Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Тер-Крикоров

(Москва)

Известно, что процесс распространения волн в неоднородной жидкости существенно отличается от процесса распространения волн в однородной жидкости.

Для весьма частных законов распределения плотности эта задача в приближенной постановке исследована в книге Ламба [1] и статье [2].

В данной работе подобное приближенное исследование проведено для произвольного распределения плотности и завихренности. Подробно изучены так называемые длинные волны. Предлагаемый асимптотический метод может быть применен и для решения других граничных задач математической физики для прямолинейных полос.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившийся поток идеальной тяжелой жидкости со свободной границей над гладким горизонтальным дном. Предполагается, что жидкость несжимаемая, но может быть неоднородной. Выберем систему координат как на фиг. 1. Пусть $y = Y(x)$ есть уравнение свободной границы, ρ — плотность жидкой частицы, p — гидродинамическое давление, g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{v}$ — вектор скорости. Если ввести еще в рассмотрение вектор $\mathbf{a} = \sqrt{\rho}\mathbf{v}$, то в безразмерных переменных имеем уравнения движения

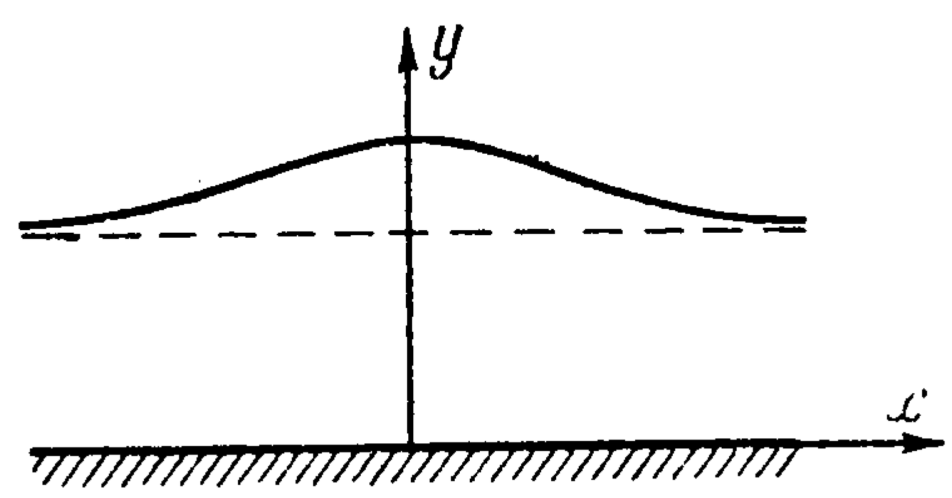
$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \qquad \mathbf{a} \nabla \rho = 0 \tag{1.1}$$

$$(\mathbf{a} \nabla)\, \mathbf{a} = -\nu \rho \mathbf{y}^\circ - \nabla p \qquad \left(\nu = \frac{gH}{c^2}\right)$$

и граничные условия

$$a_n = 0 \quad \text{при } y = 0, \tag{1.2}$$

$$a_n = 0, \qquad p = \text{const} \quad \text{при } y = Y(x)$$



Фиг. 1

Здесь H — глубина жидкости, c — характерная скорость. Новые единицы измерения выбираются так, чтобы расход жидкости, поток вектора $\mathbf{a}$ и средняя глубина были равны единице.

Помимо граничных условий (1.2) нужно задать некоторые функции, характеризующие распределение плотности и завихренности в потоке.

Заметим, что первое из уравнений (1.1) позволяет ввести функцию тока для вектора $\mathbf{a}$

$$a_x = \partial\psi / \partial y, \qquad a_y = -\partial\psi / \partial x$$

Тогда из второго уравнения (1.1) следует, что плотность постоянна вдоль линий тока, т. е. $\rho = \rho(\psi)$. Третье же из уравнений (1.1) можно записать в таком виде:

$$\nabla h = \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} + \nu y \rho'(\psi) \nabla \psi \qquad \left(h = \frac{a^2}{2} + p + \nu\rho(\psi)\, y\right) \tag{1.3}$$

Так как вектор ∇h ортогонален вектору **a**, то функция $h = h(\psi)$ зависит только от ψ. Функции $\rho(\psi)$ и $h(\psi)$ следует считать заданными. Функция $\rho(\psi)$ характеризует распределение плотности по линиям тока, а функция $h(\psi)$ — распределение завихренности. Проектируя теперь уравнение (1.2) на направление вектора $\nabla\psi$, получаем уравнение

$$\Delta\psi = \nu\rho'(\psi)\, y - h'(\psi) \tag{1.4}$$

В силу первого из уравнений (1.1) функция $\psi = \mathrm{const}$ на свободной границе и на дне канала, кроме того, в силу выбора единиц измерения поток вектора **a** через поперечное сечение потока равен единице, поэтому имеем граничные условия

$$\psi = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad \psi = 1, \quad \frac{(\nabla\psi)^2}{2} + \nu\rho(1)\, Y(x) = \mathrm{const} \quad \text{при } y = Y(x) \tag{1.5}$$

Таким образом, задача приводится к определению функций $Y(x)$ и $\psi(x, y)$ таких, что в полосе $0 < y < Y(x)$ функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.4) и граничным условиям (1.5).

В такой постановке задача неудобна для исследования, так как граничные условия заданы на неизвестной границе. Эту трудность можно устранить, если сделать такую замену переменных, чтобы ψ играла роль независимой переменной.

2. Преобразование уравнений. Прежде всего заметим, что уравнение (1.4) эквивалентно системе уравнений (2.1)

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} = -h'(\psi) + \nu\rho'(\psi)\, y, \qquad \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0, \qquad a_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad a_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Примем в качестве независимых переменных x и ψ. Тогда систему (2.1) можно записать в таком виде: (2.2)

$$a_x \frac{\partial a_y}{\partial\psi} - a_y \frac{\partial a_x}{\partial\psi} + \frac{\partial a_x}{\partial x} = 0, \qquad a_x \frac{\partial a_x}{\partial\psi} + a_y \frac{\partial a_y}{\partial\psi} - \frac{\partial a_y}{\partial x} = -h'(\psi) + \nu\rho'(\psi)\, y$$

Кроме того, как нетрудно видеть

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_y}{a_x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial\psi} = \frac{1}{a_x}, \qquad y = \int_0^\psi \frac{dt}{a_x(x, t)} \tag{2.3}$$

Граничное условие (1.5) примет вид (2.4)

$$a_y = 0 \quad \text{при } \psi = 0, \qquad a_x^2 + a_y^2 + 2\nu\rho(1)\, y(x, 1) = \mathrm{const} \quad \text{при } \psi = 1$$

Уравнения (2.2) — (2.3) при граничных условиях (2.4) допускают тривиальное решение, соответствующее невозмущенному плоскопараллельному потоку жидкости

$$a_y^\circ = 0, \qquad a_x^\circ = p(\psi), \qquad \frac{dp^2}{d\psi} = 2\left[-h'(\psi) + \nu\rho'(\psi) \int_0^\psi \frac{dt}{p(t)}\right]$$

Если функция $h(\psi)$ задана, то из последнего уравнения можно найти $p(\psi)$. Однако более естественно задавать функцию $p(\psi) = \rho V^2$ — удвоенную кинетическую энергию невозмущенного потока, отнесенную к единице объема. Тогда функция $h(\psi)$ просто выражается через $p(\psi)$ и $\rho(\psi)$. Так как глубина невозмущенного потока должна быть равна единице, то из (2.3) следует

$$\int_0^1 \frac{dt}{p(t)} = 1 \tag{2.5}$$

Краевая задача для уравнений (2.2) — это типичная нелинейная задача на собственные значения. Нелинейная теория должна указать такие значения параметра ν, при которых от тривиального решения могут ответвляться нетривиальные решения. Сделаем замену зависимых и независимых переменных, предполагая, что $p > 0$

$$a_x = p\,(1 + u), \qquad a_y = pv, \qquad \eta = \int_0^{\psi} \frac{dt}{p\,(t)}$$

В силу (2.5) полосе $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ соответствует полоса $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

В новых переменных краевая задача для системы уравнений (2.2) приводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial x} = v\,\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\,\frac{\partial v}{\partial \eta} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\,[p^2\,(\eta)\,u] - p^2\,\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\rho'\,(\eta) \int_0^{\eta} u\,d\eta =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\,[p^2\,(u^2 + v^2)] - \nu\rho'\,(\eta) \int_0^{\eta} \frac{u^2}{1+u}\,d\eta$$

с граничными условиями

$$v = 0 \qquad \text{при } \eta = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu k v = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(u^2 + v^2) + \nu k u v\,\frac{1}{1+u} \qquad \text{при } \eta = 1 \qquad \left(k = \frac{\rho\,(1)}{p^2\,(1)}\right)$$

Если эта задача решена, то уравнение семейства линий тока дается равенством (2.3), в котором лишь нужно сделать замену переменных

$$y\,(x, \eta) = \int_0^{\eta} \frac{dt}{1 + u\,(x, t)} \tag{2.8}$$

3. Волны малой амплитуды. Отбрасывая нелинейные слагаемые в уравнениях (2.6) и граничных условиях (2.7), получаем

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta}\,[p^2\,(\eta)\,u] - p^2\,(\eta)\,\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\rho'\,(\eta) \int_0^{\eta} u\,d\eta = 0 \tag{3.1}$$

$$v = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \nu k v = 0 \quad \text{при } \eta = 1$$

Будем, кроме того, требовать, чтобы на бесконечности функции v и u были бы ограниченными. Исключая v приходим к линейной краевой задаче на собственные значения для функции $v\,(x, \eta)$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[p^2\,(\eta)\,\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] + p^2\,(\eta)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu\rho'\,(\eta)\,v = 0 \tag{3.2}$$

$$v = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \eta} - \nu k v = 0 \quad \text{при } \eta = 1$$

Собственные функции краевой задачи (3.2) имеют такой вид:

$$v_n\,(x, \eta) = \sin\omega\,(x - x_0)\,z_n\,(\eta) \tag{3.3}$$

где $z_n\,(\eta)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля для обыкновенного уравнения

$$Lz = \frac{d}{d\eta}\left[p^2\,\frac{dz}{d\eta}\right] - \left[\omega^2 p^2 + \nu\,\frac{d\rho}{d\eta}\right] z = 0 \tag{3.4}$$

$$z(0) = 0, \qquad \frac{dz}{d\eta} - \nu k z = 0 \quad \text{при } \eta = 1$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$p(\eta) > 0, \qquad d\rho \,/\, d\eta < 0 \tag{3.5}$$

Заметим, что (3.4) не есть обычная задача Штурма — Лиувилля, так как параметр ν входит и в уравнение, и в граничные условия. Однако для исследования такой граничной задачи можно применить тот же метод, что и для задачи Штурма — Лиувилля [3], доказав, что при условиях (3.5) собственные значения и собственные функции обладают свойствами, выраженными в следующих леммах.

Лемма 3.1. Все собственные значения простые и действительные.

Лемма 3.2. Собственные числа образуют бесконечное счетное множество $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \ldots$. При больших m справедливы асимптотические формулы (3.6)

$$z_m(\eta) = b(\eta)\sin\left[\sqrt{\nu_m}\,\zeta(\eta)\right] + O(m^{-1}), \qquad \nu_m = \frac{m^2\pi^2}{\zeta^2(1)} + O(1)$$

$$\zeta(\eta) = \int_0^{\eta} f(t)\,dt, \qquad b^{-2}(\eta) = p^2(\eta)\, f(\eta), \qquad f(\eta) = \frac{1}{p(\eta)}\left(-\frac{d\rho}{d\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Лемма 3.3. Неоднородная краевая задача

$$Lu = \Phi(\eta), \qquad u(0) = 0, \qquad \left[\frac{du}{d\eta} - \nu k u\right]_{\eta=1} = F(\nu)$$

разрешима, если ν не есть собственное значение. Если же $\nu = \nu_m$ есть собственное значение, то для разрешимости неоднородной задачи необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^1 z_m(\eta)\,\Phi(\eta)\,d\eta - z_m(\eta)\,p^2(1)\,F(\nu) = 0 \tag{3.7}$$

Дадим для примера доказательство леммы 3.1. Так как дифференциальный оператор L второго порядка, то собственные значения краевой задачи (3.4) простые. Чтобы доказать, что они действительны, заметим, что для любых двух собственных функций должно выполняться соотношение

$$kp^2(1)\,u(1)\,v(1) - \int_0^1 \frac{d\rho}{d\eta}\,u(\eta)\,v(\eta)\,d\eta = 0 \tag{3.8}$$

которое легко выводится, если проинтегрировать выражение $vLu - uLv$ от 0 до 1 и использовать граничные условия. Если $u(\eta)$ есть собственная функция, соответствующая комплексному собственному значению $\nu = \alpha + i\beta$, то $\mu = \alpha - i\beta$ будет также собственным значением, которому соответствует собственная функция $\overline{u(\eta)}$.

В силу (3.8) тогда

$$kp^2(1)\,|u(1)|^2 - \int_0^1 \frac{d\rho}{d\eta}\,|u(\eta)|^2\,d\eta = 0$$

Но это равенство невозможно, так как по предположению $p(\eta) > 0$, $d\rho\,/\,d\eta < 0$ $k > 0$. Лемма 3.1 таким образом доказана.

Так же просто можно доказать лемму 3.3, если построить функцию Грина $G(\eta, \eta', \nu)$ для оператора L. Условие разрешимости выводится обычным образом, если воспользоваться разложением функции Грина в ряд Лорана в окрестности собственного значения $\nu = \nu_m$.

Подставляя выражение (3.3) для $v(x, \eta)$ в систему уравнений (3.1), найдем $u(x, \eta)$, а затем, подставляя $u(x, \eta)$ в уравнение (2.8) и линеаризируя полученное выражение, найдем уравнение семейства линий тока

$$u(x,\eta) = A\cos\omega(x - x_0)\frac{dz_m(\eta)}{d\eta}, \qquad v(x,\eta) = A\omega\sin\omega(x - x_0)\, z_m(\eta)$$

$$y(x,\eta) = \eta - A\cos\omega(x - x_0)\, z_m(\eta)$$

Здесь A — произвольный параметр (амплитуда).

Отклонение линий тока в невозмущенном потоке от соответствующих линий тока в плоскопараллельном потоке характеризуется величиной $z_m(\eta)$. Из приведенных в лемме 3.2 асимптотических формул для $z_m(\eta)$ следует, что при больших m величина $z_m(1)$ имеет порядок m^{-1}, так что свободная граница возмущена слабо. Функция $\zeta(\eta)$ монотонно возрастает от 0 до $\zeta(1)$, когда η возрастает от 0 до 1. Поэтому существуют такие числа $\eta_k{}^m$, что

$$\zeta(\eta_k{}^m) = \frac{2k+1}{2m}\zeta(1), \qquad \text{если } 2k+1 < 2m$$

Для больших m экстремумы функций $z_m(\eta)$ будут достигаться на линиях тока $\eta = \eta_k{}^m$. Можно сказать, что на глубинах $y = \eta_k{}^m$ существуют волновые каналы для волны с номером m. Таким образом, для волн с большими номерами максимальное волнение будет не на свободной границе, а на некоторой глубине.

Из формулы (1.1) получаем выражение для скорости распространения

$$c_m = \sqrt{gh\nu_m^{-1}} \tag{3.9}$$

Здесь ν_m — собственное число краевой задачи (3.4). Собственные числа ν_m зависят от длины волны.

Следовательно, в неоднородной жидкости существует счетное множество волн заданной длины, причем волна с номером m распространяется со скоростью c_m. В этом существенное отличие от случая однородной жидкости, где существует единственная волна заданной длины.

Заметим еще, что разыскивались решения задачи, ограниченные на бесконечности. Можно было бы поставить задачу о разыскании решений, обладающих заданной периодичностью. Как известно, в случае однородной жидкости существует счетное множество волн, обладающих заданной периодичностью. Их длины получаются делением длины основной волны на целое число частей. В случае же неоднородной жидкости уже существует не одна основная волна, а счетное множество основных волн, соответствующих собственным числам $\nu = \nu_m$. Длины остальных волн также получаются делением длин основных волн на целое число частей. В дальнейшем строится нелинейная теория так называемых длинных волн, т. е. волн, длина которых велика по сравнению с глубиной жидкости.

Как и в случае течений однородной жидкости, линейная теория не может описать некоторых физических явлений, имеющих место для длинных волн. Так, в рамках линейной теории нельзя построить уединенную волну, получающуюся из периодической волны в результате предельного перехода, когда длина волны стремится к бесконечности.

Если λ — длина волны, то величина $1/\lambda$ является естественным малым параметром. Однако нельзя искать решение в виде рядов по степеням $1/\lambda$, так как коэффициенты разложения периодической функции по степеням $1/\lambda$ будут функциями непериодическими. Но если сделать предварительно растяжение горизонтальной независимой переменной [1], то такое разложение уже возможно.

4. В уравнениях (2.6) и условиях (2.7) проведем растяжение по малому параметру ε и будем искать u, v и ν в виде рядов по степеням ε

$$\xi = \varepsilon x, \qquad u = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^4 u_2 + \ldots, \qquad v = \varepsilon^3 v_1 + \varepsilon^5 v_2 + \ldots,$$
$$\nu = \nu_0 (1 + \varepsilon^2 \nu_1 + \ldots) \tag{4.1}$$

Физический смысл параметра ε будет выяснен в дальнейшем. Выпишем уравнения и граничные условия для первого и второго приближений

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta}[p^2 u_1] - \nu_0 \rho'(\eta) \int_0^\eta u_1 d\eta = 0 \tag{4.2}$$

$$v_1 = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \nu_0 k v_1 = 0 \quad \text{при } \eta = 1$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}[p^2(\eta) u_2] - \nu_0 \rho'(\eta) \int_0^\eta u_2 d\eta =$$

$$= \nu_0 \nu_1 \rho'(\eta) \int_0^\eta u_1 d\eta - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}(p^2 u_1^2) - \nu_0 \rho'(\eta) \int_0^\eta u_1^2 d\eta + p^2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi}$$

$$v_2 = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \nu_0 k v_2 = -k\nu_0\nu_1 v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial u_1^2}{\partial \xi} + \nu_0 k u_1 v_1 \text{ при } \eta = 1$$

Положим

$$v_1 = -C'(\xi) w(\eta), \qquad u_1 = C(\xi) w'(\eta) \tag{4.4}$$

Функцию $C(\xi)$ из уравнений (4.2) определить нельзя, а для определения $w(\eta)$ нужно решить граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Lw = \frac{d}{d\eta}\left[p^2(\eta)\frac{dw}{d\eta}\right] - \nu_0 \rho'(\eta) w = 0, \qquad w(0) = 0$$
$$\left[\frac{dw}{d\eta} - k\nu_0 w\right]_{\eta=1} = 0 \tag{4.5}$$

Это частный случай задачи (3.4), уже исследованной в п. 3. Из приведенных там рассуждений следует, что при $\rho'(\eta) < 0$ нетривиальные решения этой задачи существуют, когда параметр ν_0 принимает одно из значений $\nu_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}, \ldots$, которым соответствуют собственные функции $w_1, w_2, \ldots$. Будем предполагать в дальнейшем, что ν_0 — это одно из собственных чисел, а $w(\eta)$ — соответствующая ему собственная функция. Функция $C(\xi)$ должна быть определена из второго приближения.

Переходим к исследованию второго приближения. Подставляя в первое из уравнений (4.3) выражения (4.4) для v_1 и u_1, получаем

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = CC'\left[2w'^2 - \frac{d}{d\eta}(ww')\right] \tag{4.6}$$

Положим

$$u_2 = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \qquad v_2 = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + CC'\left[2\int_0^\eta w'^2(t)\,dt - ww'\right] \tag{4.7}$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (4.3) и в граничные условия, получаем

$$L\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)=\Phi,\quad \omega=0 \quad \text{при } \eta=0,\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)-\nu_0 k\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=F \quad \text{при } \eta=1 \qquad (4.8)$$

где

$$\Phi=\nu_0\nu_1\rho' C'w-2CC'\left[\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}(p^2w'^2)+\nu_0\rho'\int_0^\eta w'^2d\eta\right]-p^2wC'''$$

$$F=\nu_0\nu_1 kC'w(1)+CC'\left[w'^2(1)+2\nu_0 k\int_0^1 w'^2(\eta)\,d\eta\right] \qquad (4.9)$$

Для определения $\partial\omega/\partial\xi$ получилась неоднородная краевая задача, и так как ν_0 есть собственное число, то для разрешимости этой краевой задачи должно быть выполнено равенство (3.7), которое в рассматриваемом случае записывается следующим образом:

$$\int_0^1 w(\eta)\,\Phi(\xi,\eta)\,d\eta-w(1)\,p^2(1)\,F=0 \qquad (4.10)$$

Так как функции Φ и F зависят от функции $C(\xi)$ и ее производных, то равенство (4.10) есть дифференциальное уравнение для $C(\xi)$

$$\gamma C'''-\alpha CC'-\nu_1\beta C'=0 \qquad (4.11)$$

где

$$\alpha=-\int_0^1 w(\eta)\left\{[p^2w'^2]'+2\nu_0\rho'\int_0^\eta w'^2dt\right\}d\eta+$$

$$+w(1)\,p^2(1)\left[w'^2(1)+2\nu_0 k\int_0^1 w'^2(\eta)\,d\eta\right]$$

$$\beta=-\int_0^1 \nu_0\rho' w^2(\eta)\,d\eta+\nu_0 kw'(1)\,p^2(1),\qquad \gamma=\int_0^2 p^2(\eta)\,w^2(\eta)\,d\eta$$

Выражения для коэффициентов α и β можно упростить, если вспомнить, что функция $w(\eta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(p^2w')'=\nu_0 w d\rho/d\eta$$

Интегрируя по частям, легко установить, что в силу граничных условий сумма всех неинтегральных слагаемых будет равна нулю, так что окончательно получим

$$\alpha=3\int_0^1 p^2(\eta)\,w'^3(\eta)\,d\eta,\qquad \beta=\int_0^1 p^2(\eta)\,w'^2(\eta)\,d\eta \qquad (4.12)$$

Пусть $\alpha\neq 0$. Сделаем в уравнении (4.11) замену функции

$$C=9\gamma\zeta/\alpha+\nu_1\beta/\alpha$$

Тогда оно приведется к известному дифференциальному уравнению

$$\zeta'''=9\zeta\zeta'$$

Решение этого уравнения [5]

$$\zeta=\frac{a^2}{3}\left\{2k^2-1-3k^2cn^2\left[\frac{a\sqrt{3}}{2}(\xi-\xi_0)\right]\right.$$

Так что

$$C(\xi)=\frac{3a^2\gamma}{\alpha}\left\{2k^2-1-3k^2cn^2\left[\frac{a\sqrt{3}}{2}(\xi-\xi_0)\right]\right\}+\nu_1\frac{\beta}{\alpha} \qquad (4.13)$$

Из формулы (4.13) видно, что волна симметрична относительно вертикали $\xi = \xi_0$, и если в качестве вертикальной оси координат взять эту ось симметрии, то $\xi_0 = 0$. Заметим еще, что в конечные формулы произвольная постоянная a будет входить только в комбинации εa и без ограничения общности, можно принять $a = 2 / \sqrt{3}$, так как от этого может измениться лишь связь ε с физическими параметрами задачи.

При таких упрощениях для $C(\xi)$ получаем выражение

$$C(\xi) = \frac{4\gamma}{\alpha}[2k^2 - 1 - 3k^2 cn^2 \xi] + \nu_1 \frac{\beta}{\alpha}$$

Здесь $C(\xi)$ — функция с периодом $2K(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Равенства (4.1) и (4.4) дают теперь

$$u = \varepsilon^2 w'(\eta) C(\varepsilon x) + O(\varepsilon^4), \qquad v = -\varepsilon^3 C'(\varepsilon x) w(\eta) + O(\varepsilon^5)$$

Подставляя теперь выражение для u и в равенство (2.8), получим уравнение семейства линий тока

$$y = \eta - \varepsilon^2 w(\eta) C(\varepsilon x) + O(\varepsilon^4)$$

Решение зависит от ε, k и ν_1. Но ν_1 можно выразить через ε и k, используя условие, что средняя глубина потока равна единице: получим

$$\nu_1 = -\frac{1}{\beta}\left\{2k^2 - 1 - \frac{3k^2}{K(k)} \int\limits_{-K(k)}^{K(k)} cn^2(t)\, dt\right\} \tag{4.14}$$

Физические параметры потока просто выражаются через ε и k. Длина волны, очевидно, равна $\lambda = 2K(k) / \varepsilon$. Формула (3.9) дает выражение для скорости распространения

$$c^2 = \frac{gh}{\nu_0}[1 - \varepsilon^2 \nu_1(k)] + O(\varepsilon^4) \tag{4.15}$$

Как уже отмечалось выше, параметр ν_0 может принимать счетное множество значений $\nu_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}, \ldots, \nu_0^{(m)}, \ldots$. Каждому значению ν_0 соответствует двупараметрическое семейство линий тока. Если воспользоваться асимптотическими формулами (3.6), то легко установить, что при фиксированных ε и k чем больше номер волны, тем меньше ее амплитуда и скорость распространения.

Уединенная волна получается как частный случай при $k = 1$, когда длина волны становится бесконечной. Подставляя в соответствующие формулы $k = 1$, находим

$$\nu_1 = -\frac{4}{\beta}, \quad y = \eta + \frac{12\gamma}{\alpha}\varepsilon^2 w(\eta)\,\mathrm{sch}^2\,\varepsilon x, \quad c^2 = \frac{gh}{\nu_0}\left[1 + \frac{4\varepsilon^2\gamma}{\beta}\right] \tag{4.16}$$

Так как $\beta > 0$, то скорость распространения всегда больше критической, равной $\sqrt{gh} / \nu_0$. В отличие от однородной жидкости в неоднородной могут распространяться волны понижения.

Предполагалось, что коэффициент $\alpha \neq 0$. Если $\alpha = 0$, то предложенный асимптотический процесс должен быть несколько видоизменен. В общем случае нужно делать растяжение вида $\xi = \varepsilon^k x$ и искать решение в виде рядов (4.1). Если взять $k > 2$, то так как $\alpha = 0$, то полученная во втором приближении краевая задача будет разрешима и для определения произвольных функций нужно привлечь уравнения третьего (в общем случае k-го) приближения. Вычисления усложняются.

5. Некоторые примеры. Разнообразные примеры течений неоднородной жидкости можно получить, задавая различным образом функции $\rho(\eta)$ и $p(\eta)$, характеризующие распределение плотности и завихренности в потоке. Во многих важных случаях можно сделать такие предположения о характере этих функций

$$p(\eta) = 1 + O(\delta), \qquad \rho = 1 + O(\delta), \qquad \frac{d\rho}{d\eta} = -\delta + O(\delta)$$

где δ мало. Если в формулах (4.5) отбросить малые высших порядков относительно δ, то легко получить, что

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} + \nu_0\delta w = 0, \qquad w(0) = 0, \qquad \left[\frac{dw}{d\eta} - \nu_0 w\right]_{\eta=1} = 0 \tag{5.1}$$

Здесь использовано соотношение $k = \rho(1) / p^2(1) = 1 + O(\delta)$. Собственные функции краевой задачи (5.1) имеют такой вид:

$$w_k(\eta) = \sin \varkappa_k \eta \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

где $\varkappa_k$ — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\delta}{\varkappa}, \qquad \varkappa^2 = \nu_0\delta$$

Заметим, что при малых δ справедливы приближенные формулы

$$\varkappa_0 = \sqrt{\delta} + O(\delta), \qquad \varkappa_n = n\pi + O(\delta), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Вычислим коэффициенты γ, α и β по формулам (4.12). Для $\varkappa_0$ с точностью до членов высших порядков

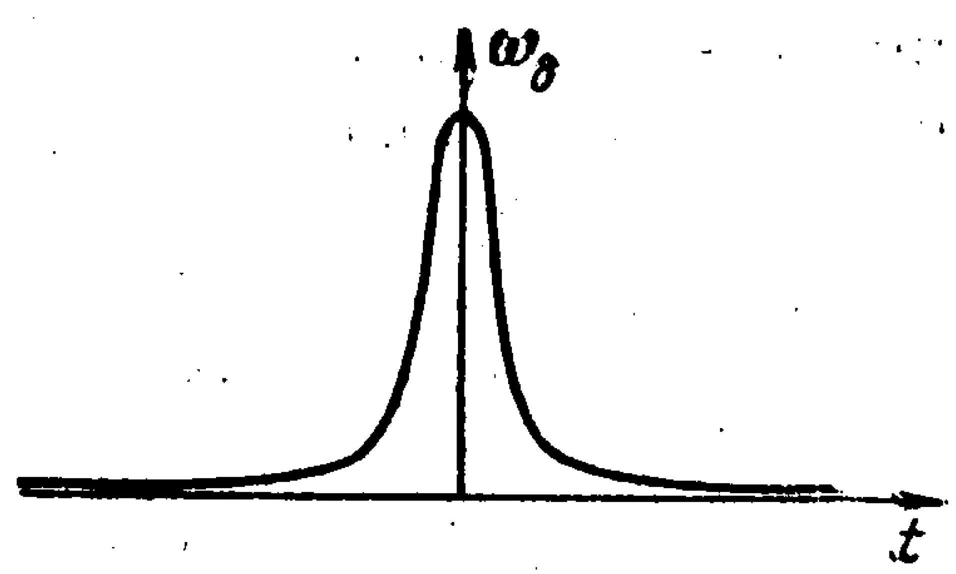
$$\gamma_0 = \frac{\delta}{3}, \qquad \beta_0 = \delta, \qquad \alpha_0 = 3\delta^{\frac{3}{2}}$$

Подставляя полученные выражения в формулы (4.16), получаем для уединенной волны

$$y = \eta + 4/3\, \varepsilon^2 \eta \operatorname{sch}^2 \varepsilon x, \qquad c^2 = gh(1 + 4/3\varepsilon^2)$$

Если обозначить $4\varepsilon^2/3$ через a (амплитуда), то получаются формулы Буссинеска — Рэлея.

$$y = \eta\,[1 + a \operatorname{sch}^2 (3a/4)^{1/2} x], \qquad c^2 = gh(1 + a)$$



Фнг. 2

Таким образом, при малых δ собственному числу $\varkappa_0$ соответствует уединенная волна, близкая к соответствующей уединенной волне для однородной жидкости.

Рассмотрим теперь случай $\varkappa = \varkappa_n$. В этом случае формулы (4.12) дают

$$\gamma = 1/2, \quad \beta = 1/2\, n^2\pi^2, \quad \alpha = O(\delta).$$

Для семейства линий тока и для скорости распространения получаем формулы

$$y = \eta + \frac{6}{\alpha}\, \varepsilon^2 \sin(n\pi\eta) \operatorname{sch}^2 \varepsilon x, \qquad c^2 = \frac{gh\delta}{n^2\pi^2}\left(1 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Очевидно, что скорости распространения этих волн малы при малых δ.

Интересен также тот случай, когда плотность резко меняется в окрестности некоторых линий тока, т. е. когда

$$\frac{d\rho}{d\eta} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \omega_\delta^{(k)} (\eta - \eta_k) = -\Omega_\delta(\eta)$$

где $\omega_\delta^{(k)}(t)$ есть δ-образная функция. Например, функция вида $\omega_\delta(t) = \delta / \pi(t^2 + \delta^2)$, изображенная на фиг. 2. При $\delta \to 0$ эти функции вырождаются в дельта-функции Дирака, что соответствует модели m-слойной жидкости. В этом случае для определения функции $\omega(\eta)$ нужно решить граничную задачу

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} + \nu_0\Omega_\delta(\eta)\, w = 0, \qquad w(0) = 0, \qquad \left[\frac{dw}{d\eta} - \nu_0 k w\right]_{\eta=1} = 0 \tag{5.2}$$

Эту задачу можно обычным способом свести к интегральному уравнению

$$w = \nu_0 \int_0^1 G(\eta, \eta', \nu_0)\, w(\eta')\, \Omega_\delta(\eta')\, d\eta'$$

где $G(\eta, \eta', \nu_0)$ — функция Грина оператора $d^2/d\eta^2$ с граничными условиями (5.2)

$$G(\eta, \eta', \nu_0) = \eta\left[\frac{\nu_0}{\nu_0 - 1}\eta' - 1\right] \quad (\eta \leqslant \eta'), \qquad G(\eta, \eta', \nu_0) = \eta'\left[\frac{\nu_0}{\nu_0 - 1}\eta - 1\right] \quad (\eta \geqslant \eta')$$

Если δ мало, то воспользовавшись свойствами δ-функций, получаем

$$w(\eta) = -\nu_0 \sum_{k=1}^{m} \alpha_k w(\eta_k) G(\eta, \eta_k, \nu_0)$$

Чтобы найти собственные числа, положим $y = \eta_j$

$$w(\eta_j) = -\nu_0 \sum_{k=1}^{m} \alpha_k w(\eta_k) G(\eta_j, \eta_k, \nu_0), \qquad (j=1, 2, \ldots, m)$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, получаем уравнения для ν_0. Находя затем числа $w(\eta_k)$ и подставляя их в (5.3), получим выражение для собственной функции. Рассмотрим простейший случай двухслойной жидкости, тогда

$$w(\eta) = -\nu_0 \alpha_1 G(\eta, \eta_0, \nu_0)$$

Скачок плотности α_1 будем считать малым, а $w(\eta_0)$ примем равным единице. Для определения ν_0 получаем уравнение

$$-\alpha_1 \nu_0 G(\eta_0, \eta_0, \nu_0) = 1, \qquad -\alpha_2 \nu_0 \eta_0 \left[\frac{\nu_0}{\nu_0 - 1}\eta_0 - 1\right] = 1$$

Это квадратное уравнение имеет два корня, один из которых стремится к единице при $\alpha_1 \to 0$, а второй к бесконечности. С точностью до малых высших порядков относительно α_1 получаем

$$\nu_0^{(1)} = 1 - \alpha_1 \eta_0^2, \qquad \nu_0^{(2)} = \frac{1}{\alpha_1 \eta_0 (1 - \eta_0)}$$

Соответствующие собственные функции имеют такой вид

$$w_1(\eta) = \eta + O(\alpha), \qquad w_2(\eta) = \begin{cases} \eta(1 - \eta_0) & (\eta \leqslant \eta_0) \\ \eta_0(1 - \eta) & (\eta \geqslant \eta_0) \end{cases}$$

Функция $w_1(\eta)$ достигает максимума при $\eta = 1$, а $w_2(\eta)$ при $\eta = \eta_0$. Найдем теперь уединенные волны, соответствующие $\nu_0^{(1)}$ и $\nu_0^{(2)}$. Уединенная волна для $\nu_0^{(1)}$ будет близка к соответствующей уединенной волне в однородной жидкости.

Рассмотрим волну, соответствующую $\nu_0^{(2)}$. По формулам (4.12) получаем

$$\gamma = \frac{1}{3}\eta_0^2(1 - \eta_0)^2, \qquad \beta = \eta_0(1 - \eta_0), \qquad \alpha = 3\eta_0(1 - \eta_0)(1 - 2\eta_0)$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.16), получаем

$$y = \eta + \frac{4}{3}\frac{\eta_0(1 - \eta_0)}{1 - 2\eta_0}\varepsilon^2 w_2(\eta)\,\mathrm{sch}^2\,\varepsilon x, \qquad c^2 = gh\alpha_1\eta_0(1 - \eta_0)\left[1 + \frac{4}{3}\eta_0(1 - \eta_0)\right]$$

Заметим, что скорость распространения этой волны мала, на верхней границе волнение отсутствует и максимальное волнение достигается на границе раздела двух слоев. Если $\eta_0 < 1/2$, то волна имеет уединенный горб, а если $\eta_0 > 1/2$, то уединенную впадину. При $\eta_0 = 1/2$ коэффициент $\alpha = 0$ и ряды по малому параметру нужно строить по схеме, предложенной в конце п. 4.

Поступила 23 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 473—476.
2. Fridrichs K. O and Hyers D. H. The Existence of Solitary Waves. Comm. on Pure and Appl. Math., 1954, № 7, 3. (Русск. пер. К. О. Фридрихс и Д. Г. Хайерс. Существование уединенных волн. Сб. пер. Теория поверхностных волн, М., ИЛ, 1959, стр. 145—184).
3. Stoker J. J., Peters A. S. Solitary Waves in Liquids Having Non — Constant Density. Comm. on Pure and Appl. Math., 1960, vol. XIII, 1, 115—164.
4. Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. т. I. М., ИЛ, 1960.
5. Тер-Крикоров А. М. Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4, стр. 622—636.