**Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1962**
**Отделение технических наук Академии наук Союза ССР**

# СВОЙСТВА ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

**Ю. П. Ладиков**
(Орск)

Изучаются стационарные плоские и осесимметричные течения бесконечно проводящего газа. Условия $\operatorname{div}\rho v = 0$, $\operatorname{div} H = 0$ позволяют в этом случае ввести функцию тока $\varphi(x, y)$ и магнитно-силовую функцию $\chi(x, y)$. Уравнения движения газа преобразуются к переменным $\psi$, $\chi$. Полученные уравнения при некоторых добавочных предположениях имеют интегралы, один из которых аналогичен интегралу Бернулли, второй аналога в обычной газодинамике не имеет. В случае ортогональности магнитного поля и поля скоростей решение задачи сводится к линейному уравнению в частных производных второго порядка. Рассматриваются некоторые частные решения.

**§ 1. Плоские течения.** Рассмотрим стационарное плоское течение идеального бесконечно проводящего газа. Будем считать, что скорость $v$ и магнитная напряженность $H$ имеют только две компоненты $v_x$, $v_y$, $H_x$, $H_y$, причем все характеристики течения не зависят от координаты $z$.

При этих предложениях уравнение индукции может быть проинтегрировано

$$v_x H_y - v_y H_x = a = \text{const} \neq 0 \tag{1.1}$$

Условия $\operatorname{div}\rho v = 0$, $\operatorname{div} H = 0$ позволяют определить две функции $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$ при помощи равенств

$$\rho v_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad \rho v_y = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad H_x = -\frac{\partial\chi}{\partial y}, \qquad H_y = \frac{\partial\chi}{\partial x} \tag{1.2}$$

При этом условие (1.1) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x} = D\left(\frac{\Psi,\ \chi}{x,\ y}\right) = a\rho \tag{1.3}$$

Уравнения сохранения количества движения при сделанных предположениях имеют вид

$$\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \rho v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{1}{4\pi}Hy\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.4}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho v_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{1}{4\pi}H_x\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.5}$$

Преобразуем эту систему к новым независимым переменным $\psi$, $\chi$. Для этого спроектируем уравнения (1.4) на направление линии тока и направление магнитной силовой линии. Получим

$$v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y} + \rho v_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{v^2}{2} + \rho v_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{v^2}{2} + \frac{1}{4\pi}a\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.6}$$

$$H_x\frac{\partial p}{\partial x} + H_y\frac{\partial p}{\partial y} + \rho H_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{v^2}{2} + \rho H_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{v^2}{2} + a\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Используя свойства якобианов, будем иметь

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \begin{vmatrix} \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = D\begin{pmatrix}\psi, y \\ x, y\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}\psi, y \\ \psi, \chi\end{pmatrix} D\begin{pmatrix}\Psi, \chi \\ x, y\end{pmatrix} = a\rho \frac{\partial y}{\partial \chi} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\begin{vmatrix} \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -D\begin{pmatrix}\psi, x \\ x, y\end{pmatrix} = -D\begin{pmatrix}\psi, x \\ \psi, \chi\end{pmatrix} D\begin{pmatrix}\psi, \chi \\ x, y\end{pmatrix} = a\rho \frac{\partial x}{\partial \chi} \tag{1.9}$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -a\frac{\partial y}{\partial \chi}, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -a\rho\frac{\partial x}{\partial \Psi} \tag{1.10}$$

Из (1.2) и (1.8) — (1.10) следует:

$$v_x = a\frac{\partial x}{\partial \chi}, \qquad v_y = -a\rho\frac{\partial y}{\partial \Psi}, \qquad H_x = -a\rho\frac{\partial x}{\partial \Psi}, \qquad H_y = -a\rho\frac{\partial y}{\partial \Psi} \tag{1.11}$$

Выражения вида

$$v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} H_x\frac{\partial f}{\partial x} + H_y\frac{\partial f}{\partial y}$$

где $f(x, y)$ — произвольная функция, могут быть преобразованы следующим образом:

$$v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} = a\frac{\partial f}{\partial \chi}; \qquad H_x\frac{\partial f}{\partial x} + H_y\frac{\partial f}{\partial y} = -a\rho\frac{\partial f}{\partial \Psi} \tag{1.12}$$

Выражения для вихря скорости и магнитной напряженности при использовании условий (1.11) в новых координатах $\psi$, $\chi$ вид

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \rho\frac{\partial v^2}{\partial \Psi} + \rho\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\mathbf{v}, \mathbf{H}}{\rho}\right) \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \rho\left[\frac{\partial}{\partial \Psi}(\mathbf{v}, \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial \chi}\frac{H^2}{\rho}\right] \tag{1.14}$$

Суммируя полученные результаты, будем иметь систему уравнений:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \chi}\frac{v^2}{2} + \frac{\partial}{\partial \chi}\frac{H^2}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \Psi}(\mathbf{v}, \mathbf{H}) = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial \Psi}\frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \chi}\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{H})}{\rho} = 0 \tag{1.16}$$

$$v_x H_y - v_y H_x = 0, \qquad v_x = a\frac{\partial x}{\partial \chi}, \qquad v_y = a\frac{\partial y}{\partial \chi}, \qquad H_x = a\rho\frac{\partial y}{\partial \Psi}$$

$$H_y = -a\rho\frac{\partial y}{\partial \Psi} \tag{1.17}$$

Легко видеть, что в случае, когда скалярное произведение вектора скорости на магнитную напряженность не зависит от $\Psi$ и газ изэнтропичен, уравнение (1.15) интегрируется

$$P + \frac{H^2}{4\pi\rho} + \frac{v^2}{2} = f_1(\psi) \qquad \left(P = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{u^2}{\gamma - 1}, \ \gamma = \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{1.18}$$

Здесь $u$ — скорость звука, полученный интеграл аналогичен интегралу Бернулли в обычной газодинамике.

Если величина $(\mathbf{v}, \mathbf{H})/\rho$ не зависит от $\chi$ и газ изэнтропичен, уравнение (1.16) может быть также проинтегрировано

$$P - \frac{v^2}{2} = f_2(\chi) \tag{1.19}$$

Этому интегралу нет аналога в обычной газодинамике. Перепишем его следующим образом:

$$\frac{u^2}{\gamma-1}=\frac{v^2}{2}+\frac{u_0{}^2}{\gamma-1}$$

Здесь $u_0$ — скорость звука в той точке на выбранной магнитной силовой линии, в которой скорость равна нулю. Таким образом, уравнение (1.19) показывает, что вдоль магнитной силовой линии гидродинамическое давление и скорость звука возрастает с возрастанием скорости. В случае, если магнитное поле и скорость ортогональны и газ изэнтропичен, оба интеграла имеют место одновременно

$$\frac{u^2}{\gamma-1}+\frac{H^2}{4\pi\rho}+\frac{v^2}{2}=f_1(\psi),\qquad \frac{u^2}{\gamma-1}-\frac{v^2}{2}=f_2(\chi)$$

Условие (1.1) при этом переходит в $vH=a$ при помощи интегралов (1.1), (1.18), (1.19) величины $p$, $\rho$, $v$, $H$ — могут быть выражены через функции $f_1(\psi)$, $f_2(\chi)$, которые можно предполагать известными.

**§ 2. Плоские стационарные течения газа в ортогональном магнитном поле.** Исследуем более подробно течения, в которых магнитное поле ортогонально полю скоростей. Как уже выяснилось, в предыдущем параграфе, здесь будут иметь место интегралы (1.18), (1.19). К этим соотношениям необходимо добавить условие ортогональности и условие (1.1)

$$v_xH_x+v_yH_y=0,\qquad v_xH_y-v_yH_x=a \tag{2.1}$$

Отсюда

$$v_x=\frac{aH_y}{H^2},\qquad v_y=-\frac{aH_x}{H^2} \tag{2.2}$$

Учитывая (1.2), получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=-\frac{a\rho}{H^2}\frac{\partial\chi}{\partial x},\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{a\rho}{H^2}\frac{\partial\chi}{\partial y} \tag{2.3}$$

или из (1.1)

$$\frac{\partial x}{\partial\chi}=-\frac{a\rho}{H^2}\frac{\partial y}{\partial\Psi},\qquad \frac{\partial x}{\partial\Psi}=\frac{H^2}{a\rho}\frac{\partial y}{\partial\chi} \tag{2.4}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{a\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H^2}{a\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)=0 \tag{2.5}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{H^2}{a\rho}\frac{\partial y}{\partial\chi}\right)+\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\frac{a\rho}{H^2}\frac{\partial y}{\partial\Psi}\right)=0 \tag{2.6}$$

Величина $\zeta=a\rho\,/\,H^2$ может быть найдена из интегралов (1.18)—(1.19) и поэтому можно ее считать известной функцией величин $\psi$, $\chi$, $\zeta=\zeta(\psi,\chi)$.

В общем случае уравнения (2.5) и (2.6) сложны и здесь можно ограничиться случаем, когда одна из функций $f_1(\psi)$ или $f_2(\chi)$ будет постоянной, тогда $\zeta$ будет функцией только одной переменной. Рассмотрим случай $f_1(\psi)=\text{const}$; величины $p$, $\rho$, $H$, $v$ будут зависеть только от переменной $\chi$, следовательно, будут постоянными на каждой магнитной силовой линии. При этом $\zeta=\zeta(\chi)$ и уравнения (2.3) перепишутся так:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial x},\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}\qquad \left(F(x,y)=\int\limits_{\chi_0}^{\chi}\zeta d\chi\right) \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что функция $W(z) = \psi(x, y) + iF(x, y)$ будет аналитической. Однако не каждая гармоническая функция является решением поставленной задачи. Условия (1.18) — (1.19) требуют, чтобы четыре из пяти величин $p$, $H$, $v$, $\rho$, $\chi$ были функциями пятой, поэтому

$$\operatorname{grad}^2 \psi = \Phi(\chi) \quad \text{или} \quad D\begin{pmatrix} F, & \operatorname{grad}^2 \psi \\ x, & y \end{pmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

Используя (2.7) уравнение (2.8) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y} \Big/ \frac{\partial\psi}{\partial x}\right] + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial\psi}{\partial y}\right] = 0$$

Полагая $(\partial\psi / \partial x) : (\partial\psi / \partial y) = -\rho v_y / \rho v_x = -\operatorname{tg}\theta = -z$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{2.9}$$

Общий интеграл уравнений (2.9) имеет вид

$$\Omega(xz - y, z) = 0 \tag{2.10}$$

где $\Omega$ — произвольная функция двух переменных. Таким образом, решениями поставленной задачи могут быть только такие гармонические функции тока $\psi(x, y)$, для которых тангенс угла наклона скорости удовлетворяет уравнению (2.9) или (2.10). Рассмотрим случай, когда все величины $\rho$, $p$, $H$, $v$ зависят только от $\Psi$; это имеет место при $f_2(\chi) = \text{const}$. Рассуждая аналогично предыдущему, можно доказать, что решение сводится к отысканию такой гармонической функции $\chi(x,y)$, для которой тангенс наклона магнитной напряженности удовлетворяет уравнению (2.9).

**§ 3. Радиальные течения проводящего газа в ортогональном магнитном поле.** В простейшем случае выражение (2.10) может быть в виде

$$xz - y = 0 \quad \text{или} \quad z = \operatorname{tg}\theta = y / x \tag{3.1}$$

Отсюда $\theta = \varphi$, где $\varphi$ — полярный угол и, следовательно, линиями тока являются лучи, исходящие из начала координат. Магнитно-силовыми линиями являются окружности $r = \text{const}$. Величины $v$, $H$, $\rho$, $p$, $\chi$ являются функциями $r$. Полагая

$$W = \Psi + iF = iALn(x + iy)$$

получим

$$\Psi = -A \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad F = A \ln r \tag{3.2}$$

Отсюда (3.3)

$$\rho v_x = \frac{Ax}{x^2 + y^2}, \quad \rho v_y = \frac{Ay}{x^2 + y^2}, \quad \rho v = \frac{A}{r}, \quad H = \frac{a\rho r}{A}\; H_x = \frac{a\rho y}{A}, \quad H_y = -\frac{a\rho x}{A}$$

Подставляя найденные выражения величин в условие (1.18), получим уравнение, которое определяет плотность $\rho$ как функцию радиуса $r$ (уравнение (1.19) для определения функции $f_2(\chi)$)

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} c\rho^{\gamma - 1} + \frac{A^2}{2}\frac{1}{\rho^2 r^2} + \frac{a^2 r^2 \rho}{4\pi A^2} = \text{const} \tag{3.4}$$

Из (3.3) следует, что

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{a}{A}\left(2\rho + r\frac{d\rho}{dr}\right)$$

Рассматриваемое течение будет безвихревым, но в газе будет электрический ток, отличный от нуля. Это решение было получено другими методами в работах [1,2]. Как легко показать, здесь существуют две предельные окружности $r = R_1$, $r = R_2$, за которые решение не может быть продолжено и на которых скорость течения быстро достигает магнитно-звуковой скорости. В промежутке $R_1 < r < R_2$ существуют два режима течения домагнитозвуковой и сверхмагнитозвуковой.

**§ 4. Плоское вихревое течение.** Положим

$$\chi = -A \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad f_2(\chi) = \text{const}$$

Тогда (4.1)

$$H = \frac{Ax}{x^2+y^2}, \quad H_y = \frac{Ay}{x^2+y^2}, \quad H = \frac{A}{r}, \quad v = \frac{ar}{A}, \quad v_x = \frac{ay}{A}, \quad v_y = -\frac{ax}{A}$$

Газ вращается, как твердое тело в радиальном магнитном поле. Для определения плотности служит уравнение (1.19)

$$\frac{\gamma c}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{a^2}{A^2}r^2 = \frac{u_0^2}{\gamma-1} \tag{4.2}$$

Давление определяется из условия адиабатичности; решение справедливо на всей плоскости, кроме начала координат.

**§ 5. Стационарные осесимметричные течения бесконечно проводящего газа.** Будем предполагать, что азимутальные компоненты магнитной напряженности и скорости течения равны нулю и все характеристики течения не зависят в цилиндрической системе координат от угла $\varphi$. В этом случае можно ввести функцию тока $\psi$ и магнитную силовую функцию $\chi$:

$$\rho v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \rho v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad H_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \qquad H_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} \tag{5.1}$$

Уравнение индукции здесь, как и в плоском случае, интегрируется

$$r(H_r v_z - v_r H_z) = a = \text{const} \tag{5.2}$$

Уравнение движения газа здесь, как и в плоском случае, можно преобразовать к переменным $\psi$, $\chi$. Рассуждая аналогично § 1, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\chi} + \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\psi}(vH) + \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{H^2}{4\pi\rho}\right) = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{vH}{\rho}\right) = 0, \qquad r(H_r v_z - H_z v_r) = a = \text{const}$$

$$v_z = a\frac{\partial z}{\partial\chi}, \qquad v_r = a\frac{\partial r}{\partial\chi}, \qquad H_z = -a\rho\frac{\partial z}{\partial\psi}, \qquad H_r = -a\rho\frac{\partial r}{\partial\psi}$$

В отличие от плоского случая интеграл (5.2), содержит в левой части множитель $r$. Два первых уравнения (5.3) при соответствующих предположениях о характере функций ($\mathbf{v}\mathbf{H}$) и $\mathbf{v}\mathbf{H} / \rho$ и баратропной зависимости давления от плотности можно проинтегрировать и аналогично выше получить частные решения.

Поступила 25 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Цилиндрические и плоские магнитногидродинамические волны. ЖЭТФ, 1959, т. 36, вып. 56.
2. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. Некоторые решения уравнений одномерной магнитной гидродинамики и их приложения к задачам о распространении ударных волн. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.