по контуру цилиндра Γ при неустановившемся движении на глубине h под свободной поверхностью. Комплексная скорость соответствующего движения в безграничной жидкости имеет вид

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_\infty=\frac{v(\tau)\,r_0^2}{(z+ih)^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i\,(z+ih)} \qquad (4.18)$$

Тогда

$$H(k)=\int\limits_C e^{-ikz}\left(\frac{dW}{dz}\right)_\infty dz=e^{-vh}\,[\Gamma+2\pi v(\tau)\,kr_0^2] \qquad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.16), получим

$$R=\frac{\rho}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-2kh}\sqrt{gk}\,[\Gamma+2\pi v(\tau)\,kr_0^2]^2\,dk\int\limits_0^t\sin\left(k\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,d\tau \qquad (4.20)$$

При $\Gamma=0$ получим волновое сопротивление цилиндра

$$R=4\pi\rho g r_0^4\int\limits_0^\infty e^{-2kh}k^2\sqrt{gk}\,dk\int\limits_0^t v^2(\tau)\sin\left(k\int\limits_\tau^t v\,d\tau\right)\sin\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,d\tau \qquad (4.21)$$

Последняя формула аналогична формуле Л. Н. Сретенского [1].

Действительно, заменяя $v(\tau)$ на $\sqrt{gk}/k$ и, кроме того, заменяя во внутреннем интеграле синусы на косинусы тех же аргументов (это приведет только к изменению знака), получим выражение для волнового сопротивления цилиндра в форме Л. Н. Сретенского.

Полагая в (4.20) радиус $r_0 = 0$, получим волновое сопротивление вихря

$$R = \frac{\rho \Gamma^2}{\pi} \int_0^\infty e^{-2kh} \sqrt{gk}\, dk \int_0^t \sin\left(k \int_\tau^t v\, d\tau\right) \sin \sqrt{gk}\,(t-\tau)\, d\tau \tag{4.22}$$

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить Л. Н. Сретенского за советы, данные им при просмотре работы.

Поступила 7 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. К теории волнового сопротивления. Тр. ЦАГИ, 1939, вып. № 458.
2. Havelock T. X. The Wave Resistance of Cylindrical Body, moved from Statical. Quart. J. Mech. and Appl. Math. vol. 2.
3. Чаплыгин С. А. Собрание сочинений. Т. II, Гостехиздат, 1948.
4. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собр. соч., т. II, АН СССР, 1949.

О НЕКОТОРЫХ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОГО СЛОЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

П. В. Крауклис (Ленинград)

Известно, что жидкий слой, расположенный между упругими полупространствами, скорость поперечных волн в которых больше скорости звука в слое, является волноводом [1]. В этом случае волноводный характер распространения связан с интерференцией волн в слое при углах больших предельного. Более детальное изучение процессов, происходящих в рассматриваемой системе, показывает, что в последней при любых соотношениях между параметрами сред существует еще один тип медленнозатухающих с расстоянием колебаний, низкочастотная часть которых имеет малую скорость распространения [2]. Ниже изучаются некоторые основные особенности этих колебаний.

1. Пусть в цилиндрической системе координат (r, θ, z) жидкий слой *1*, определенный условием $0 \leqslant z \leqslant h$, разделяет упругое полупространство *0*, для которого $z < 0$ от полупространства *2*, для которого $z > h$. Каждая из сред характеризуется соответственно продольными a_i^{-1} $(i = 0, 1, 2)$ и поперечными b_i^{-1} $(i = 0, 2)$ скоростями распространения и плотностями ρ_i $(i = 0, 1, 2)$, связанными с постоянными Ламе:

$$a_i^2 = \frac{\rho_i}{\lambda_i + 2\mu_i}, \qquad b_i^2 = \frac{\rho_i}{\mu_i} \tag{1.1}$$

В точке среды с координатами $(0, 0, -H)$ находится источник типа центра расширения, зависимость от времени которого выражается единичной функцией. Источник возбуждает в среде *0* поле смещений, характеризуемое потенциалом

$$\varphi_0^\circ = \int_0^\infty \frac{I_0(kr)}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} X_0^\circ(k, \eta) \exp\left[k\left(\frac{t}{b_0}\eta \pm (z+H)\alpha_0\right)\right] d\eta \tag{1.2}$$

Здесь

$$X_0^\circ = \frac{1}{4\pi(\lambda_0 + 2\mu_0)\eta\varkappa_0}, \qquad \alpha_0 = \sqrt{1 + \gamma_0^2\eta^2}, \qquad \gamma_0 = \frac{a_0}{b_0} \tag{1.3}$$

При этом на плоскости η проводятся разрезы от точек $\pm i / \gamma_0$ в левую полуплоскость, а ветвь радикала фиксируется условием $\arg \alpha_0 = 0$ при $\eta > 0$. В формуле (1.2) знак плюс берется при $z < -H$, а знак минус при $z > -H$.

Обозначим через $\varphi_0, \psi_0, \varphi_2, \psi_2$ продольный и поперечный потенциалы дополнительных полей упругих смещений в полупространствах *0* и *2*, а через φ_1 потенциал поля смещений в жидком слое *1*. Потенциалы должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial z^2} = a_\nu^2 \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial t^2} \qquad (\nu = 0, 2) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_\nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial z^2} - \frac{\psi_\nu}{r^2} = b_\nu^2 \frac{\partial^2 \psi_\nu}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}$$