

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ
 В СРЕДЕ С АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ
 ПРИ МАЛЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Г. А. Любимов
 (Москва)

Дается постановка задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое в анизотропно проводящей несжимаемой среде. При этом существенно используются соображения, изложенные в работе [1]. Рассматривается пограничный слой на пластине, представляющей собой диэлектрик, при малых значениях параметра

$$mL = \frac{\sigma H^2 L}{\rho c^2 U (1 + \omega^2 \tau^2)}$$

Магнитное поле считается однородным и перпендикулярным к пластине. В отличие от пограничного слоя в среде с изотропной проводимостью [2] течение в пограничном слое в среде с анизотропной проводимостью не является плоским, поэтому соответствующая автомодельная задача сводится не к одному, а к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям.

§ 1. Будем рассматривать задачу о пограничном слое в несжимаемой жидкости, обладающей анизотропной проводимостью. Пусть магнитное число Рейнольдса мало

$$R_m = \frac{4\pi\sigma UL}{c^2} \ll 1$$

В этом случае индуцированные токи¹ малы и можно считать, что магнитное поле \mathbf{H} образуется за счет токов, текущих вне жидкости (например, в обтекаемом теле). Следовательно, в рассматриваемом случае магнитное поле в области течения удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, а токи определяются из обобщенного закона Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) - \alpha (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \quad \left(\alpha = \frac{\omega\sigma}{H} \right) \quad (1.1)$$

Пусть условия задачи таковы, что электроны обладают спиральным пробегом ($\omega_e \tau_e \equiv \omega \tau \gg 1$), а ионы его не имеют ($\omega_i \tau_i \ll 1$).

В этих условиях (градиентом электронного давления пренебрегаем) закон Ома³ имеет вид (1.1) и коэффициент вязкости жидкости имеет то же значение, какое он имеет для данной жидкости в отсутствие магнитного поля⁴. Для упрощения формул коэффициент вязкости ν , проводимость σ и параметр α будем считать постоянными. Из (1.1) имеем

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \alpha \left[\mathbf{H} \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} H^2 - \frac{1}{c} \mathbf{H} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}) \right] + \alpha^2 \mathbf{H} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) \right\} \quad (1.2)$$

Применив к уравнению (1.2) операцию div и воспользовавшись уравнениями Максвелла и условием $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, получим следующее соотношение, определяющее плотность объемного заряда в области течения

$$4\pi\rho_e = - \left\{ \frac{1}{c} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{2\alpha}{c} \mathbf{v} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} - \frac{\alpha}{c} [(\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H} + \alpha^2 \mathbf{H} [(\mathbf{E} \nabla) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{E}] \right\} \quad (1.3)$$

Максимальное электрическое поле, которое может возникнуть за счет разделения зарядов в области течения по порядку величины, равно полю, при котором $\mathbf{j} = 0$, т. е. в силу (1.1) можно принять $E_m \approx UH / c$.

Будем считать, что внешние электрические поля (созданные источниками, расположенными вне области течения) отсутствуют, или, по крайней мере, не превосходят по порядку величины полей, создаваемых распределением заряда (1.3) в области течения ($E \lesssim UH / c$).

Если за счет внешних по отношению к потоку источников ρ_{e+} создаются сильные электрические поля (например, при обтекании электродов, к которым приложена большая разность потенциалов), то эти поля либо экранируются поверхностным зарядом (если внешние условия таковы, что нет подвода тока к жидкости извне), либо вызывают токи в жидкости, замыкающиеся через внешнюю цепь. Токи, которые протекут в жидкости за счет внешних полей, могут сильно менять магнитное поле в жидкости несмотря на то, что $R_m \ll 1$, и оказывать существенное силовое воздействие на поток.

В последнем случае в силу линейности уравнений электродинамики можно сначала вычислить токи в жидкости за счет внешних источников, считая жидкость покоящейся. Эти токи нужно учесть при вычислении магнитного поля. После этого нужно решить задачу о движении жидкости и распределении токов и полей вне области течения, индуцируемых движением жидкости.

При решении гидродинамической задачи электромагнитную силу надо представить в виде двух частей, одна из которых связана с внешними токами и токами, текущими в жидкости за счет внешних электрических полей (эта часть известна при решении гидродинамической задачи) и части, связанной с индуцированными токами.

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \rho_{e+} \mathbf{E}_+ + \rho_e \mathbf{E}_+ + \rho_{e+} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j}_+ \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \\ 4\pi \rho_{e+} &\equiv -\alpha^2 \mathbf{H} [(\mathbf{E}_+ \nabla) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{E}_+] \\ \mathbf{j}_+ &= \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \{ \mathbf{E}_+ + \alpha (\mathbf{H} \times \mathbf{E}_+) + \alpha^2 \mathbf{H} (\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{H}) \} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{E}_+ и \mathbf{H} определяются из уравнений Максвелла по заданным внешним источникам, \mathbf{E} — неизвестная функция, которая определяется из решения магнитогидродинамической задачи, ρ_e и \mathbf{j} зависят только от индуцированной части электрического поля \mathbf{E} и определяются через \mathbf{E} , \mathbf{H} , в соотношениями (1.3), (1.2).

Так как $E \lesssim UH / c$, то, сравнивая в (1.4) члены $\rho_e \mathbf{E}_+$ и $\rho_{e+} \mathbf{E}$ с $(\mathbf{j}_+ \times \mathbf{H}) / c$, легко установить, что

$$|\rho_{e+} \mathbf{E}| \sim |\rho_e \mathbf{E}_+| \ll \frac{1}{c} |\mathbf{j}_+ \times \mathbf{H}| \quad (1.5)$$

если

$$\frac{U}{\sigma L} \max \{ 1 + \omega \tau, \omega^2 \tau^2 (1 + \omega^2 \tau^2) \} \ll 1$$

Кроме того, $|\mathbf{j}| \ll |\mathbf{j}_+|$ при $|\mathbf{E}_+| \gg |\mathbf{E}|$. Таким образом, если внешние поля велики $E_+ \gg UH / c$, и в жидкости за счет этих полей могут течь сильные токи, и, если, кроме того, $\omega \tau$ не слишком велико, чтобы имело место (1.5), то при решении гидродинамической задачи вмес-

то (1.4) можно пользоваться соотношением

$$\mathbf{i} = \rho_{e+} \mathbf{E}_+ + \frac{1}{c} \mathbf{J}_+ \times \mathbf{H} \quad (1.6)$$

Отметим также, что условие

$$\frac{U}{\sigma L} \sim \frac{U^2}{c^2} \frac{1}{R_m} \ll 1$$

всегда считается выполненным, так как это есть условие пренебрежения токами смещения.

Соотношение (1.6) показывает, что при сформулированных условиях силовое воздействие на поток оказывают только внешнее электрическое поле и токи, которые оно вызывает. В этом случае гидродинамическая задача отделяется от электрической. Электромагнитная сила (1.6) в уравнениях гидродинамики будет заданной величиной, причем это относится как к основному потоку, так и к пограничному слою. Решив гидродинамическую задачу, можно из уравнений Максвелла с использованием (1.3) найти электрическое поле \mathbf{E} , а затем по (1.2) распределение индуцированных токов. Для очень больших ωt , при которых нарушается неравенство (1.5), разделения не происходит. Пример аналогичной постановки задачи для течений в каналах в сильном электрическом поле дан в [6].

Раздельное определение электрического поля, внешних источников \mathbf{E}_+ и источников, индуцированных при движении жидкости, имеет смысл при больших внешних полях $E_+ \gg UH/c$, так как в этом случае такой подход дает упрощение задачи. Если же внешние поля отсутствуют в области течения или они не превосходят по порядку величины индуцируемые поля ($E_+ \lesssim UH/c$), то имеет, по-видимому, смысл решать гидродинамическую и электродинамическую задачи совместно при заданных внешних источниках; в этом случае при $R_m \ll 1$ токи, текущие в жидкости, можно не учитывать при вычислении магнитного поля и вычислять магнитное поле отдельно по заданным внешним токам. Имея в виду сказанное, в дальнейшем будем рассматривать задачи, в которых внешние электрические поля сравнимы с индуцированными¹.

Если внешние электрические поля сравнимы с индуцированными, то $E \lesssim UH/c$, и $j \lesssim \sigma UH/c$, как это следует из (1.2). При этом изменение магнитного поля поперек пограничного слоя мало, а толщина пограничного слоя определяется вязкими силами [1]. Отсюда следует, что внутри пограничного слоя имеет место уравнение

$$\partial \mathbf{H} / \partial y = 0 \quad (1.7)$$

Здесь y — координата поперек пограничного слоя. Следовательно, в уравнениях пограничного слоя $\mathbf{H}(x, z)$ является функцией координат x, z вдоль пограничного слоя. Эта функция является значением функции $\mathbf{H}^*(x, y, z)$ в точках поверхности обтекаемого тела $\mathbf{H}^*(xoz) = \mathbf{H}(xz)$.

Функция \mathbf{H}^* удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{H}^* = \mathbf{j}^* \quad \text{div } \mathbf{H}^* = 0 \quad (1.8)$$

Здесь \mathbf{j}^* — плотность токов, текущих вне области течения.

¹ Именно в смысле возможности разделения электрического поля на внешнее и индуцированное течением надо понимать аналогичное предположение, сделанное [1].

Согласно (1.3) плотность заряда внутри пограничного слоя

$$\rho_e \lesssim \frac{UH}{c\delta} \quad (1.9)$$

(δ — характерная толщина вязкого пограничного слоя). Отсюда следует, что «электрическая» сила $\rho_e E$ в пограничном слое пренебрежимо мала по сравнению с «магнитной» силой $c^{-1} (\mathbf{j} \times \mathbf{H})$, если

$$\frac{U}{c\delta} \max \{1 + \omega^2\tau, \omega^2\tau^2 (1 + \omega^2\tau^2)\} \ll 1 \quad (1.10)$$

Это неравенство может нарушаться [1] в практически интересных случаях только при очень больших $\omega\tau$.

Заметим, что в силу (1.5) электрическая сила пренебрежимо мала по сравнению с магнитной и во внешнем к пограничному слою потоке. Интересно, что с ростом $\omega\tau$ сначала нарушается (1.9) ($\delta \ll L$), а затем (1.5); т. е. с ростом $\omega\tau$ сначала электрическая сила становится существенной в уравнениях пограничного слоя и только при очень больших $\omega\tau$ она становится существенной в основном потоке (при таких больших $\omega\tau$ может нарушиться условие $\omega_i\tau_i \ll 1$).

Таким образом, для электромагнитной силы имеем выражение:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \frac{\sigma}{c(1 + \omega^2\tau^2)} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \alpha \left[\mathbf{H} \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} H^2 \right] \right\} \times \mathbf{H} \quad (1.11)$$

Для того чтобы написать выражение для электромагнитной силы в уравнениях пограничного слоя, надо в выражении (1.11) опустить члены порядка δ , так как в уравнениях пограничного слоя сохраняются только члены порядка единицы. Выражение для главной части электромагнитной силы \mathbf{f}° , фигурирующей в уравнениях пограничного слоя, легко получить, проделав в (1.11) оценки пограничного слоя

$$\mathbf{f}^\circ = \frac{1}{c} \mathbf{j}^\circ \times \mathbf{H} = \frac{\sigma}{1 + \omega^2\tau^2} \left\{ \mathbf{E}^\circ + \frac{1}{c} \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H} + \alpha \left[\mathbf{H} \times \mathbf{E}^\circ + \frac{1}{c} \mathbf{v}_\tau H^2 \right] \right\} \times \mathbf{H} \quad (1.12)$$

Здесь \mathbf{E}° — главная часть электрического поля [1], т. е. электрическое поле, вычисленное с точностью до членов порядка δ ; индексом τ обозначается проекция соответствующего вектора на плоскость x, z .

В работе [1] показано, что если плотность заряда в пограничном слое удовлетворяет условию (1.9), то касательная составляющая главной части электрического поля E_τ° удовлетворяет в пограничном слое уравнению

$$\partial E_\tau^\circ / \partial y = 0 \quad (1.13)$$

а нормальная соответствующая (E_y°) связана с плотностью заряда в пограничном слое уравнением

$$\partial E_y^\circ / \partial y = 4\pi\rho_e^\circ \quad (1.14)$$

Здесь ρ_e° — плотность заряда, вычисленная с точностью до членов порядка $UH / c\delta$.

Уравнение (1.13) показывает, что E_τ° не меняется поперек пограничного слоя. В уравнениях пограничного слоя E_τ° надо считать известной функцией координат x, z , определяемой из решения внешней к пограничному слою задачи (в задачах обтекания это соответствует решению задачи о течении жидкости в основном потоке и распределении поля в обтекаемом теле). Уравнение (1.14) дает изменения E_y° в пограничном слое.

В рассматриваемой задаче плотность заряда в пограничном слое дается соотношением (1.3). Легко проверить, что ρ_e° в этом случае с учетом (1.7) и (1.13) определяется соотношением

$$4\pi\rho_e^\circ = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial y}|\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| + \frac{\alpha}{c}H_y\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{H}_\tau) - \alpha^2H_y^2\frac{\partial E_y^\circ}{\partial y} \quad (1.15)$$

Интегрируя (1.14) с использованием (1.15), получим

$$E_y^\circ = \frac{1}{1 + \alpha^2H_y^2} \left[-\frac{1}{c}|\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| + \frac{\alpha H_y}{c}(\mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{H}_\tau) \right] + \varphi(x, z) \quad (1.16)$$

Здесь $\varphi(x, z)$ — произвольная функция.

Если рассматривать пограничный слой на теле, то $\mathbf{v}_\tau = 0$ при $y = 0$, поэтому на теле $E_y^\circ|_{y=0} = \varphi(x, z)$. Если обтекаемое тело диэлектрик, то $j_n = 0$ при $y = 0$, и, следовательно, в силу (1.2)

$$\varphi(x, z) = -\frac{1}{1 + \alpha^2H_y^2} [\alpha|\mathbf{H}_\tau \times \mathbf{E}_\tau^\circ| + \alpha^2H_y\mathbf{E}_\tau^\circ \cdot \mathbf{H}_\tau]_{y=0} \quad (1.17)$$

В этом случае (1.16) дает распределение E_y° в пограничном слое, а для решения внешней к пограничному слою задачи из (1.16) получается следующее граничное условие:

$$E_y^\circ|_{y=\infty} = E_y^*|_{y=0} = \frac{1}{1 + \alpha^2H_y^2} \left[-\frac{1}{c}|\mathbf{U} \times \mathbf{H}_\tau| + \right. \\ \left. + \frac{\alpha H_y}{c}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{H}_\tau) - \alpha|\mathbf{H}_\tau \times \mathbf{E}_\tau^*| - \alpha H_y^2\mathbf{E}_\tau^* \cdot \mathbf{H}_\tau \right]_{y=0} \quad (1.18)$$

Здесь \mathbf{U} — скорость внешнего к пограничному слою потока, звездочкой обозначено поле, определяемое при решении задачи о течении идеальной жидкости и задачи о распределении поля в теле. Если обтекаемое тело проводник, то граничное условие для \mathbf{E}^* в силу (1.13) будет

$$\mathbf{E}_\tau^* = 0 \quad (1.19)$$

В этом случае $\varphi(x, z)$ в (1.16) определяется решением внешней к пограничному слою задачи

$$\varphi(x, z) = E_y^*|_{y=0} - \frac{1}{1 + \alpha^2H_y^2} \left[-\frac{1}{c}|\mathbf{U} \times \mathbf{H}_\tau| + \frac{\alpha H_y}{c}\mathbf{U} \cdot \mathbf{H}_\tau \right]_{y=0} \quad (1.20)$$

В последнем случае, как следует из (1.2), функция $\varphi(x, z)$ связана с плотностью тока j_y° соотношением

$$\varphi(x, z) = \frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + \alpha^2H_y^2} j_y^\circ \quad (1.21)$$

Уравнения (1.2), (1.13) — (1.21) показывают, что для главной части нормальной составляющей плотности тока в пограничном слое имеет место соотношение

$$\partial j_y^\circ / \partial y = 0 \quad (1.22)$$

Из (1.16) — (1.18), (1.20) следует, что E_y° не меняется поперек пограничного слоя ($\partial E_y^\circ / \partial y = 0$) только в том случае, если $\mathbf{H}_\tau = 0$. Соответствующие уравнения пограничного слоя для этого случая были получены в недавно опубликованной работе [7]. Из (1.12) следует, что изменение давления поперек пограничного слоя имеет порядок δ .

Задачу о пограничном слое можно сформулировать так:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} f_x^\circ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} f_z^\circ, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Здесь f° — определяется соотношением (1.12), в котором E_y° дается (1.16), а E_τ° , $\varphi(x, z)$ и $H(x, \tau)$ определяются граничными условиями и решением внешней задачи.

Заметим, что система (1.23) остается той же и при $R_m \sim 1$, меняется при этом только формулировка внешней задачи.

Формулировка внешней задачи для $R_m \lesssim 1$ аналогична [1] формулировке этой задачи при $\omega\tau = 0$, меняется только выражение для электромагнитной силы, которую надо задать при $\omega\tau \neq 0$ выражением (1.11).

§ 2. Пограничный слой на полубесконечной пластине. Рассмотрим в качестве примера задачу о пограничном слое на полубесконечной диэлектрической пластине.

Будем считать, что пластина представляет собой полуплоскости $y = 0$, $x > 0$. Будем предполагать магнитное поле в области $x > 0$ однородным и нормальным к пластине ($H = H_0 e_y$); в области $x < 0$ имеем $H = 0$. При этом в области $x < 0$ поток не взаимодействует с магнитным полем и его можно считать однородным потоком со скоростью U , направленной вдоль оси x .

Кроме того, предположим, что все величины не зависят от координаты z ($\partial / \partial z = 0$). Это предположение становится очевидным, если рассматривать задачу об обтекании пластины как предельный случай задачи об обтекании тела вращения. При этом предположении из уравнения $\text{rot } E = 0$ и условия отсутствия электрического поля на бесконечности следует, что $E_z = 0$.

При сделанных предположениях уравнения (1.23) примут вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho (1 + \omega^2 \tau^2)} \left\{ u + \omega \tau w - \omega \tau \frac{c E_x^\circ}{H_0} \right\} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho (1 + \omega^2 \tau^2)} \left\{ \omega \tau u - w + \frac{c E_x^\circ}{H_0} \right\} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad E_x^\circ = E_x^*(x, 0, z), \quad p = p^*(xz) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обтекаемая пластина является диэлектриком и $H_\tau = 0$, поэтому из (1.16) — (1.18) следует, что в пограничном слое $E_y^\circ = \varphi(xz) = 0$, а E_x° — определяется решением внешней задачи.

Используя (1.2), (1.3) и (1.11), уравнения, описывающие внешний к пограничному слою поток, можно при принятых предположениях записать в виде

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} - \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho (1 + \omega^2 \tau^2)} \left\{ u^* + \omega \tau w^* - \omega \tau \frac{c E_x^*}{H_0} \right\} \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} \\ u^* \frac{\partial w^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y} &= \frac{H_0^2 \sigma}{c^2 \rho (1 + \omega^2 \tau^2)} \left\{ \omega \tau u^* - w^* + \frac{c E_x^*}{H_0} \right\}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \\ \text{rot } E^* &= 0, \quad \text{div } E^* = 4\pi \rho_e^* = \frac{\partial w^*}{\partial x} + \omega \tau \frac{\partial v^*}{\partial y} - \omega^2 \tau^2 \frac{\partial E_y^*}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Звездочкой обозначаются величины, относящиеся к внешнему потоку. В силу (1.18) решения системы (2.8), описывающие внешний поток, должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$v^* = 0, \quad E_y^* = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (2.3)$$

Кроме того, вид решения системы (2.2) зависит от условий на бесконечности, в частности от поведения электрического поля на бесконечности, но эти условия связаны с конкретной постановкой задачи и должны формулироваться при постановке задачи.

Система (2.2) имеет решение, соответствующее поступательному потоку $u^* = U$, $v^* = w^* = 0$ только при $j_x = 0$, когда на бесконечности накапливается заряд, уравнивающий поле Холла в направлении оси x . Решение задачи в этом случае разобрано в работе [7].

В дальнейшем будем считать, что заряд, переносимый на бесконечность токами j_x , нейтрализуется каким-то образом, т. е. $j_x \neq 0$. Естественно, что решение задачи будет зависеть от условий для электрического поля на бесконечности (условия нейтрализации заряда).

Для упрощения решения задачи будем считать, что параметр

$$mL = \frac{H_0^2 \sigma L}{c^2 \rho U (1 + \omega^2 \tau^2)} \ll 1 \quad (2.4)$$

т. е. электромагнитное воздействие на поток мало. В этом случае задачу в пограничном слое и во внешнем потоке можно линеаризовать около решения Блязиуса (аналогичная постановка задачи при $\omega\tau = 0$ дана в работе [2]). Будем считать, что $\omega\tau$ не слишком велико, так что

$$\omega\tau mL \ll 1$$

Представим все величины в виде

$$u = u_0 + mLu_1, \quad v = v_0 + mLv_1, \quad E = E_0 + mLE_1 \quad \text{и т. д.} \quad (2.5)$$

Индексом нуль обозначены величины, соответствующие решению задачи при $mL = 0$ ($\sigma = 0$). Введем безразмерные величины по формулам

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{x}{L}, & y &\equiv \frac{y}{L}, & u &\equiv \frac{u}{U}, & v &\equiv \frac{v}{U}, & w &\equiv \frac{w}{U} \\ p &\equiv \frac{p}{\rho U^2}, & E &\equiv \frac{cE}{UH_0}, & R &= \frac{UL}{\nu} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь U — скорость внешнего потока, соответствующая решению задачи при $mL = 0$ ($U \equiv u_0^*$), R — число Рейнольдса. В дальнейшем всюду используются безразмерные величины (2.6).

Подставляя (2.5) в уравнения (2.1) и (2.2) и собирая главные члены (не содержащие mL), получим, что величины с индексом нуль в пограничном слое соответствуют задаче Блязиуса, величины с индексом нуль во внешнем потоке соответствуют поступательному потоку со скоростью $u_0^* = U$.

Для определения величины E_0^* получим из (2.2) уравнения

$$\text{rot } E_0^* = 0, \quad \text{div } E_0^* = -\omega^2 \tau^2 \frac{\partial E_{y_0}^*}{\partial y}$$

Будем считать, что на бесконечности не может накапливаться электрический заряд (полная нейтрализация заряда на бесконечности). При этом потенциал электрического поля Φ ($E = \text{grad } \Phi$) равен нулю

на бесконечности. Так как, кроме того, на пластине (при $y = 0$) имеет место условие $E_y^* = \partial\Phi / \partial y = 0$, то для E_0^* имеет место решение $E_0^* = 0$. Отметим, что при принятых предположениях во внешнем потоке вдоль оси x течет ток, плотность которого с точностью до членов порядка mL определяется соотношением $j_x = \sigma\omega\tau UH_0 / c (1 + \omega^2\tau^2)$.

Используя решение при $mL = 0$, из систем (2.1), (2.2) можно получить линейные системы уравнений для определения поправок (u_1, v_1, E_1 и т. д.) к решению при $mL = 0$, связанных с действием электромагнитных сил. Соответствующая система уравнений для величин, относящихся к внешнему потоку, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^*}{\partial x} = -\frac{\partial p_1^*}{\partial x} - 1, \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial x} = -\frac{\partial p_1^*}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_1^*}{\partial x} = \omega\tau, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y} = 0 \\ \text{rot } E_1^* = 0, \quad \text{div } E_1^* = \frac{\partial w_1^*}{\partial x} + \omega\tau \frac{\partial v_1^*}{\partial y} - \omega^2\tau^2 \frac{\partial E_{y1}^*}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

а для величин, относящихся к пограничному слою — вид

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - u_0 \\ u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \omega\tau u_0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad p_1 = p_1^* (xz) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отметим, что если (2.4) имеет место, а (2.5) нарушается за счет больших $\omega\tau$, то в первых уравнениях (2.7) и (2.8) появится член $\omega\tau w_1$.

Так как во внешнем к пограничному слою потоке текут токи, то вследствие действия электромагнитных сил этот поток не будет, вообще говоря, поступательным. В рассматриваемом приближении проекция электромагнитной силы на направление основного потока (ось x) является константой. Поэтому за счет действия постоянного градиента давления ($\partial p_1^* / \partial x \neq 0$) можно добиться того, чтобы скорость вдоль оси x была постоянной и равной скорости внешнего потока при $mL = 0$ ($u_1^* = 0$, $u^* = u_0^* + mLu_1^* = U$). При этом величина $\partial p_1^* / \partial x$ должна определяться решением системы (2.7). Заметим, что в силу предположения $\partial p^* / \partial z = 0$ составляющая электромагнитной силы в направлении оси z которая в данном приближении тоже является постоянной, не может быть уравновешена градиентом давления и, следовательно, во внешнем потоке имеется составляющая скорости вдоль оси z . Так как составляющая электромагнитной силы вдоль оси y во внешнем потоке равна нулю, то естественно считать, что $\partial p^* / \partial y = 0$.

При сделанных предположениях система (2.7) для динамических величин имеет решение

$$u_1^* = 0, \quad v_1^* = 0, \quad \partial p_1^* / \partial x = -1, \quad w_1^* = \omega\tau x \quad (2.9)$$

Для определения линейных добавок к электрическому полю E_1^* из (2.7) с использованием (2.9) получается следующая система уравнений

$$\text{rot } E_1^* = 0, \quad \text{div } E_1^* = \omega\tau - \omega^2\tau^2 \partial E_{y1}^* / \partial y$$

Эту систему надо решать в силу сделанных выше предположений, считая, что электрический потенциал Φ_1 ($E_1^* = \text{grad } \Phi_1$) равен нулю на бесконечности и $\partial\Phi_1 / \partial y = 0$ при $y = 0$.

С учетом (2.9) систему (2.8) можно представить окончательно в виде

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= 1 - u_0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0, \quad u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \omega \tau u_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Граничные условия для этой системы в силу (2.9) имеют вид

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u_1 = 0, \quad w_1 = \omega \tau x \quad \text{при } y = \infty \quad (2.11)$$

Легко видеть, что первые два уравнения системы (2.10) не содержат w_1 и, следовательно, могут интегрироваться отдельно. Решение этих двух уравнений при граничных условиях (2.11) может быть сведено к решению одного дифференциального уравнения по переменной $\eta = y \sqrt{R/x}$, которое проинтегрировано в работе [2]. Очевидно, что при этом в линейной постановке проекция скорости на плоскость xy зависит от $\omega \tau$ только через параметр mL .

Последнее уравнение (2.10) можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению, если ввести функцию $\Psi(\eta)$ следующим соотношением:

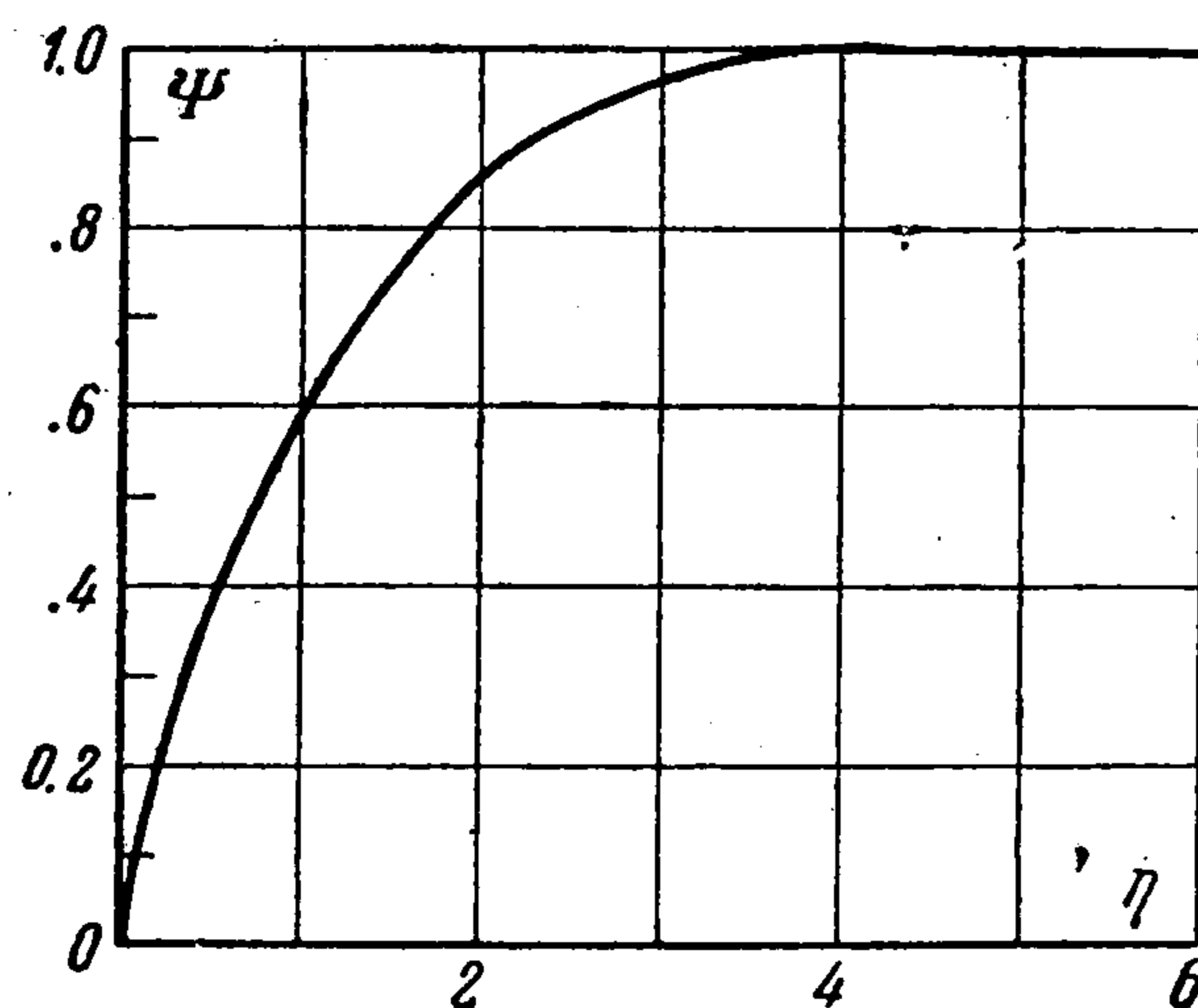
$$w_1 = \omega \tau x \Psi(\eta) \quad (2.12)$$

При этом последнее уравнение (2.10) примет вид

$$\Psi'' + \frac{1}{2} f_0 \Psi' - f_0' \Psi + f_0' = 0 \quad (2.13)$$

Здесь $f_0(\eta)$ — функция, связанная с функцией тока в решении Блязиуса соотношением

$$f_0(\eta) = \frac{\psi(xy)}{\sqrt{Uvx}}$$



Фиг. 1

Граничные условия (2.11) для w_1 , для функции Ψ , имеют вид

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(\infty) = 1 \quad (2.14)$$

Уравнение (2.11) при условиях (2.14) интегрировалось численно. Функция $\Psi(\eta)$, полученная в результате интегрирования, приведена на фиг. 1.

Отметим, что если (2.5) нарушается, то система, аналогичная (2.10), не будет сводиться к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной η .

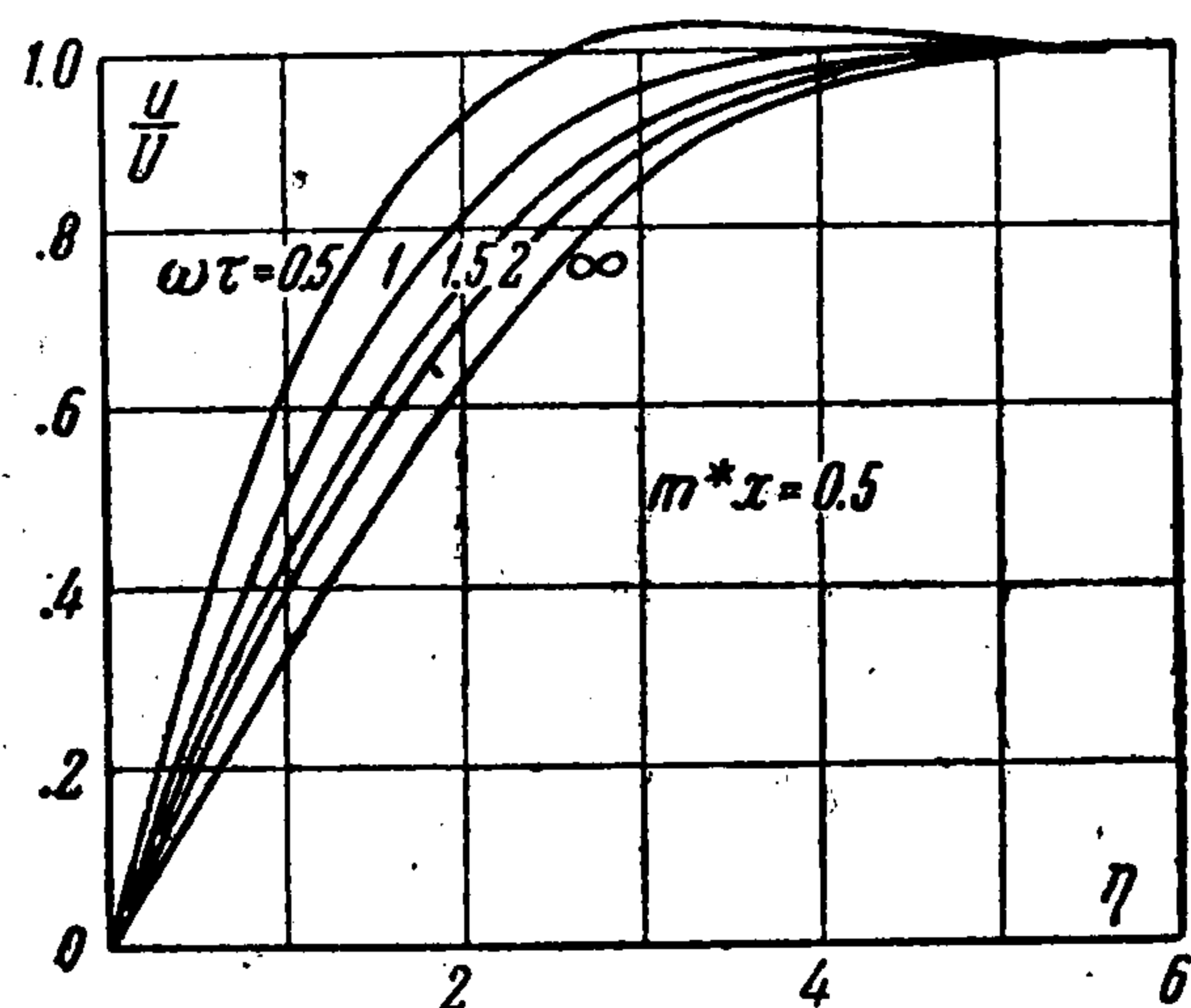
На фиг. 2—3 приведены профили продольной скорости u и поперечной скорости w для различных значений параметра $\omega \tau$ при фиксированном значении параметра

$$m^* x = \frac{\sigma H_0^2 x}{\rho c^2 U} = 0.5$$

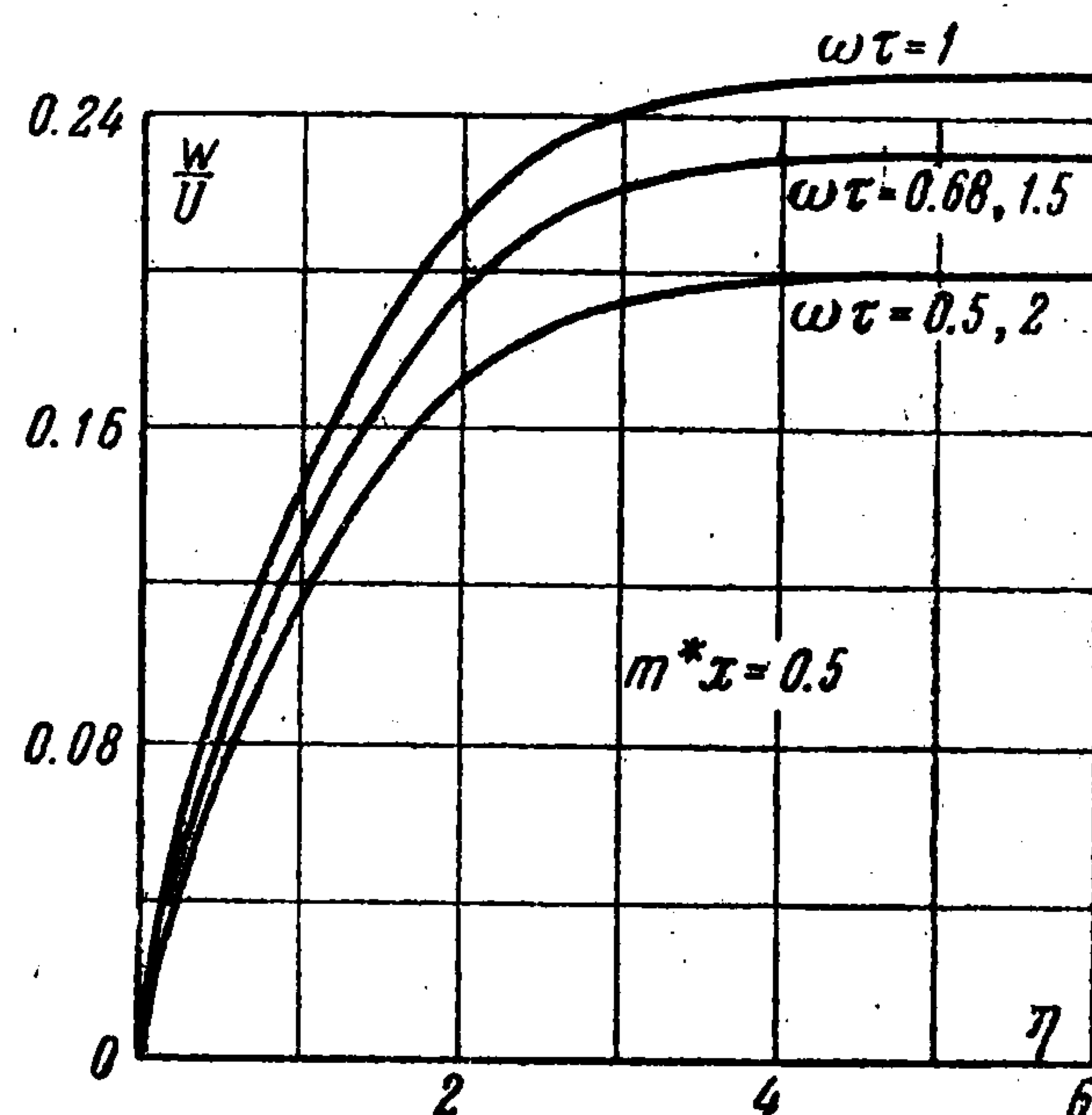
Фиг. 2 показывает, что торможение потока вдоль оси x за счет электромагнитных сил уменьшается с ростом $\omega \tau$. При $\omega \tau \rightarrow \infty$ (неравенство (2.5) будет выполнено, если $m^* x < 1$) профиль скорости в этом направлении стремится к профилю скорости при $H_0 = 0$.

Фиг. 3 показывает, что поперечная скорость w при возрастании $\omega\tau$ сначала растет, а затем убывает, причем w_{\max} достигается при $\omega\tau = 1$. При $\omega\tau \rightarrow \infty$ поперечная скорость $w \rightarrow 0$.

Заметим, что стремление решения к решению Блязиуса при $\omega\tau \rightarrow \infty$ и фиксированном σ связано с уменьшением эффективной проводимости. Из (1.1) следует, что при $\omega\tau \rightarrow \infty$ и $\sigma = \text{const}$ токи становятся параллельными магнитному полю $\mathbf{j} \times \mathbf{H} \rightarrow 0$, т. е. в нашем случае $j_x \rightarrow 0$, $j_z \rightarrow 0$ и, следовательно, электромагнитное воздействие на поток исчезает.



Фиг. 2



Фиг. 3

Коэффициенты продольного и поперечного трения, вычисленные с точностью до членов порядка mL и выраженные через размерные величины, имеют вид

$$c_x = 2\nu U^{-2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2}{\sqrt{R_x}} \left(f_0'(0) + \frac{m^*x}{1 + \omega^2\tau^2} f_2'(0) \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{R_x}} \left(0.332 + 1.147 \frac{m^*x}{1 + \omega^2\tau^2} \right)$$

$$c_z = 2\nu U^{-2} \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2}{\sqrt{R_x}} m^*x \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \Psi'(0) = \frac{2}{\sqrt{R_x}} 1.35 m^*x \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Здесь $R_x = Ux/\nu$ — число Рейнольдса, $f_2(\eta)$ — функция, связанная с u соотношением $u = U(f_0' + m^*x f_2')$.

Поступила 28 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А. К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5.
2. Rossow V. U. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in presence of a transverse magnetic field. NASA, 1957, TN 3971.
3. Любимов Г. А. О форме закона Ома в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
4. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Уравнения магнитной плазмотоники. ЖТФ, 1960, т. 30, вып. 9.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
6. Любимов Г. А. О решении некоторых задач магнитной гидродинамики при анизотропной проводимости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
7. Губанов А. И., Пушкарёв О. Е. Вязкий пограничный слой в магнитной гидродинамике при конечном $\omega\tau$. ЖТФ, 1962, т. XXXII, вып. 6.