быстродействующей вычислительной машине. Начальное распределение $u$, $T$, $\rho$ при $0 \leqslant r \leqslant R_0$ задавалось произвольным с учетом, что $E = E_0$. В частности, в качестве начального профиля можно было выбрать любое решение с разрывной температурой, например, решение, полученное в работе [1]. В любом случае рассматриваемое движение выходит на полученный автомодельный режим. Решения с разрывной температурой являются неустойчивыми и переходят в решения с непрерывной температурой.

В заключение автор благодарит Яненко Н. Н. за полезные замечания.

Поступила 25 VIII 1962

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коробейников В. П. О распространении сильной сферической взрывной волны в теплопроводном газе. ДАН СССР, 1957, т. 113, вып. 1.
2. Коробейников В. П. Исследование некоторых задач неустановившихся одномерных движений газа. Кандидатская диссертация. М., Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1956.
3. Бам-Зеликович Г. М. К распространению сильных взрывных волн. Теоретическая гидромеханика под редакцией Л. И. Седова. Сборник, 1949, № 4, вып. 1.
4. Бежаев И. О. О влиянии вязкости и теплопроводности газа на распространение сильного взрыва. Теоретическая гидромеханика под редакцией Л. И. Седова, Сборник, 1953, № 11, вып. 3.
5. Коробейников В. П. Задача о сильном точечном взрыве при нулевом градиенте температуры. ДАН СССР, 1956, т. 109, вып. 2.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
7. Неуважаев В. Е. Истечение газа в вакуум при степенном законе энерговыделения. ДАН СССР, 1961, т. 141, вып. 5.

---

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ФРИДМАНА-КЕЛЛЕРА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

**М. М. Прудников**

(Москва)

Рассматривается задача типа Коши для уравнений Фридмана-Келлера в случае однородной турбулентности. При этом спектральные тензоры, являющиеся обобщенными преобразованиями Фурье корреляционных тензоров, в произвольный момент времени выражаются в виде суммы ряда многократных интегралов от спектральных тензоров начальной функции распределения.

Пусть $u_{a_k}(M_k)$ — турбулентная скорость в точке $M_k$; обозначим корреляционный тензор скоростей

$$T^{(n)}_{a_0 a_1, \ldots, a_{n-1}}(M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}) = \langle u_{a_0}(M_0)\, u_{a_1}(M_1), \ldots, u_{a_{n-1}}(M_{n-1})\rangle$$

спектральный тензор скоростей

$$\tau^{(n)}_{a_0 a_1, \ldots, a_{n-1}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int T^{(n)}_{a_0 a_1, \ldots, a_{n-1}} \exp(-i\mathbf{k}_m \mathbf{r}_m)\, d\mathbf{r}$$

корреляционный тензор давление — скорость

$$P^{(n)}_{a_0 a_1, \ldots, 0_k, \ldots, a_{n-1}}(M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}) = \langle u_{a_0}(M_0), \ldots, p(M_k), \ldots, u_{a_{n-1}}(M_{n-1})\rangle$$

Здесь по повторяющимся индексам ведется суммирование.

В статистической теории турбулентности для корреляционных тензоров, определяющих функцию распределения, известна система уравнений Фридмана-Келлера, выведенная из уравнений Навье — Стокса [1].

Для случая однородной турбулентности в несжимаемой жидкости они имеют вид

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\left[\triangle_0+\triangle_1\right]\right\}T^{(2)}_{a_0a_1}= \tag{1.1}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial(\mathbf{x}_0)_{a_2}}\lim_{M_2\to M_0}T^{(3)}_{a_0a_1a_2}-\frac{\partial}{\partial(\mathbf{x}_1)_{a_2}}\lim_{M_2\to M_1}T^{(3)}_{a_0a_1a_2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial(\mathbf{x}_0)_{a_0}}P^{(2)}_{0_0a_1}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial(\mathbf{x}_1)_{a_1}}P^{(2)}_{a_00_1}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\nu\sum_{k=0}^{n-1}\triangle_k\right\}T^{(n)}_{a_0,\ldots,a_{n-1}}=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial(\mathbf{x}_k)_{a_n}}\lim_{M_n\to M_k}T^{(n+1)}_{a_0a_1,\ldots,a_n}-\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial(\mathbf{x}_k)_{a_k}}P^{(n)}_{a_0,\ldots,0_k,\ldots,a_{n-1}} \tag{1.n}$$

Введем однородные координаты

$$\frac{\partial}{\partial x_{a_0}}=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial r_{a_k}},\qquad \frac{\partial}{\partial x_{a_k}}=\frac{\partial}{\partial r_{a_k}}$$

и безразмерные переменные $u_0$ — среднеквадратичная скорость, $l_2, l_3, \ldots, l_n$ — характерные масштабы корреляционных моментов $2, 3, \ldots, n$ — порядка.

Тогда исключив давление при помощи равенства

$$\frac{1}{\rho}p(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial^2 u_i' u_j'}{\partial x_i'\partial x_j'}\frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

систему (1.1) (1.n) представим в характерной для теории однородной турбулентности форме:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2}{R_2}\triangle_{\mathbf{r}_1}\right\}T^{(2)}_{a_0a_1}=-\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}_1)_{a_2}}\left(\lim_{M_2\to M_1}T^{(3)}_{a_0a_1a_2}-\lim_{M_2\to M_0}T^{(3)}_{a_0a_1a_2}\right)-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}_1)_{a_1}}\int\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{s}|}\frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{s})_{a_1}\partial(\mathbf{s})_{a_2}}\lim T^{(3)}_{a_0a_1a_2}\,d\mathbf{s}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}_1)_{a_0}}\int\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{s}|}\frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{s})_{a_0}\partial(\mathbf{s})_{a_2}}\lim T^{(3)}_{a_0a_1a_2}\,d\mathbf{s}\right) \tag{2.1}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{R_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\triangle_{\mathbf{r}_k}+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\nabla_{\mathbf{r}_k}\right)^2\right]\right\}T^{(n)}_{a_0a_1,\ldots,a_{n-1}}=$$
$$=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}_k)_{a_n}}\left(\lim_{M_n\to M_k}T^{(n+1)}_{a_0a_1,\ldots,a_n}-\lim_{M_n\to M_0}T^{(n+1)}_{a_0a_1,\ldots,a_n}\right)+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}_k)_{a_n}}\int\frac{1}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{s}|}\frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{s})_{a_k}\partial(\mathbf{s})_{a_n}}\lim_{M_n\to M_k}T^{(n+1)}_{a_0a_1,\ldots,a_n}\,d\mathbf{s}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}_k)_{a_0}}\int\frac{1}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{s}|}\frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{s})_{a_0}\partial(\mathbf{s})_{a_k}}\lim_{M_n\to M_0}T^{(n+1)}_{a_0a_1,\ldots,a_n}\,d\mathbf{s}\right) \tag{2.n}$$

Числа Рейнольдса $R_n$ в уравнениях (2.1) (2.n) различны и по физическому смыслу корреляции образуют убывающую последовательность.

Формулировка спектрального аналога бесконечной системы уравнений Фридмана-Келлера сопряжена с той трудностью, что преобразование Фурье в классическом смысле для корреляционных тензоров порядка выше третьего, не существует. Например, момент четвертого порядка при $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\to\infty$ и $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}_3$ конечных стремится к

$$\lim T^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)=T^{(3)}_{a_0a_1}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,T^{(2)}_{a_2a_3}(\mathbf{r}_3)\neq 0$$

Поэтому введем обобщенное преобразование Фурье [2], [Дополнение] от функции

$$\Phi\left[f(x)\right]=\frac{1}{2\pi}\int f(x)\,e^{-ikx}\,dx=\varphi(k) \tag{3}$$

В конечные выражения решений, обладающих физическим смыслом, будут входить лишь интегралы кратности $n-1$ по волновому пространству от обобщенных спектральных тензоров ранга $n$, которые будут регулярными функциями; промежуточные выкладки сводятся лишь к интегральным операциям; поэтому введение этих обобщенных функций корректно.

Покажем, что преобразование Фурье

$$\Phi\,(\lim_{M_n\to M_0} T^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}) = \int \tau^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_n \tag{4}$$

$$\Phi\,(\lim_{M_n\to M_m} T^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}) = \int \tau^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}\,\mathbf{k}_1,\ldots,\varkappa_m,\ldots,\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_n$$

$$\varkappa_m = -(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n) \tag{5}$$

Свойство (4) легко получить из обратного преобразования Фурье.

Преобразованием координат

$$\rho_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_m\,(m\neq i), \qquad \rho_i = -\mathbf{r}_m\,(m=i)$$

сводим (5) к (4). При этом сопряженные $\rho_i$ волновые числа $\varkappa_i$ преобразуются как

$$\varkappa_i = \mathbf{k}_i\,(i\neq m), \qquad \varkappa_i = \sum \mathbf{k}_l\,(i=m)$$

По известной формуле теории интеграла Фурье имеем

$$\Phi\left[\int_{-\infty}^{+\infty} v\,(x-y)\,w\,(y)\,dy\right] = 2\pi\,V\,(k)\,W\,(k), \qquad V\,(k)=\Phi\,(v), \qquad W\,(k)=\Phi\,(w) \tag{6}$$

Преобразование Фурье ядра Пуассона

$$\Phi\left[\frac{1}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{s}\,|}\right] = \frac{1}{k^2}$$

Учитывая свойства спектральных тензоров (4), (5) дадим спектральную формулировку уравнений Фридмана-Келлера для однородной турбулентности:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2}{R_2}\mathbf{k}_1^2\right\}\tau^{(2)}_{a_0a_1} &= -i\,(\mathbf{k}_1)_{a_2}\left[\int\tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\varkappa_1,\ \mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_2 - \right.\\ &\left.-\int\tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_2\right] + i2\pi^2\left\{(\mathbf{k}_1)_{a_1}\left[\frac{(\mathbf{k}_1)_{a_1}(\mathbf{k}_1)_{a_2}}{\mathbf{k}_1^2}\int\tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\varkappa_2,\ \mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_2\right]-\right.\\ &\left.-(\mathbf{k}_1)_{a_0}\left[\frac{(\mathbf{k}_1)_{a_0}(\mathbf{k}_1)_{a_2}}{\mathbf{k}_1^2}\int\tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_2\right]\right\}\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R_3}[\mathbf{k}_1^2+\mathbf{k}_2^2+(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)^2]\right\}\tau^{(3)}_{a_0a_1a_2} =\\ &= -i\sum_{m=1}^{2}(\mathbf{k}_m)_{a_3}\left[\int\tau^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3}(\mathbf{k}_1,\ \varkappa_m,\ \mathbf{k}_3)\,dk_3 - \int\tau^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3}(\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}_3\right]+\\ &+i2\pi^2\sum_{m=1}^{2}\left\{(\mathbf{k}_m)_{a_3}\left[\frac{(\mathbf{k}_m)_{a_m}(\mathbf{k}_m)_{a_3}}{\mathbf{k}_m^2}\int\tau^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3}(\mathbf{k}_1,\ \varkappa_m\ \mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}_3\right]-\right.\\ &\left.-(\mathbf{k}_m)_{a_0}\left[\frac{(\mathbf{k}_m)_{a_0}(\mathbf{k}_m)_{a_3}}{\mathbf{k}_m^2}\int\tau^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3}(\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}_3\right]\right\}\end{aligned} \tag{7.2}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R_n}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\mathbf{k}_m^2+\left(\sum_{m=1}^{n-1}\mathbf{k}_m\right)^2\right]\right\}\tau^{(n)}_{a_0a_1,\ldots,a_{n-1}} =\\ &= -i\sum_{m=1}^{n-1}(\mathbf{k}_m)_{a_n}\left[\int\tau^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\varkappa_m,\ldots,\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_n - \int\tau^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_n\right]+\\ &+i2\pi^2\sum_{m=1}^{n-1}\left\{(\mathbf{k}_m)_{a_n}\left[\frac{(\mathbf{k}_m)_{a_m}(\mathbf{k}_m)_{a_n}}{\mathbf{k}_m^2}\int\tau^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\varkappa_m,\ldots,\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_n\right]-\right.\\ &\left.-(\mathbf{k}_m)_{a_0}\left[\frac{(\mathbf{k}_m)_{a_0}(\mathbf{k}_m)_{a_n}}{\mathbf{k}_m^2}\int\tau^{(n+1)}_{a_0,\ldots,a_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_n\right]\right\}\end{aligned} \tag{7.n}$$

Спектральные тензоры — гладкие функции времени, так как бесконечных сил в турбулентном потоке не существует. Рассматривая уравнения (7.1), (7.2), ..., (7.n) как обыкновенные линейные с постоянными коэффициентами и правой частью, зависящей от времени, решим каждое из уравнений системы

$$\tau^{(2)}_{a_0a_1}(\mathbf{k}_1, t) = \tau^{(2)}_{a_0a_1}(\mathbf{k}_1, 0)\, \bar{e}^{P_2t} + \bar{e}^{P_2t}\int\limits_0^t e^{P_2\theta_2} X_2(\tau^{(3)})\, d\theta_2 \tag{8.1}$$

$$\tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) = \tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)\, \bar{e}^{P_3t} + e^{-P_3t}\int\limits_0^t e^{P_3\theta_3} X_3(\tau^{(4)})\, d\theta_3 \tag{8.2}$$

$$\tau^{(n)}_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}, t) =$$

$$= \tau^{(n)}_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}, 0)\, \bar{e}^{P_nt} + \bar{e}^{P_nt}\int\limits_0^t e^{P_n\theta_n} X_n(\tau^{(n+1)})\, d\theta_n,$$

$$P_n = \frac{1}{R_n}\left[\sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{k}_m^2 + \left(\sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{k}_m\right)^2\right] \tag{8.n}$$

Здесь $X_2(\tau^{(3)}), \ldots, X_n(\tau^{(n+1)})$ — правые части уравнений (7). Или, обозначая

$$e^{-P_nt}\int\limits_0^t e^{P_n\theta_n} X_n(\tau^{(n+1)})\, d\theta_n = L_n(\tau^{(n+1)}), \qquad \tau^{(n)}_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n, 0) = \tau^{(n)}_0$$

и исключая $\tau^{(n+1)}$ из $\tau^{(n)}_{a_0,\ldots,a_{n-1}}$, получим

$$\tau^{(2)}_{a_0a_1}(\mathbf{k}_1, t) = \tau^{(2)}_{a_0a_1}(\mathbf{k}_1, 0)\, e^{-P_2t} + L_2(\tau^{(3)}_0 e^{-P_3\theta_3}) + \ldots \tag{9.1}$$

$$\ldots + L_2L_3, \ldots, L_{m-1}(\tau^{(m)}_0 \bar{e}^{-P_m\theta_{m-1}}) + \ldots$$

$$\tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) = \tau^{(3)}_{a_0a_1a_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)\, e^{-P_3t} + L_3(\tau^{(4)}_0 e^{-P_4\theta_3}) + \ldots \tag{9.2}$$

$$\ldots + L_3L_4, \ldots, L_{m-1}(\tau^{(m)}_0 e^{-P_m\theta_{m-1}}) + \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\tau^{(n)}_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}, t) = \tau^{(n)}_{a_0,\ldots,a_{n-1}}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}, 0)\, e^{-P_nt} + \tag{9.n}$$

$$+ L_n(\tau^{(n+1)}_0 e^{-P_{n+1}\theta_n}) + \ldots + L_nL_{n+1}, \ldots, L_{m-1}(\tau^{(m)}_0 e^{-P_m\theta_{m-1}}) + \ldots$$

Выражения (9.1), (9.2), (9.n) определяют спектральные тензоры функции распределения турбулентного поля скоростей в момент времени $t > 0$ через спектральные тензоры начальной функции распределения. Полученное решение интересно в том отношении, что оно позволяет, провести исследования турбулентности для начальных условий принадлежащих к различным типам симметрии.

*Дополнение.* Пусть турбулентное поле скоростей обладает функцией распределения

$$f_{M_0, M_1,\ldots,M_{n-1}}[u_{a_0}(M_0), u_{a_1}(M_1), \ldots, u_{a_{n-1}}(M_{n-1})]$$

Тогда логарифм характеристической функции распределения

$$\psi_{M_0, M_1,\ldots,M_{n-1}}(\theta_{a_0}, \theta_{a_1}, \ldots, \theta_{a_{n-1}}) =$$

$$= \ln\left\{\int \exp\left(-i\sum_{k=0}^{n-1} u_{a_k}\theta_{a_k}\right) f_{a_0, a_1,\ldots, a_{n-1}}\, du_{a_0} du_{a_1}, \ldots, du_{a_{n-1}}\right\}$$

допускает разложение в ряд Тейлора по $\theta_{a_0}, \theta_{a_1}, \ldots, \theta_{a_{n-1}}$ с коэффициентами, называемыми семиинвариантами [3]

$$S^{(n)}_{a_0, a_1,\ldots,a_{n-1}} = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial\theta_{a_0}\partial\theta_{a_1}, \ldots, \partial\theta_{a_{n-1}}} \psi_{a_0, a_1,\ldots,a_{n-1}}\Bigg|_{\theta_{a_0} = \theta_{a_1} = \ldots \theta_{a_{n-1}} = 0}$$

Семиинварианты выражаются через корреляционные тензоры [3]

$$S^{(2)}_{a_0a_1} = T^{(2)}_{a_0a_1}, \qquad S^{(3)}_{a_0a_1a_2} = T^{(3)}_{a_0a_1a_2}$$

$$S^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3} = T^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3} - \left(T^{(2)}_{a_0a_1}T^{(2)}_{a_2a_3} + T^{(2)}_{a_0a_2}T^{(2)}_{a_1a_3} + T^{(2)}_{a_0a_3}T^{(2)}_{a_1a_2}\right)$$

$$S^{(5)}_{a_0a_1a_2a_3a_4} = T^{(5)}_{a_0a_1a_2a_3a_4} - \left(T^{(2)}_{a_0a_1}T^{(3)}_{a_2a_3a_4} + T^{(2)}_{a_0a_2}T^{(3)}_{a_1a_3a_4} + T^{(2)}_{a_0a_3}T^{(3)}_{a_1a_2a_4} + T^{(2)}_{a_0a_4}T^{(3)}_{a_1a_2a_3} + \right.$$

$$\left. + T^{(2)}_{a_1a_2}T^{(3)}_{a_0a_3a_4} + T^{(2)}_{a_1a_3}T^{(3)}_{a_0a_2a_4} + T^{(2)}_{a_1a_4}T^{(3)}_{a_0a_2a_3} + T^{(2)}_{a_2a_3}T^{(3)}_{a_0a_1a_4} + T^{(2)}_{a_2a_4}T^{(3)}_{a_0a_1a_3} + T^{(2)}_{a_3a_4}T^{(3)}_{a_0a_1a_2}\right)$$

При нормальном гауссовом распределении семиинварианты порядка выше третьего равны нулю.

Так как согласно экспериментальным данным, реальное распределение близко к гауссовому [1], семиинварианты порядка выше третьего — малые функции.

По [3] корреляционные тензоры могут быть представлены как

$$T^{(n)}_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1}} = S^{(n)}_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1}} + T^{(n)\,g}_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1}} \qquad \text{для } n > 3$$

где $T^{(n)\,g}_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1}}$ — корреляционные тензоры гауссова распределения.

Заметим, что при $\mathbf{r}_k \to \infty$ $T \to T^g$ и поэтому $S \to 0$ и допускает класссическое преобразование Фурье. Тогда преобразование Фурье корреляционных тензоров ранга выше третьего являются суммой двух преобразований Фурье: классического $\Phi(S)$ и обобщенного преобразования Фурье тензоров гауссова распределения $\Phi(T^g)$. Последнее весьма просто вводится с помощью $\delta(k)$ — функции Дирака с помощью следующих свойств преобразования Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int f(r_1 - r_2)\exp\left[-i(k_1r_1 + k_2r_2)\right]dr_1dr_2 = \varphi(k_1)\,\delta(k_1 + k_2) \tag{10}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int f_1(r_1)\,f_2(r_1 - r_2)\exp\left[-i(k_1r_1 + k_2r_2)\right]dr_1dr_2 = \varphi_1(k_1 + k_2)\,\varphi_2(k_2) \tag{11}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \exp(-ikr)\,dr = \delta(k), \qquad k\delta(k) = 0 \tag{12}$$

Спектральная функция четвертого ранга выражается как

$$\begin{aligned}\tau^{(4)}_{a_0a_1a_2a_3}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \tau^{(2)}_{a_0a_1}(\mathbf{k}_1)\,\tau^{(2)}_{a_2a_3}(\mathbf{k}_3)\,\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \\ &+ \tau^{(2)}_{a_0a_2}(\mathbf{k}_2)\,\tau^{(2)}_{a_1a_3}(\mathbf{k}_3)\,\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) + \tau^{(2)}_{a_0a_3}(\mathbf{k}_3)\,\tau^{(2)}_{a_1a_2}(\mathbf{k}_2)\,\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1)\end{aligned} \tag{13}$$

При помощи рекурентного соотношения [3]

$$\begin{aligned}T^{(n)\,g}_{a_0,\, \ldots,\, a_{n-1}} &= T^{(n-2)\,g}_{a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-3}}\, T^{(2)}_{a_{n-2}a_{n-1}} + \\ &+ T^{(n-2)\,g}_{a_0a_1,\, \ldots,\, a_{n-4}a_{n-2}}\, T^{(2)}_{a_{n-3}a_{n-1}} + \ldots + T^{(n-2)\,g}_{a_1a_2,\, \ldots,\, a_{n-2}}\, T^{(2)}_{a_0a_{n-1}}\end{aligned}$$

может быть выведен спектральный тензор любого ранга.

Проведенное рассмотрение обосновывает применение метода и позволяет получить явное выражение для начальных спектральных тензоров задающих гауссово распределение.

Заметим, что такой выбор начальных условий не накладывает существенных ограничений на общность исследования задачи, так как в полученном решении:

а) спектральные тензоры третьего порядка при $t > 0$ отличны от нуля;

б) решение учитывает диссипацию, которая действует преимущественно на мелкомасштабную турбулентность и приводит к отклонению от гауссова распределения с течением времени.

Поступила 17 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетчелор Дж. Теория однородной турбулентности. ИЛ, 1955.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции вып. 2. Физ. матгиз, 1958.
3. Обухов А. М. Статистическое описание непрерывных полей. Тр. Геофизическ. ин-та АН СССР, 1952, № 24 (151).