К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. Б. Баранов

(Москва)

В случае сильных магнитных полей тензор вязких напряжений и вектор потока тепла в магнитной гидродинамике зависят от магнитного поля.

Двухжидкостное рассмотрение полностью ионизованного газа было проведено в [1], где вычислены тензор вязких напряжений и вектор потока тепла для электронной и ионной компонент отдельно. При этом предполагалось, что температура T_1 электронного газа отлична от температуры T_2 ионного газа.

В работе [2], используя результаты [1], получены выражения для компонент тензора вязких напряжений и вектора потока тепла в одножидкостном приближении. При этом предполагалось, что

$$T_1 = T_2 = T \text{ и } \sqrt{m_1} \ll \sqrt{m_2} \quad (m_1 \text{ и } m_2 \text{— массы электрон и иона})$$

Однако в работе [2] содержится ряд неточностей, без исправления которых нельзя пользоваться уравнениями, полученными в этой работе. В частности, пришлось заново получить коэффициенты переноса в выражениях для компонент вектора потока тепла. При этом были исправлены опечатки, содержащиеся в работе [1], о наличии которых автору любезно сообщил С. И. Брагинский.

В выражении (3.18) для $\mathbf{q}_u$ работы [1] вместо знака минус перед фигурной скобкой должен стоять знак плюс. В формулах (4.14) вместо b'' следует читать $-b''$. В работе [2] при написании тензора вязких напряжений повторена ошибка в знаках некоторых членов, допущенная Чепменом и Каулингом [3] и исправленная в работе [4].

Пользуясь теми же обозначениями, что и в работе [2], запишем выражения для компонент тензора вязких напряжений в одножидкостном приближении (далее будем рассматривать только полностью ионизованный газ, состоящий из электронов и однократно заряженных ионов)

$$\begin{aligned}
\pi_{zz} &= -\eta e_{zz} \\
\pi_{xx} &= -\eta \left\{ b'_2 e_{xx} + \frac{1}{2}(b'_2 - 1)\, e_{zz} + 2\omega_2\tau_2 b''_2 e_{xy} \right\} \\
\pi_{yy} &= -\eta \left\{ b'_2 e_{yy} + \frac{1}{2}(b'_2 - 1)\, e_{zz} - 2\omega_2\tau_2 b''_2 e_{xy} \right\} \\
\pi_{xy} &= \pi_{yx} = -\eta \{ b'_2 e_{xy} - b''_2 \omega_2\tau_2 (e_{xx} - e_{yy}) \} \\
\pi_{xz} &= \pi_{zx} = -\eta \{ b'_1 e_{xz} + b''_1 \omega_2\tau_2 e_{yz} \} \\
\pi_{yz} &= \pi_{zy} = -\eta \{ b'_1 e_{yz} - b''_1 \omega_2\tau_2 e_{xz} \}
\end{aligned} \qquad (1)$$

Значения коэффициентов здесь те же, что и в работе [2]. При получении выражений для компонент вектора потока тепла использовалась формула из работы [2]

$$q_i = \sum_s q_{si} + \frac{5}{2}\sum_s n_s k T c_{si} + \sum_{s,\,k} \pi_{sik} c_{sk} + \frac{1}{2}\sum_s n_s m_s c_{si} c_s^2$$

$$\mathbf{c}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v} \qquad (s = 1, 2)$$

Так как $\mathbf{c}_s$ пропорциональна плотности тока, то, пренебрегая последним членом, как квардатичным по $\mathbf{j}$, пренебрегаем и третьим членом справа по сравнению со вторым. Это можно сделать для сплошной среды, когда характерные частоты Ω много меньше «частот соударений» заряженных частиц, если, воспользовавшись некоторыми оценками работы [5], положить, что $(\Omega / \omega_2)\tau_1 / t$ по порядку величины не превосходит единицы (t — характерное время задачи). Кроме того, предполагается, что $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_2$ (это верно при $m_1 v_1 \ll m_2 v_2$).

Воспользовавшись также исправленными результатами [1], для компонент вектора потока тепла в одножидкостном приближении можно получить, с точностью до первых степеней плотности тока.

$$q_z = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \iota j_z\right), \qquad \begin{aligned} q_x &= -\lambda\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x} - \omega_1\tau_1\varkappa'\frac{\partial T}{\partial y} + \iota' j_x - \omega_1\tau_1\iota'' j_y\right) \\ q_y &= -\lambda\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y} + \omega_1\tau_1\varkappa'\frac{\partial T}{\partial x} + \iota' j_y + \omega_1\tau_1\iota'' j_x\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\lambda = 1.58\,\frac{pk\tau_1}{m_1}, \qquad \varkappa = (1.47\omega_1^2\tau_1^2 + 3.77)\,\Delta_1 + \frac{\omega_2\tau_2}{\omega_1\tau_1}(0.633\,\omega_2^2\tau_2^2 + 0.837)\,\Delta_2$$

$$\omega_1 = \frac{eH}{m_1c} > 0, \qquad \varkappa' = (0.791\omega_1^2\tau_1^2 + 6.86)\,\Delta_1 - \left(\frac{\omega_2\tau_2}{\omega_1\tau_1}\right)^2(0.791\omega_2^2\tau_2^2 + 1.47)\,\Delta_2 \tag{3}$$

$$\iota = 2.03\,\frac{TH}{\omega_1\tau_1 pc}, \qquad \iota' = (1.58\omega_1^4\tau_1^4 + 26.6\omega_1^2\tau_1^2 + 7.66)\,\frac{TH\Delta_1}{\omega_1\tau_1 pc}$$

$$\iota'' = (0.949\omega_1^2\tau_1^2 + 1.93)\,\frac{TH\Delta_1}{\omega_1\tau_1 pc} \qquad (\,|\,e_1\,| = e)$$

$$\frac{1}{\Delta_1} = (\omega_1^4\tau_1^4 + 14.79\omega_1^2\tau_1^2 + 3.77), \qquad \frac{1}{\Delta_2} = (\omega_2^4\tau_2^4 + 2.70\omega_2^2\tau_2^2 + 0.677)$$

Следует заметить, что, кроме исправления некоторых знаков и значений коэффициентов, характер зависимости ι' от $\omega_1\tau_1$ здесь получился иной, чем в работе [2] и при больших значениях $\omega_1\tau_1$ совпадает с результатами в [4] с (точностью до коэффициентов). Напомним, что магнитное поле H направлено вдоль оси z.

Подставляя (1) и (2) в уравнение энергии

$$\rho c_v\frac{dT}{dt} = -p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \pi_{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta - \nabla\mathbf{q} + \mathbf{j}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)$$

окончательно получим

$$\begin{aligned}\rho c_v\frac{dT}{dt} &= -p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \mathbf{j}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) + \eta b_2'\left[2\sum_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 - (\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2\right] + \\ &+ \eta b_2'\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \eta b_1'\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{3}\eta\,(\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2 + \\ &+ \eta(b_2' - 1)\frac{\partial v_z}{\partial z}\left(2\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - 3\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \mathrm{div}\,(\lambda\varkappa\nabla T) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(1-\varkappa)\frac{\partial T}{\partial z} + \mathrm{div}\,(\lambda\iota'\mathbf{j}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\lambda(\iota - \iota')j_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\omega_1\tau_1\varkappa'\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\omega_1\tau_1\varkappa'\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\omega_1\tau_1\iota'' j_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\omega_1\tau_1\iota'' j_x)\end{aligned} \tag{4}$$

Если токи отсутствуют и магнитное поле $H = 0$, то уравнение (4) переходит в уравнение энергии обычной гидродинамики.

Дополнительные по сравнению с обычной теплопроводностью при $\mathbf{H} = \mathbf{j} = 0$ члены в (2) описывают известные в физике явления (см., например, [6]): члены с ι и ι' — эффект Томсона, с $\omega_1\tau_1\varkappa'$ — эффект Ледюка — Риги, с $\omega_1\tau_1\iota''$ — эффект Эттингсхаузена. Два последних эффекта связаны с наличием ларморовского вращения электронов в магнитном поле.

Поступила 13 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 2.
2. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Уравнения магнитной плазмодинамики. ЖТФ, 1960, т. XXX, вып. 9.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ, 1960.
4. Marshall W. The kinetic theory of an ionized gas. III Atomic Energy Res. Estable, 1960, N T/R, 2419.
5. Баранов В. Б., Любимов Г. А. О форме обобщенного закона Ома в полностью ионизованном газе. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.