

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ В ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

В. Е. Неуважаев

(Челябинск)

В работах [1, 2] рассматривается задача о распространении взрывной волны в теплопроводном газе при сферической симметрии. В начальный момент $t = 0$ в покоящемся газе в точке $r = 0$ мгновенно выделяется конечная энергия E_0 . Задача будет автомодельной [3], если пренебречь начальным давлением p_0 и коэффициент теплопроводности принять равным $\kappa_1 T^{1/2}$ (где κ_1 — постоянная, T — температура). В вышеупомянутых работах строится решение с использованием условий Гюгонио на разрыве в предположении, что температура терпит разрыв.

Ниже показано, что допущение разрывности температуры делает задачу многозначной, тогда как при непрерывной температуре решение получается единственным. При этом существует константа A_* , разделяющая все решения задачи на два типа, и получены численные решения задачи для обоих случаев.

Заметим, что задача о взрыве в теплопроводном газе при цилиндрической симметрии в предположении непрерывной температуры на разрыве решена в работе [4].

1. Система уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах имеет вид

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + R \frac{\partial (\rho T)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho r^2 \left(\frac{u^2}{2} + \frac{RT}{\gamma - 1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \frac{RT}{\gamma - 1} \right) + R\rho T u - \kappa_1 T^{1/2} \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0$$

Здесь u — скорость, ρ — плотность, R — газовая постоянная, r — радиус, γ — показатель адиабаты Пуассона. Граничные условия в центре

$$u(0, t) = 0 \quad (1.2)$$

на фронте возмущения $r_0(t)$

$$u(r_0, t) = 0, \quad \rho(r_0, t) = \rho_0, \quad T(r_0, t) = 0 \quad (1.3)$$

на разрыве $r_1(t)$

$$\rho_1(u_1 - c) = \rho_2(u_2 - c), \quad \rho_1(u_1 - c)^2 + R\rho_1 T_1 = \rho_2(u_2 - c)^2 + R\rho_2 T_1 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_1(u_1 - c) \left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{RT_1}{\gamma - 1} \right) + R\rho_1 T_1 u_1 - \kappa_1 T_1^{1/2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_1 = \\ = \rho_2(u_2 - c) \left(\frac{u_2^2}{2} + \frac{RT_1}{\gamma - 1} \right) + R\rho_2 T_1 u_2 - \kappa_1 T_1^{1/2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_2 \end{aligned}$$

Здесь c — скорость разрыва, индекс 1 относится к величинам перед фронтом и индекс 2 — к величинам за фронтом разрыва. Кроме того, для искомых функций должно быть выполнено равенство

$$E_0 = 4\pi \int_0^{r_0} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{R\rho T}{\gamma - 1} \right) r^2 dr \quad (1.5)$$

Так как задача автомодельна, то имеем

$$\begin{aligned} r_0 = \left(\frac{\alpha E_0}{\rho_0} \right)^{1/2} t^{2/3}, \quad r_1 = \lambda_1 r_0, \quad c_0 = \frac{2}{5} \frac{r_0}{t}, \quad c = \lambda_1 c_0 \\ u = \frac{2c_0}{\gamma + 1} f(\lambda), \quad \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0 g(\lambda), \quad T = \frac{2c_0^2 (\gamma - 1)}{R(\gamma + 1)^2} \Theta(\lambda), \quad \lambda = \frac{r}{r_0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь λ , α — безразмерные постоянные, определяемые при решении задачи, — скорость распространения возмущения.

После подстановки (1.6) в уравнения (1.1) и (1.2) — (1.5) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(f - \frac{\gamma+1}{2} \lambda\right) f' - \frac{3(\gamma+1)}{4} f + \frac{\gamma-1}{2g} (g\Theta)' = 0, \quad \left(f - \frac{\gamma+1}{2} \lambda\right) g' + g \left(f' + \frac{2f}{\lambda}\right) = 0$$

$$A\Theta^{1/2}\Theta' - \frac{12(\gamma-1)}{\gamma+1} g\Theta f + 6g \left(\lambda - \frac{2}{\gamma+1} f\right) (f^2 + \Theta) = 0 \quad (1.7)$$

Безразмерная постоянная

$$A = \frac{6 \cdot 2^{1/2} (\gamma-1)^{13/6} (\gamma+1)^{-4/6} \kappa_1}{R^{7/6} (0.4\rho_0)^{2/3} (\alpha E_0)^{1/3}}$$

При выводе последнего уравнения в системе (1.7) был использован интеграл, найденный в работе [3]

$$r^2 \left[\left(\frac{2}{5} \frac{r}{t} - u \right) \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{R\rho T}{\gamma-1} \right) - R\rho T u + \kappa_1 T^{1/2} \frac{\partial T}{\partial r} \right] = C$$

Постоянная интегрирования выбрана из условия на фронте возмущения (1.3).

Граничные условия (1.2) — (1.4) и выражение (1.5) для безразмерных функций примут вид

$$f(1) = 0, \quad g(1) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \Theta(1) = 0 \quad (1.8)$$

$$f(0) = 0 \quad (1.9)$$

$$g_1 \left(\frac{2}{\gamma+1} f_1 - \lambda_1 \right) = g_2 \left(\frac{2}{\gamma+1} f_2 - \lambda_1 \right) \quad (1.10)$$

$$g_1 \left(\frac{2}{\gamma+1} f_1 - \lambda_1 \right)^2 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} g_1 \Theta_1 = g_2 \left(\frac{2}{\gamma+1} f_2 - \lambda_1 \right)^2 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} g_2 \Theta_1$$

$$6g_1 \left(\frac{2}{\gamma+1} f_1 - \lambda_1 \right) (f_1^2 + \Theta_1) + \frac{12(\gamma-1)}{\gamma+1} g_1 \Theta_1 f_1 - A\Theta_1^{1/2}\Theta_1' =$$

$$= 6g_2 \left(\frac{2}{\gamma+1} f_2 - \lambda_1 \right) (f_2^2 + \Theta_1) + \frac{12(\gamma-1)}{\gamma+1} g_2 \Theta_1 f_2 - A\Theta_1^{1/2}\Theta_2'$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{8\pi(0.4)^2}{(\gamma+1)(\gamma-1)} \int_0^1 g(f^2 + \Theta) \lambda^2 d\lambda \quad (1.11)$$

Задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7) с граничными условиями (1.8) и (1.9).

2. Численный счет показывает, что не существует непрерывного решения, удовлетворяющего условиям (1.8) и (1.9). Фронт возмущения определяется точкой

$$I(\lambda = 1, \quad \Theta = 0, \quad f = 0, \quad g = (\gamma-1)/(\gamma+1))$$

особой для системы (1.7).

В окрестности точки I существует приближенное представление решения, не зависящее от произвольных констант и имеющее вид

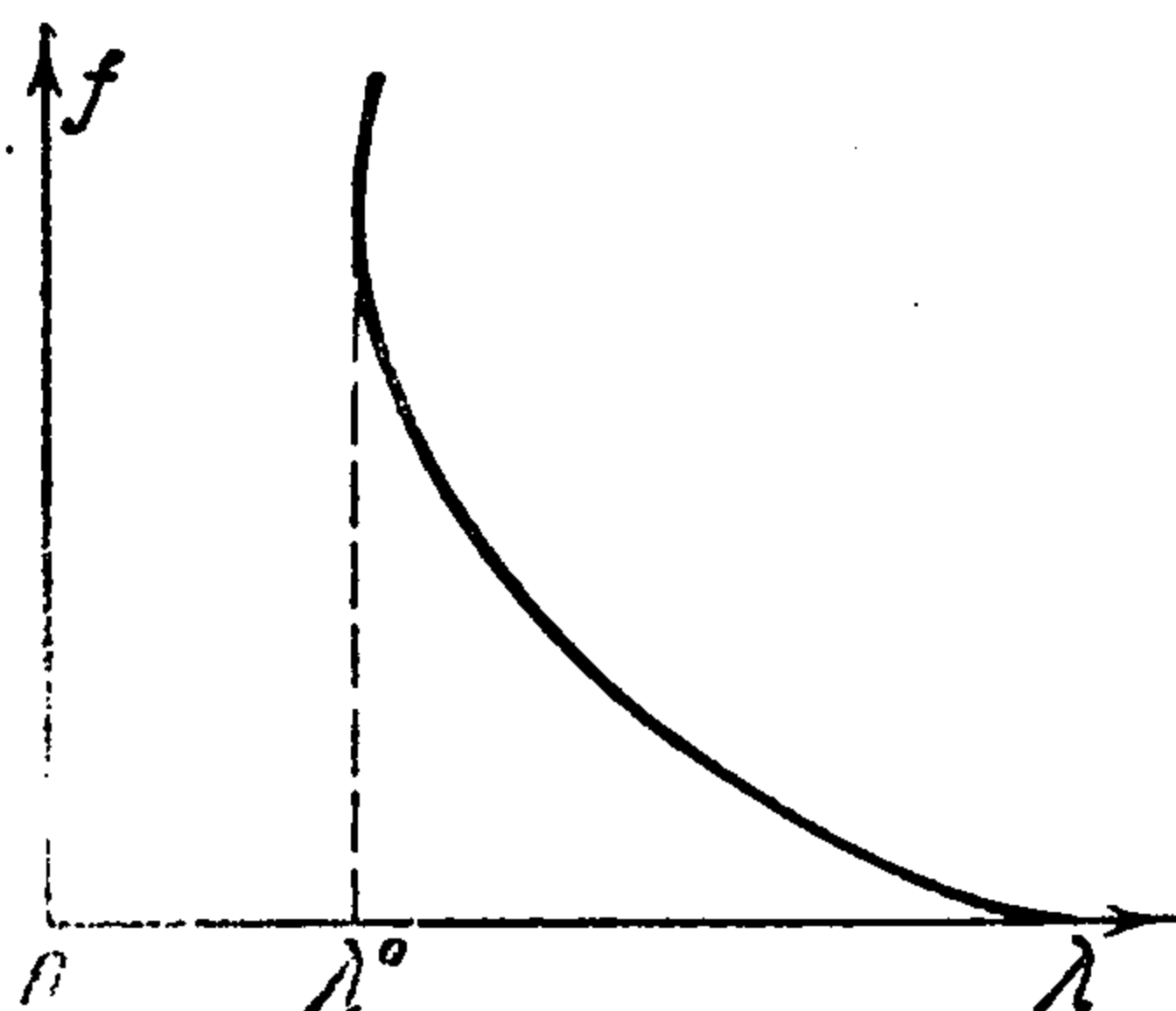
$$\Theta = \left[\frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)A} \right]^6 (1-\lambda^2)^6, \quad g = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \exp \int_{\lambda}^1 \frac{g(\lambda f' + 2f)}{(f - 1/2(\gamma+1)\lambda)} d\lambda$$

$$f = 12 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left[\frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)A} \right]^6 \lambda^{-3/2} \int_{\lambda}^1 (1-\lambda^2)^5 \lambda^{3/2} d\lambda \quad (2.1)$$

Воспользовавшись этим разложением, можно попытаться строить непрерывное решение. Но при численном интегрировании к центру встречается точка λ^0 , в которой $f'(\lambda^0) = \infty$ (фиг. 1). Поэтому непрерывное построение решения будет невозможным и в некоторой точке λ_1 следует предположить разрыв ($\lambda^0 < \lambda_1 < 1$).

Решения с постановкой разрыва можно искать двояким образом: считать температуру меняющейся непрерывно на скачке, либо допускающей разрыв. Послед-

ний подход делает решение задачи многозначным, так как наряду с произвольным параметром λ_1 появится еще один параметр: при разрывной температуре три условия Гюгонио будут связывать четыре неизвестные величины $\Theta_2, f_2, g_2, \Theta_2'$. Величины перед фронтом известны из численного интегрирования системы (1.7). Поэтому при каждом фиксированном λ_1 изменением второго параметра можно удовлетворить условию в центре $f(0) = 0$ и получить решение, удовлетворяющее поставленной задаче. В работе [1] решение найдено при $\lambda_1 = 1$. Однако, изменяя λ_1 , можно получить бесчисленное множество решений одной и той же задачи, которая по физическому смыслу имеет единственное решение.



Фиг. 1

Если температуру на скачке полагать непрерывной, то останется один произвольный параметр λ_1 , определяемый из условия в центре $f(0) = 0$. Решение в этом случае получается единственным. Ниже будет показано, что решения с разрывной температурой являются неустойчивыми и переходят в решения с непрерывной температурой.

Итак, температуру считаем непрерывной и примем условия Гюгонио в виде (1.10). Решение должно выходить из точки I и удовлетворять условию в центре, т. е. проходить через точку

$$II (\lambda = 0, f = 0, \Theta = \Theta_0, g = g_0)$$

где Θ_0 и g_0 — пока неопределенные постоянные. Центр является особой точкой системы (1.7), в окрестности центра справедливо разложение [1]

$$f = \frac{3}{5} \frac{(\gamma + 1) g_0}{A \Theta_0^{1/6}} \lambda^3, \quad \Theta = \Theta_0 - 3 \frac{g_0 \Theta_0^{5/6}}{A} \lambda^2, \quad g = g_0 + 3 \frac{g_0^2}{A \Theta_0^{1/6}} \lambda^2 \quad (2.2)$$

Для численного интегрирования систему (1.7) удобно представить в виде

$$\Theta' = \frac{12g}{(\gamma + 1) A \Theta^{1/6}} \left((\gamma - 1) \Theta f + \left[f - \frac{\gamma + 1}{2} \lambda \right] (f^2 + \Theta) \right) \quad (2.3)$$

$$f' = \left(\left[\frac{3(\gamma + 1)}{4} f - \frac{\gamma - 1}{2} \Theta \right] \left[f - \frac{\gamma + 1}{2} \lambda \right] + \frac{\gamma - 1}{\lambda} \Theta f \right) \left(\left[f - \frac{\gamma + 1}{2} \lambda \right]^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \Theta \right)^{-1}$$

$$g' = - \left(g \left[f' + 2 \frac{f}{\lambda} \right] \left(f - \frac{\gamma + 1}{2} \lambda \right)^{-1} \right)$$

Поведение интегральных кривых вблизи центра приближенно описывается следующим разложением, которое получается из системы (2.3), если в правых частях ее отбросить члены более высокого порядка малости

$$f = c \lambda^{-2} + \frac{3}{5} \frac{(\gamma + 1) g_0}{A \Theta_0^{1/6}} \lambda^3 + \dots, \quad \Theta = \Theta_0 + \dots, \quad g = g_0 + \dots \quad (2.4)$$

При численном интегрировании системы (2.3) в направлении от точки

$$III (\lambda_1, \Theta_1, f_2, g_2)$$

к точке II интегральные кривые расходятся настолько быстро, что практически из-за ошибок округления интегрировать в этом направлении становится невозможно. Чтобы сделать счет устойчивым, необходимо второе уравнение в системе (2.3) интегрировать в устойчивом направлении, от точки III к точке II, а остальные два уравнения — от точки III к точке II. В этом случае для решения двухточечной краевой задачи при $A \leq A_* > 0$ (значение A_* будет определено ниже) можно построить как и в работе [7], сходящийся итерационный процесс. Пусть фиксировано λ_1 , тогда из условий (1.10) через известные величины λ_1, Θ_1, f_1 и g_1 можно найти f_2 и g_2

$$f_2 = \frac{\gamma + 1}{2} \left[\lambda_1 - \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{\Theta_1}{\lambda_1 - 2f_1 / (\gamma + 1)} \right], \quad g_2 = \frac{(\gamma + 1)^2}{2(\gamma - 1) \Theta_1} \left(\lambda_1 - \frac{2}{\gamma + 1} f_1 \right)^2 g_1 \quad (2.5)$$

Выберем $\lambda = \lambda_0$, лежащее близко к нулю, чтобы с достаточной степенью точности можно было пользоваться разложением (2.2). Зададим на $[\lambda_0, \lambda_1]$ функцию f , после чего, зная при $\lambda = \lambda_1$, Θ_1 и g_2 , проинтегрируем первое и третье уравнения системы (2.3) и определим $\Theta(0)$ и $g(0)$. Выходя из $\lambda = \lambda_0$ по разложению (2.2) и решая второе уравнение системы (2.3), уточним f и т. д. Указанный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность. В результате получим при $\lambda = \lambda_1$ некоторое f_2^0 . Путем пристрелки λ_1 выбирается таким, чтобы имело место $f_2^0 = f_2$.

3. При $A > A_*$ численное решение задачи значительно усложняется. Между точками II и III появляются еще две особые точки, через которые проходит искомое решение. Для выявления характера возникающих особенностей рассмотрим систему (2.3) при $A = \infty$. Рассмотрим второе уравнение системы!

$$f' = \left(\frac{3(\gamma+1)}{4} f \left[f - \frac{\gamma+1}{2} \lambda \right] + \frac{(\gamma-1)}{\lambda} \Theta_2 f \right) \left(\left[f - \frac{\gamma+1}{2} \lambda \right]^2 - \frac{\gamma-1}{2} \Theta_2 \right)^{-1} \quad (3.1)$$

Подобное уравнение рассматривалось в работе [5]. Оно имеет при $\lambda \geq 0$ три особые точки:

седло

$$D(\lambda = 0, f = 0)$$

узел

$$B \left(\lambda = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{2} \Theta_2 \right)^{1/3}, f = 0 \right)$$

седло

$$C \left(\lambda = \frac{8}{3(\gamma+1)} \left(\frac{\gamma-1}{2} \Theta_2 \right)^{1/2}, f = \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma-1}{2} \Theta_2 \right) \right)$$

В общем случае, когда $A \neq \infty$, $A > A_*$, координаты особых точек и характер поведения интегральных кривых определяются в процессе решения каждой конкретной задачи.

Численное решение было проведено для $\gamma = 1.4$. Оказалось, что разделяющая константа A_* заключена в пределах $0.0833 < A_* < 0.1666$. При $A \leq A_*$ имеет место решение первого типа. Оно находится итерационным методом, изложенным в п. 2. Если $A > A_*$, то численное интегрирование ведется тем же итерационным способом, но усложняется определение функции f , так как второе уравнение системы (2.3) при найденных на каждой итерации Θ и g будет иметь между точками D_1 и (λ_1, f_2^0) еще две особые точки B_1 и C_1 . Для $A = 0.1666$ качественное поведение интегральных кривых совпадает с тем, которое получается при $A = \infty$, т. е. точка B_1 есть узел и C_1 — седло (фиг. 2). Численные расчеты показывают, что с увеличением A характер особых точек B_1 и C_1 не меняется, и уже при $A > 1$ можно считать $\Theta'(\lambda) = 0$ ($0 \leq \lambda \leq \lambda_1$) и пользоваться уравнением (3.1).

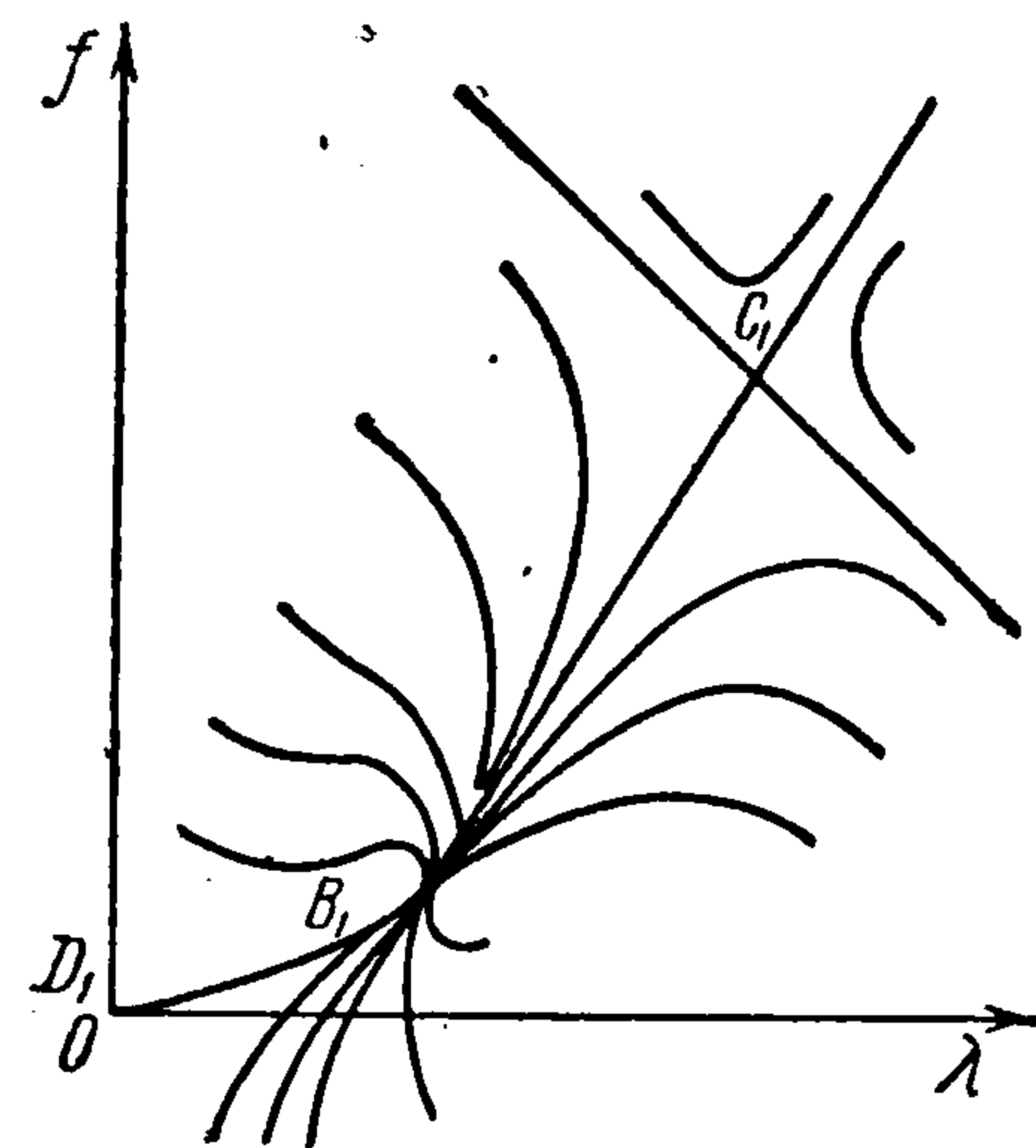
Интегрирование уравнения для f всегда нужно вести в устойчивом направлении, учитывая поведение интегральных кривых: от C_1 до B_1 , от C_1 до (λ_1, f_2^0) , от D_1 до B_1 и используя в точках B_1 и C_1 разложения для f

$$f = f_k + f'_k (\lambda - \lambda_k), \quad f'_k = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2 \left(f_k - \frac{\gamma+1}{2} \lambda_k \right), \quad b = \frac{7}{8} (\gamma+1) a + \frac{3}{4} (\gamma+1) f_k + \frac{\gamma-1}{\lambda_k} \Theta_k$$

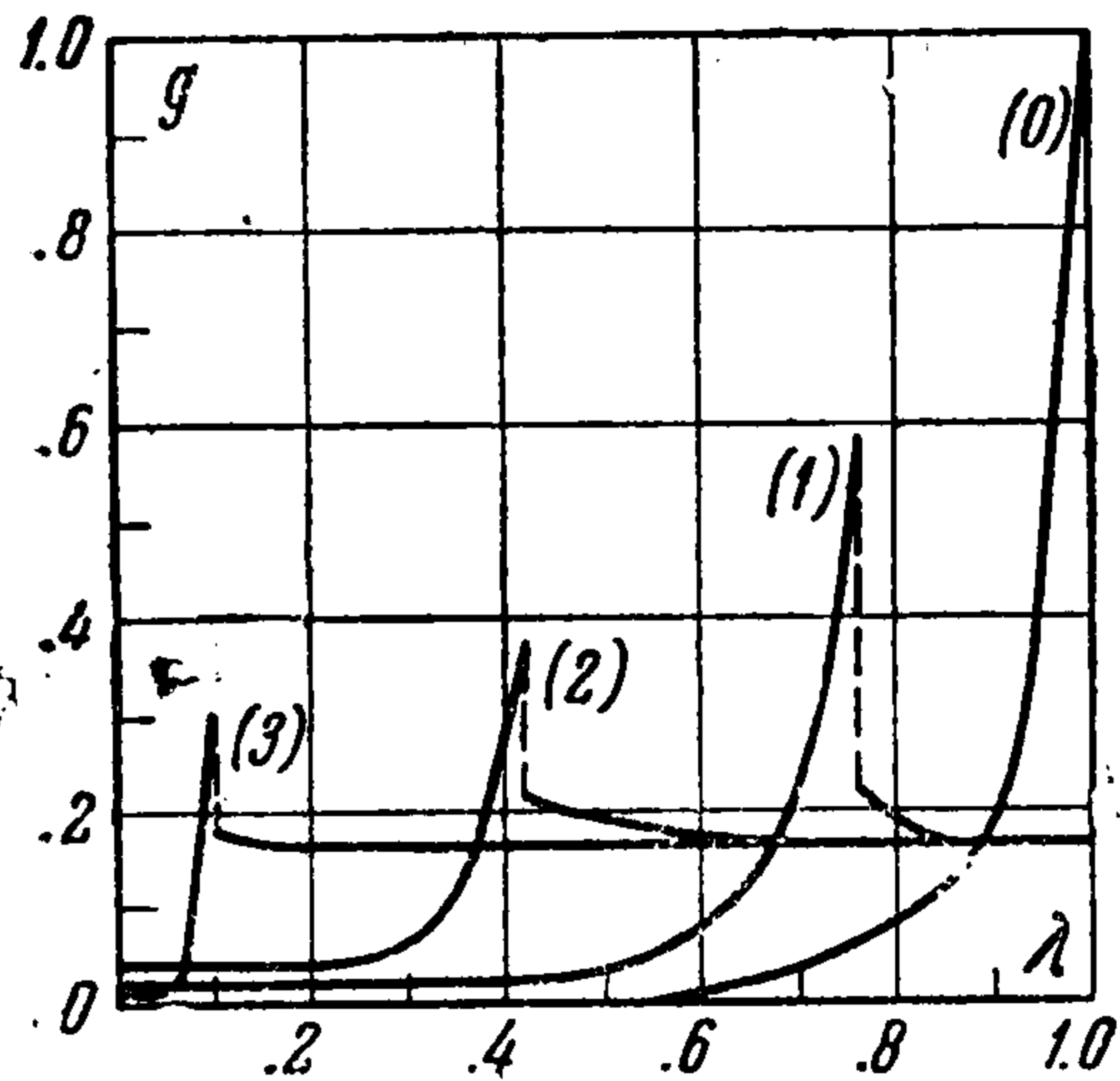
$$c = \frac{\gamma-1}{4} \Theta_k^2 a + \frac{\gamma+1}{2} \left[\frac{3(\gamma+1)}{4} f_k - \frac{\gamma-1}{2} \Theta_k \right] - (\gamma-1) \left(\Theta_k - \frac{\Theta_k}{\lambda_k} \right) \frac{f_k}{\lambda_k}$$

где λ_k, f_k, Θ_k относятся к соответствующей особой точке,



Фиг. 2

4. Таким образом, взрыв в теплопроводном газе с коэффициентом теплопроводности $\kappa = \kappa_1 T^{1/2}$ описывается автомодельным решением с непрерывной температурой. Плотность ρ и скорость u терпят разрыв, удовлетворяющий условиям Гюголио с непрерывной температурой. Возмущение в сферическом случае в отличие от цилиндрического, когда $\kappa = \kappa_1$, распространяется с конечной скоростью.



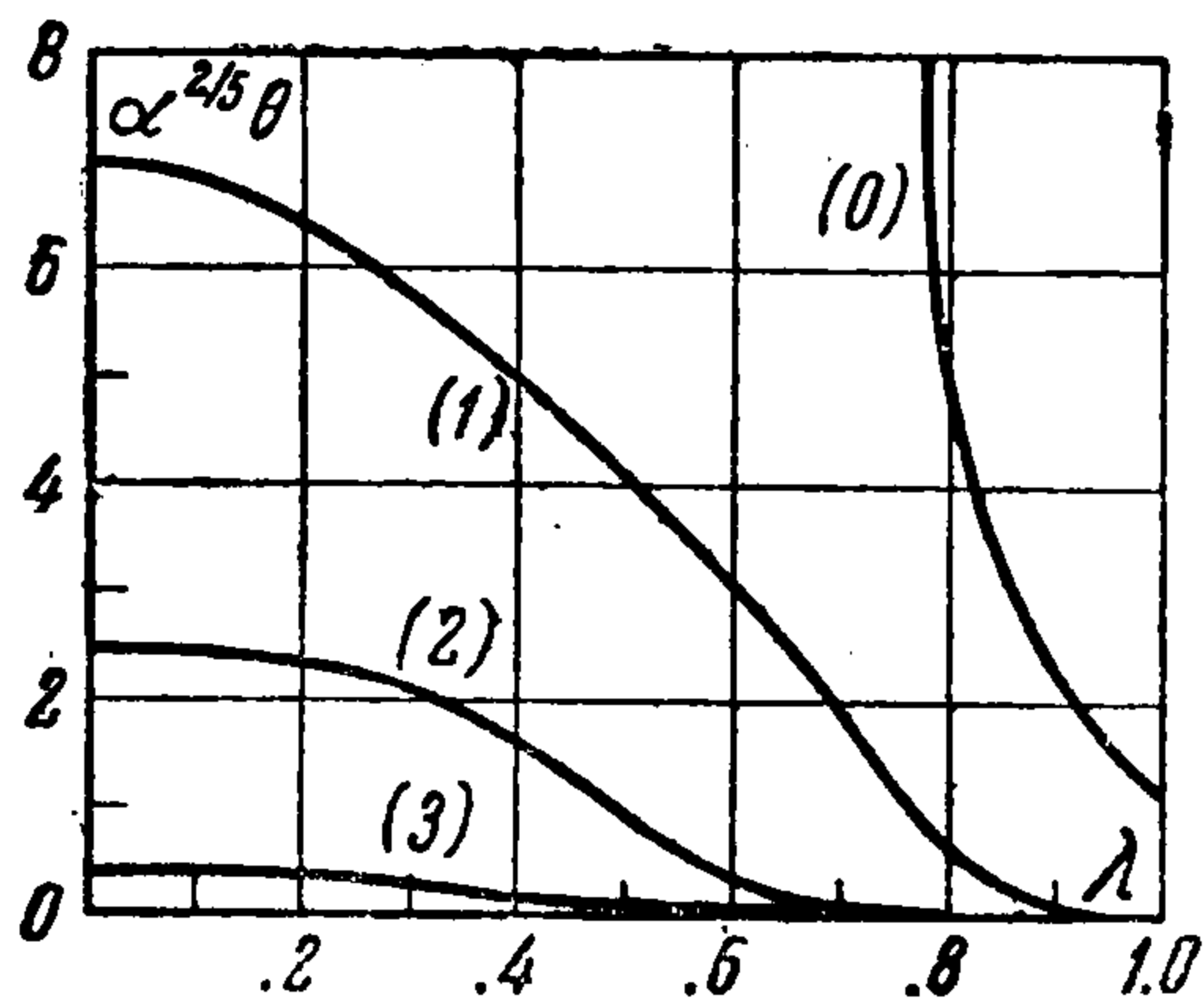
Фиг. 3

Задача при $\gamma = 1.4$ имеет решения двух типов: решение первого типа, когда между центром и разрывом нет особых точек и все величины изменяются гладко и решение второго типа, когда между центром и разрывом лежат особые точки и искомое решение проходит через них. В точке, лежащей ближе к центру, функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, терпят излом. Эта точка соответствует слабому разрыву. Через другую точку, являющуюся седлом, решение проходит гладким образом.

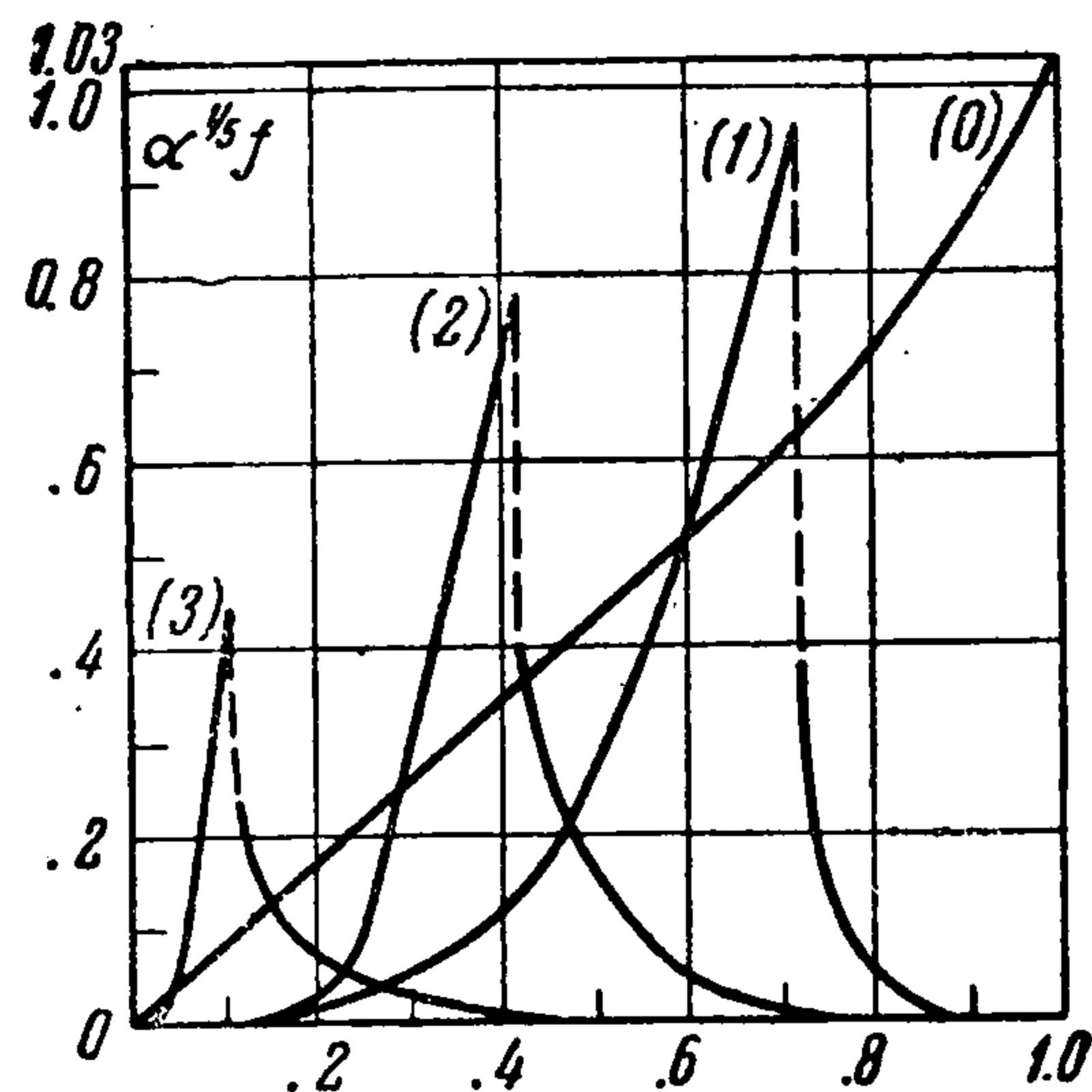
Тип решения определяется значением безразмерной константы A . Если $\gamma = 1.4$, то значение разделяющей константы A_* заключено в пределах $0.0833 < A_* < 0.1666$. При $A < A_*$ имеет место решение первого типа, при $A > A_*$ — решение второго типа. Численное интегрирование задачи было проведено для следующих значений: $A = (1) 0.0417, (2) 0.0833, (3) 0.1666, (4) 1.048$. На фиг. 3 — 5 изображены кривые для (0) — (3), значком (0) отмечено решение Л. И. Седова, соответствующее $A = 0$. Значения безразмерной величины α соответственно равны

$$(0) 0.117 \cdot 10, (1) 0.760 \cdot 10, (2) 0.789 \cdot 10^2, (3) 0.400 \cdot 10^4, (4) 0.240 \cdot 10^9$$

Если фиксировать начальные параметры γ, R, E_0, ρ_0 и менять только постоянную κ_1 , то соответственно будет изменяться и величина A , линейно зависящая от κ_1 . Пусть $\kappa_1 \rightarrow 0$, тогда и $A \rightarrow 0$. Это значит, что влияние теплопроводности исче-



Фиг. 4



Фиг. 5

зает и решение в пределе должно стремиться к известному решению Л. И. Седова задачи о взрыве в газе без учета теплопроводности [8]. Действительно, из приводимых графиков следует, что с уменьшением A величина λ_1 стремится к единице и решение с непрерывной температурой стремится к решению с разрывной температурой.

При больших A соответственно при больших κ влияние теплопроводности становится решающим, точка разрыва функций f и g приближается к $\lambda = 0$.

Полученное решение является устойчивым. Существующие разностные методы позволяют приближенно находить решения широкого класса задач, в том числе и неавтомодельных. Если мгновенное выделение конечной энергии E_0 происходит не в точке $r = 0$, а в некоторой сфере радиуса R_0 , то задача уже не будет автомодельной. Но решение ее при конечном R_0 с возрастанием времени стремится к найденному решению. Это утверждение было проверено разностным счетом на

быстродействующей вычислительной машине. Начальное распределение u , T , ρ при $0 \leq r \leq R_0$ задавалось произвольным с учетом, что $E = E_0$. В частности, в качестве начального профиля можно было выбрать любое решение с разрывной температурой, например, решение, полученное в работе [1]. В любом случае рассматриваемое движение выходит на полученный автомодельный режим. Решения с разрывной температурой являются неустойчивыми и переходят в решения с непрерывной температурой.

В заключение автор благодарит Яненко Н. Н. за полезные замечания.

Поступила 25 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. К о р о б е й н и к о в В. П. О распространении сильной сферической взрывной волны в теплопроводном газе. ДАН СССР, 1957, т. 113, вып. 1.
2. К о р о б е й н и к о в В. П. Исследование некоторых задач неустановившихся одномерных движений газа. Кандидатская диссертация. М., Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1956.
3. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М. К распространению сильных взрывных волн. Теоретическая гидромеханика под редакцией Л. И. Седова. Сборник, 1949, № 4, вып. 1.
4. Б е ж а е в И. О. О влиянии вязкости и теплопроводности газа на распространение сильного взрыва. Теоретическая гидромеханика под редакцией Л. И. Седова, Сборник, 1953, № 11, вып. 3.
5. К о р о б е й н и к о в В. П. Задача о сильном точечном взрыве при нулевом градиенте температуры. ДАН СССР, 1956, т. 109, вып. 2.
6. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
7. Н е у в а ж а е в В. Е. Истечение газа в вакуум при степенном законе энерговыделения. ДАН СССР, 1961, т. 141, вып. 5.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ФРИДМАНА-КЕЛЛЕРА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

М. М. П р у д н и к о в

(Москва)

Рассматривается задача типа Коши для уравнений Фридмана-Келлера в случае однородной турбулентности. При этом спектральные тензоры, являющиеся обобщенными преобразованиями Фурье корреляционных тензоров, в произвольный момент времени выражаются в виде суммы ряда многократных интегралов от спектральных тензоров начальной функции распределения.

Пусть $u_{a_k}(M_k)$ — турбулентная скорость в точке M_k ; обозначим корреляционный тензор скоростей

$$T_{a_0 a_1, \dots, a_{n-1}}^{(n)}(M_0, M_1, \dots, M_{n-1}) = \langle u_{a_0}(M_0) u_{a_1}(M_1), \dots, u_{a_{n-1}}(M_{n-1}) \rangle$$

спектральный тензор скоростей

$$\tau_{a_0 a_1, \dots, a_{n-1}}^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{3(n-1)}} \int T_{a_0 a_1, \dots, a_{n-1}}^{(n)} \exp(-i \mathbf{k}_m \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}$$

корреляционный тензор давление — скорость

$$P_{a_0 a_1, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}}^{(n)}(M_0, M_1, \dots, M_{n-1}) = \langle u_{a_0}(M_0), \dots, p(M_k), \dots, u_{a_{n-1}}(M_{n-1}) \rangle$$

Здесь по повторяющимся индексам ведется суммирование.

В статистической теории турбулентности для корреляционных тензоров, определяющих функцию распределения, известна система уравнений Фридмана-Келлера, выведенная из уравнений Навье — Стокса [1].